

## РЕОЛОГІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ БАГАТОШАРОВИХ МАТЕРІАЛІВ

У статті розглянуто питання, пов'язані з відновленням зношених деталей рухомого складу шаруватими покриттями. При побудові математичної моделі зношення багат шарового матеріалу як об'єкту реології зроблено певні припущення, що дає можливість використовувати методи механіки і механіки суцільних середовищ.

*Ключові слова:* зношені деталі, шарувате покриття, математична модель, зношення, багат шаровий матеріал

В статье рассмотрены вопросы, связанные с восстановлением изношенных деталей подвижного состава слоистыми покрытиями. При построении математической модели износа многослойного материала как объекта реологии сделаны определенные допущения, которые дают возможность использовать методы механики и механики сплошных сред.

*Ключевые слова:* изношенные детали, слоистое покрытие, математическая модель, износ, многослойный материал

The issues related to renewal of worn-out parts of a rolling stock with the layered coatings are considered in the article. In developing a mathematical model of wearing a multilayer material as an object of rheology certain assumptions, which enable using the methods of mechanics and mechanics of continuous medium, are done.

*Keywords:* worn-out parts, layered coating, mathematical model, wear, multilayer material

При відновленні деталей електролітичним способом, наплавленням або напиленням на основний матеріал, змінюючи параметри процесу можна отримати шари з різними механічними властивостями. Властивості кожного шару, товщини, а також їх комбінації істотно визначають характеристики покриття, а також роботу деталі після відновлення.

Основною задачею нанесених відновлюючих шарів є підвищення ресурсу та надійності експлуатації відновлених деталей.

Метою даної роботи є побудова математичної моделі багат шарового матеріалу, як об'єкту реології [1].

Перш за все відзначимо, що будь-яке фізичне тіло не можна розглядати як континуальний (безперервний) об'єкт, але якщо максимальний диспергований елемент має розміри значно менше розміру елемента, деформації якого розглядаються, то в даному випадку можна вважати, що тіло (шар) є квазіоднорідним. Якщо найменший об'єм містить анізотропні дисперговані елементи всіляких орієнтацій, то такий матеріал можна вважати квазіізотропним. Надалі вважаємо, що зроблені припущення виконуються для кожного шару і тим самим можуть бути використані методи механіки [2] і механіки суцільних середовищ [3].

Оскільки після відновлення деталей взаємодіятиме з іншими деталями, то питання зносу істотно визначаються не тільки властивостями покриття, але характером контакту її з іншими тілами, тому до зроблених допущень додамо

можливість застосування механіки контактної взаємодії [4].

Розглядаючи елементи покриття як елементи об'єму, ми маємо право при зроблених допущеннях використовувати шість рівнянь динаміки у формі

$$\sum P_i = 0; \quad \sum M_i = 0, \quad (1)$$

які записані у вигляді рівнянь рівноваги з урахуванням принципу Д'Аламбера.

Сили, що діють на елементарний об'єм, для якого виписані рівняння (1), можуть бути об'ємними, пропорційними масі елемента або поверхневими. Поверхневі сили можуть бути зовнішніми або внутрішніми. Віднісши їх до одиниці площі, приходимо до поняття напруження. Сукупність напруження на площинках, орієнтованих різним чином по відношенню до координатних осей визначають напружений стан елемента і є тензором другого рангу  $S_{lm}$ , відносно якого виконується постулат Больцмана, що приводить до співвідношення

$$S_{lm} = S_{ml}. \quad (2)$$

Індекси в тензорі напруження  $S_{lm}$  приймають значення від 1 до 3.

Положення елемента в просторі описуватимемо радіус-вектором  $r$  (з компонентами  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ ). Після деформації даний елемент описуватиметься радіус-вектором  $r'$ , а зсув його буде рівний  $r' - r$ . Цей зсув зазвичай позначають як вектор, компоненти якого рівні

$$u_i = x'_i - x_i, \quad i = \overline{1,3} \quad (3)$$

і даний вектор називають вектором деформації [3].

З даним вектором зв'язують тензор  $u_{ik}$  таким чином

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right). \quad (4)$$

У виразі (4) за однаковими індексами, що двічі зустрічаються, виконується підсумовування від 1 до 3.

