

## ОБОСНОВАНИЕ ЭВРИСТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА В ЗАДАЧЕ О РАНЦЕ

**Введение:** Сформирована задача о ранце в терминах функций множества и приведен эвристический алгоритм. **Цель:** доказательство того, что эвристический алгоритм является необходимым условием. Некоторые факты из работы [2]. Показана эквивалентность предела последовательности по Э. Борелю и сходимостью по мере. Доказана теорема о необходимости максимума функции множества. **Ситуации достаточности алгоритма:** Приведены три ситуации, когда эвристический алгоритм является достаточным. **Контрпример:** Приведен контрпример из работы [1] и дано добавление в эвристический алгоритм, что позволяет получать решение задачи о ранце. **Векторная оптимизация:** С задачей о ранце завязывается задача векторной оптимизации инвестирования мероприятий. **Выводы:** Предложен алгоритм решения задачи о ранце и для аддитивных функций алгоритм определения Парето решения задачи векторной оптимизации по двум показателям. **Приложение:** Приведена программа в среде Maple решения задачи о ранце.

*Ключевые слова:* задача о ранце, функции множества, векторная оптимизация, задача инвестирования

### Введение

Пусть  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  перечень предметов, для каждого  $\omega_i$  сопоставляется два числа  $p_i = p(\omega_i)$ , ценность предмета  $\omega_i$  и  $m_i = m(\omega_i)$  – масса (вес) предмета  $\omega_i$ .

Необходимо найти такой перечень предметов  $A \subseteq \Omega$ , чтобы

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega), \quad (1)$$

было бы максимальным и выполнялось условие

$$M(A) = \sum_{\omega \in A} m(\omega) \leq \bar{M}, \quad (2)$$

где  $\bar{M}$  – максимальная масса предметов, которая может быть помещена в ранце.

В работе [1] приводится алгоритм:

Для каждого предмета  $\omega_i \in \Omega$  вычисляется

$$\lambda_i = \frac{p(\omega_i)}{m(\omega_i)}.$$

1. Множество  $\Omega$  упорядочиваем согласно правилу

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n;$$

$$2. F := 0; \quad A := \{\};$$

$$3. M_0 = \bar{M};$$

4. for  $i$  from 1 to  $n$  do

5. if  $M_0 \geq \bar{M}$  then

$$6. A := A \cup \{\omega_i\}; \quad M_0 := M_0 - m_i; \quad F := F + p_i;$$

7. end if

8. End do

9. Print  $(A, F)$ .

Данному алгоритму в работе [1] предпосылается: «Разумным кажется вкладывать в ранце те предметы, для которых удельная стоимость максимальна».

**Целью данной работы** является доказательство того, что предполагаемое утверждение не только «разумно», но представляет собой необходимое условие решения задачи о ранце.

### Некоторые факты из работы [2]

Ради замкнутости изложения приводим некоторые факты из работы [2].

Полагаем  $\Xi(\Omega)$  – алгебра подмножеств множества  $\Omega$ , а отображение  $\Xi(\Omega) \xrightarrow{F} R$ , определяем как функцию множества  $F(A)$  для любого  $A \in \Xi(\Omega)$ . Среди функций множества определенных на  $\Xi(\Omega)$  выбираю функцию  $\mu(A)$  со следующими свойствами:

$$1. \mu(A) \geq 0, \quad \forall A \in \Xi(\Omega).$$

$$2. \text{Если } \mu(A) = 0, \text{ то } A = \{\};$$

$$3. \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B);$$

$$4. \text{Если } B \text{ является пределом любой последовательности множеств } \{B_n\}, \quad n = 1, 2, \dots, \text{ то}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \mu(B).$$

Таким образом, определенную функцию множества  $\mu(A)$  будем называть мерой на алгебре  $\Xi(\Omega)$ .

**Свойство 4.** функции  $\mu(A)$  можно записать следующим образом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B \Delta B_n) = 0, \quad (3) \quad \text{где}$$

где  $\Delta$  - операция симметрической разности двух множеств.

Соотношение (3) можно положить в основу определения предела последовательности множеств.

Имеет место

**Теорема 1.** Если  $B_n$  предел по Борелю последовательности  $\{B_n\}$ , а  $B$  - предел в смысле (3), то из существования предела  $B_n$  следует существование  $B$  и из существования  $B$  следует существование предела,  $B_n$  и они совпадают.

Данная теорема позволяет отказаться от весьма громоздкого определения предела по Борелю, а пользоваться соотношением (3).

**Определение 1.** Под производной от функции множества  $F(A)$  по мере  $\mu(A)$  на последовательности  $\{B_n\}$  будем понимать предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(A \Delta B_n) - F(A)}{\mu(A \Delta B_n) - \mu(A)} = a$$

и записывать в виде

$$\left. \frac{dF(A)}{d\mu} \right|_{\{B_n\} \rightarrow B} \triangleq a.$$

Естественно, возникает вопрос: «Когда существует данная производная?».

Ответом на данный вопрос является требование, чтобы функция  $F(A)$  была бы непрерывной, то есть для любой последовательности  $\{A_n\}$  сходящиеся к  $A$  имеет место

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(A_n) = F