До рівнянь механіки (1) необхідно приєднати співвідношення між тензором деформацій  $u_{ik}$  і тензором напружень  $S_{lm}$ , яке записуватимемо у вигляді

$$R(u_{ik}, S_{lm}, \dot{u}_{ik}, \dot{S}_{lm}) = 0, \quad (5)$$

де  $\dot{u}_{ik}, \dot{S}_{lm}$  – відповідні похідні в часі.

Рівняння типу (5) називають реологічними рівняннями [1] і вони спільно з (1) дозволяють зробити задачу про деформацію тіла цілком визначеною.

Якщо розглядати задачу, як задачу контактної взаємодії, то вказані співвідношення повинні бути доповнені співвідношеннями, що описують контактну взаємодію (ковзання, кочення або вертіння).

Для розкриття залежностей (5) в реології [1] вводять три фундаментальні реологічні властивості: пружність, в'язкість і пластичність (внутрішнє тертя). Решта всіх складних властивостей є комбінаціями вказаних фундаментальних властивостей.

Прийнято пружне тіло називати тілом Гука, а реологічне рівняння (5) для нього має вигляд

$$S_{lm} = \lambda u_{\alpha\alpha} \delta_{lm} + 2\mu u_{lm}, \quad (6)$$

де  $\lambda = \chi - \frac{2}{3}\mu$  є константою Ляме;

$\mu$  – модуль пружності другого роду;

$\chi$  – об'ємний модуль пружності.

Із співвідношення (6) можна отримати

$$u_{lm} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \cdot S_{\alpha\alpha} \delta_{lm} + \frac{1}{2\mu} S_{lm}. \quad (7)$$

У співвідношеннях (6) і (7)  $\delta_{lm}$  є символом Кронекера.

У технічній літературі, як правило, використовують модуль Юнга

$$E = \frac{9\chi\mu}{3\chi + \mu}$$

і коефіцієнт Пуассона

$$\nu = \frac{3\chi - 2\mu}{6\chi + 2\mu}.$$

Відмітимо, що будь-який тензор другого рангу можна розкласти на два доданки, так, наприклад

$$u_{ik} = \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ik} + u_{ik(0)},$$

де  $u_{ll} = u_{11} + u_{22} + u_{33} = I_{21} = u_v$  – є деформацією об'єму, а тензор  $u_{ik(0)}$  називають девіатором з нулями по головній діагоналі і він відбиває зміну форми при постійному об'ємі. Подібне представлення має місце і для тензора напружень

$$S_{lm} = \frac{1}{3} S_{\alpha\alpha} \delta_{lm} + S_{lm(0)}.$$

$$\text{Величина} \quad \frac{1}{3} S_{\alpha\alpha} = -p,$$

де  $p$  – гідростатичний або статичний в термодинамічному сенсі тиск.

Для характеристики в'язкості вводяться тіло (або рідина) Ньютона, реологічне рівняння (5), для якого має вигляд:

$$S_{lm} = -p \delta_{lm} + 2\eta \dot{u}_{lm(0)}, \quad (8)$$

де  $\eta$  – коефіцієнт (зсувної) в'язкості, він має розмірність напруження, помноженої на якийсь час і вимірюється в пузах ( $1 \text{ пз} = 1 \text{ дїна} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}$ ).

Наступну фундаментальну властивість прийнято розглядати як тіло Сен-Венана, коли напруження  $S_{lm(0)}$  менше деякої межі  $\nu_{lm(0)}$ , то воно є абсолютно твердим, а якщо

$$S_{lm(0)} = \nu_{lm(0)}, \quad (9)$$

то матеріал пластично тече.

Перераховані тіла зручно представляти за допомогою наступних механічних моделей:

- тіло Гука ( $H$ ) – спіральна пружина;
- тіло Ньютона ( $N$ ) – рідинний елемент у вигляді циліндра, наповненого в'язким маслом, в який з деяким зазором вставлений поршень (демпфер);
- тіло Сен-Венана ( $Stv$ ) – елемент сухого тертя у вигляді вантажу, що покоїться на горизонтальній площині.

Всі ці елементи можуть бути сполучені між собою паралельно ( $|$ ) або послідовно ( $-$ ). При паралельному з'єднанні повне навантаження на тіло складається з навантажень, що передаються окремим елементам, і швидкість подовження

елементів однакові. При послідовному з'єднанні повна швидкість подовження дорівнює сумі швидкостей складових елементів, причому кожний з них передає повне навантаження.

Механічна модель, відтворююча поведінку тіла, описаного Кельвіном у роботі [5], представлена на рис. 1.

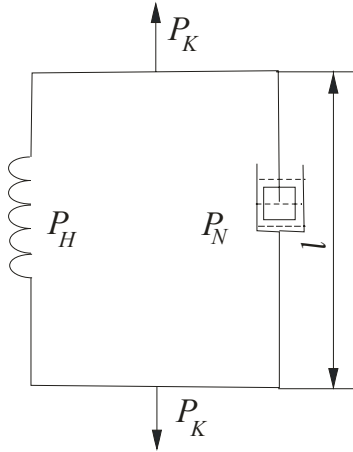


Рис. 1. Модель тіла Кельвіна

Реологічна формула тіла Кельвіна:

$$K = H|N,$$

оскільки тіло Гука ( $H$ ) і тіло Ньютона ( $N$ ) сполучені паралельно, то для сил маємо:

$$P_K = P_H + P_N,$$

або в термінах девіаторов отримуємо:

$$S_{lm(0)} = 2\mu u_{lm(0)} + 2\eta \dot{u}_{lm(0)},$$

де  $\eta$  – в'язкість твердого тіла.

Якщо навантаження задане, то з цього рівняння отримуємо

$$u_{lm(0)}(t) = e^{-\frac{\mu}{\eta}t} \left( u_{lm(0)}(0) + \frac{1}{2\eta} \int_0^t S_{lm(0)}(\tau) \cdot e^{\frac{\mu}{\eta}\tau} d\tau \right),$$

де  $u_{lm(0)}(0)$  – початкова деформація.

Для спрощення викладу позначимо через  $\sigma = S_{lm(0)}$ ;  $\varepsilon = u_{lm(0)}$  і розглянемо поведінку деформації  $\varepsilon$  при постійному навантаженні  $\sigma$ , яке описуватиметься залежністю

$$\varepsilon = \left( \varepsilon_0 - \frac{\sigma}{2\mu} \right) e^{-\frac{\mu}{\eta}t} + \frac{\sigma}{2\mu},$$

де  $\varepsilon_0 = u_{lm(0)}(0)$ .

З представленої залежності виходить, що характер зміни деформації визначається значенням

$\varepsilon_0 - \frac{\sigma}{2\mu}$ . На рис. 2 представлено залежності  $\varepsilon(t)$  при різних співвідношеннях даної різниці.

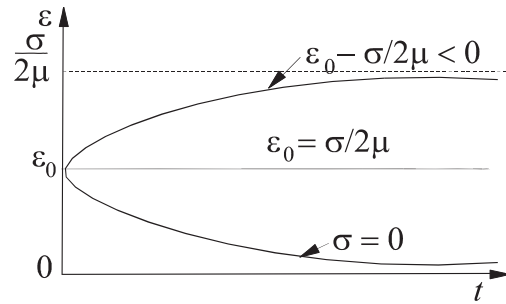


Рис. 2. Залежність деформацій тіла Кельвіна при постійному навантаженні

У роботі [1] передбачається у якості основної аксіоми реології вважати, що будь-який реальний матеріал володіє всіма фундаментальними реологічними властивостями, але вираженими різною мірою.

Так, наприклад, при електролітичному відновленні або газотермічному напиленні, шар який безпосередньо осідає на основний матеріал (адгезійний), повинен досить добре з'єднатися з основним матеріалом і володіти певним опором по відношенню до сколювання та відшаровування.

Даний шар можна моделювати тілом Бінгама, реологічна формула якого має вигляд:

$$B = H - (N|Stv).$$

Механічна схема тіла Бінгама ( $B$ ) представлена на рис. 3. Наявність в даній моделі тіла Сен-Венана ( $Stv$ ) дозволяє відобразити здатність даного шару опиратися сколюванню або міцність зчеплення (адгезія) з основним матеріалом деталі.

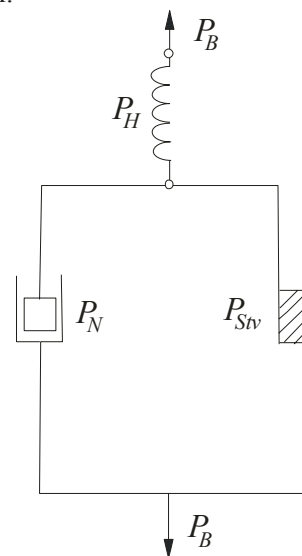


Рис. 3. Схема моделі тіла Бінгама

В термінах напружень і деформацій для тіла Бінгама маємо:

$$\sigma = \begin{cases} 2\mu u, & \text{якщо } |\sigma| < |\vartheta|; \\ 2\eta u + \vartheta, & \text{якщо } |\sigma| \geq |\vartheta|, \end{cases}$$

де  $\vartheta$  – характеристика зчеплення (адгезії).

У граничному випадку, коли  $\mu = 0$ ;  $\eta = 0$  або при достатньо малих їх значеннях основною властивістю даного шару буде властивість зчеплення з матеріалом деталі. Надалі даний шар називатимемо першим шаром покриття.

Другий шар буде проміжним між першим і третім шаром, який контактує з іншими деталями.

Перейдемо до розгляду контактної взаємодії відновленої деталі, що має поверхневі шари з іншими деталями (тілами).

У загальному випадку, контактна взаємодія визначається способом кріплення покриття з деталлю. Розрізняють наступні варіанти:

- покриття (шар, шари) постійно знаходяться у контакті з деталлю в усіх точках, але вільно прослизують відносно його;
- шар повністю зчеплений з основою деталі;
- може мати місце прослизання, коли дотичне напруження на поверхні розділу перевершує граничне напруження зчеплення (тертя);
- шар, що знаходиться спочатку в повному контакті з тілом деталі може частково відставати від нього під дією навантаження.

Надалі розглядатимемо ситуацію, коли покриття умовно складається як мінімум з трьох шарів, причому перший шар (зчеплений з тілом деталі) відносно деталі може переміщатися, прослизати тільки тоді, коли дотичне напруження на поверхні розділу перевершує граничне напруження, тобто міцність зчеплення.

Що стосується третього шару (верхнього покритті), то він може переміщатися відносно першого в певних межах. Іншими словами, проміжний шар (другий) може «текти» і повинен гасити дотичну напругу від третього шару, що контактує з іншим тілом (рис. 4).

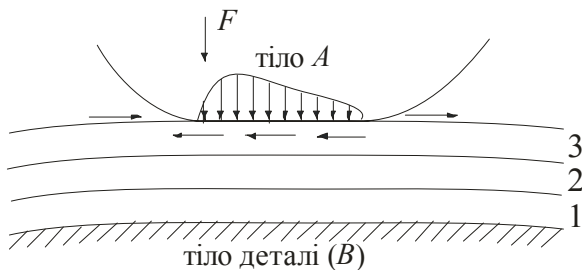


Рис. 4. Схема контакту відновленої деталі

Розрізнятимемо контактну взаємодію у вигляді ковзання і у вигляді кочення. При ковзанні поверхня тіла  $A$  має відносну окружну швидкість в точці контакту, а при коченні тіло  $A$  і покриття володіють відносними кутовими швидкостями навколо осей, паралельних площині торкання. Очевидно, що в реальних умовах кочення і ковзання можуть мати місце одночасно. Ми обмежимося розглядом ковзання при наступних допущеннях:

- форми тіла  $A$  і деталі є неузгодженими;
- вважаємо, що тіла знаходяться в умовах сталого відносного ковзання;
- деформації тіл малі.

З останнього допущення для тензора деформацій маємо вираз (замість (4))

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right).$$

Поблизу точки дотику рівняння поверхні тіла  $A$  запишемо у вигляді

$$z = \chi_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta,$$

причому по  $\alpha, \beta$  проводиться підсумовування від 1 до 2.

Вісь  $z$  направлено всередину тіла, а площина  $x_1, x_2$  перпендикулярна осі  $z$ . Тензор  $\chi_{\alpha\beta}$  – двовимірний симетричний тензор, що характеризує кривизну поверхні тіла  $A$ . Головні значення тензора  $\chi_{\alpha\beta}$  дорівнюють  $\frac{1}{2R_1}$  та  $\frac{1}{2R_2}$ , де

$R_1$  і  $R_2$  – головні радіуси кривизни поверхні в точці дотику. Так само для поверхні покриття маємо

$$z' = \chi'_{\alpha\beta} x'_\alpha x'_\beta,$$

де вісь  $z'$  направлена протилежно осі  $z$ .

Під дією прикладених сил поблизу точки первинного зіткнення на поверхні тіл виникає втискування, і тіла стикатимуться по деякій кінцевій ділянці, що є областю контакту.

Нехай  $u$  і  $u'$  – вектори зсуву точок поверхні обох тіл, а  $u_z$  і  $u'_z$  – їх проекції на осі  $z$  і  $z'$  відповідно. Якщо  $h$  є зближенням тіл, то тоді в точках контакту має місце

$$(z + u_z) + (z' + u'_z) = h,$$

або

$$(\chi_{\alpha\beta} + \chi'_{\alpha\beta}) x_\alpha x_\beta + u_z + u'_z = h. \quad (10)$$

У точках поза область контакту виконуватиметься нерівність

$$(z + u_z) + (z' + u'_z) > h.$$

Вибираємо осі  $x_1$  і  $x_2$  так, щоб тензор  $\chi_{\alpha\beta} + \chi'_{\alpha\beta}$  був приведений до головних осей. Головні значення даного тензора позначимо через  $A$  і  $B$ , які через радіуси кривизни  $R_1$ ,  $R_2$  і  $R'_1$ ,  $R'_2$  виражаються таким чином [3]:

$$2(A+B) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2};$$

$$4(A-B)^2 = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'_2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \cdot \left(\frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'_2}\right) \cos 2\varphi,$$

де  $\varphi$  – кут між тими нормальними перетинами поверхонь, в яких радіуси кривизни рівні  $R_1$  і  $R'_1$ .

Співвідношення (10) через  $A$  і  $B$  можна записати у вигляді:

$$Ax^2 + By^2 + u_z + u'_z = h. \quad (11)$$

У разі, коли поверхні тіл навколо контакту можна розглядати як плоскі і навантаження тільки стискаюче, тоді  $u_z$  і  $u'_z$  обчислюють за формулами [5]:

$$u_z = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint_G \frac{P_z(x', y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} dx' dy';$$

$$u'_z = \frac{1-\nu'^2}{\pi E'} \iint_G \frac{P_z(x', y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} dx' dy',$$

де  $\nu, \nu'$  і  $E, E'$  – коефіцієнти Пуассона і модулі Юнга контактуючих тіл;

$P_z(x', y')$  – питоме навантаження в області контакту  $G$ .

Підставивши  $u_z$  і  $u'_z$  в (11), приходимо до інтегрального рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{D}}{\pi} \iint_G \frac{P_z(x', y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} dx' dy' = \\ = h - Ax^2 - By^2, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\text{де } \tilde{D} = \left( \frac{1-\nu'^2}{E'} + \frac{1-\nu^2}{E} \right).$$

У інтегральному рівнянні (12) невідомими є  $P_z(x', y')$ , область контакту  $G$  і  $h$ .

Герц висунув гіпотезу, що область  $G$  має еліптичну форму. Тоді, якщо розміри області контакту малі порівняно з розмірами контактуючих тіл і радіусами кривизни їх поверхонь, то

$$P_z(x, y) = \text{const} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (13)$$

і вибираємо константу так, щоб

$$\iint_G P_z(x, y) dx dy = F,$$

де  $F$  – повна стискаюча сила;  $a, b$  – напівосі еліпса  $G$ , отримуємо:

$$P_z(x, y) = \frac{3F}{2\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}};$$

$$P_z(x', y') = \frac{3F}{2\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2}},$$

а підставивши  $P_z$  в (12), отримаємо тотожність і, порівнюючи коефіцієнти при невідомих  $x$  та  $y$  справа і зліва, отримаємо:

$$h = \frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{(a^2 + \xi) \cdot (b^2 + \xi)} \xi}; \quad (14)$$

$$A = \frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(a^2 + \xi) \sqrt{(a^2 + \xi) \cdot (b^2 + \xi)} \xi}; \quad (15)$$

$$B = \frac{FD}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{(b^2 + \xi) \sqrt{(a^2 + \xi) \cdot (b^2 + \xi)} \xi}, \quad (16)$$

$$\text{де } D = \frac{3}{4} \tilde{D}.$$

Рівняння (15) і (16) визначають напівосі еліпса  $a$  та  $b$ , підставивши які в (14), знайдемо зближення тіл  $h$ .

Оскільки матеріали контактуючих тіл мають різні константи  $\nu$  і  $E$ , то контактний тиск  $P_z$  викликає тангенціальні переміщення на поверхні контакту, і у кожній поверхні вони будуть свої, що приводить до прослизання. Дане прослизання до деякої міри може стримуватися тертям. Тому в центральній частині контакту ма-



тиме місце повне зчеплення, а прослизання можливе тільки в зоні, що примикає до межі області контакту.

У разі, коли коефіцієнт граничного тертя достатньо великий, то прослизання може повністю виключитися.

Більш детально дане питання викладене в роботі [4].

Якщо  $F$  – нормальна сила, що здавлює тіла (рис. 4), то за відсутності сил тертя область контакту визначається теорією Герца. Проте при ковзаючому контакті реальних тіл виникають дотичні зусилля тертя  $Q$ , що діють по поверхні кожного тіла в напрямі, протилежному руху.

Очевидно, що дотичні зусилля, які діють на поверхні кожного тіла в області контакту, є однакові за величиною і протилежні за напрямом, тоді, якщо  $q_A(x, y)$  – дотичне зусилля на поверхні тіла  $A$ , а  $q_C(x, y)$  – для шару, то

$$q_A(x, y) = -q_C(x, y)$$

і, враховуючи представлення для  $u_z$  і  $u'_z$ , отримаємо:

$$\frac{E}{1-2\nu} u_z(x, y) = -\frac{E'}{1-2\nu'} u'_z(x, y). \quad (18)$$

Звідси витікає, що дотичні зусилля знаходяться у взаємній залежності з нормальним тиском. Якщо коефіцієнт тертя значно менше одиниці, то, як показано в роботі [4], вплив дотичних напружень на розподіл нормальних і на область контакту є малим і можна вважати, що дотичні і нормальні напруження незалежні.

Отже, напружено-деформований стан може бути визначений їх суперпозицією.

З іншого боку, з (17) витікає, що, якщо тіло і третій шар мають однакові пружні постійні, то дотичні напруження через площину контакту викликають рівні за величиною  $u_z$  та  $u'_z$  і протилежні за напрямом переміщення в будь-якій точці контакту. Таким чином, викривлення поверхні одного тіла супроводжується узгодженим викривленням поверхні іншого тіла і перерозподіл нормального тиску не відбувається. Тому форма і розміри області контакту визначаються тільки профілями контактуючих тіл і діючими нормальними навантаженнями і не залежать від дотичних зусиль.

#### БІБЛЮГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Рейнер, М. Реология [Текст] / М. Рейнер. – М.: Наука, 1965. – 223 с.
2. Маркеев, А. П. Теоретическая механика [Текст] / А. П. Маркеев. – М.: Наука, 1990. – 416 с.
3. Ландау, Л. Д. Теория упругости. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1965. – 203 с.
4. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия [Текст] / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
5. Lord Kelvin (Thomson, W.) Elasticity [Text] / Lord Kelvin (W. Thomson) // Encyclopedia Britannica. – 9<sup>th</sup> ed. – 1875.

Надійшла до редколегії 08.11.2010.

Прийнята до друку 10.11.2010.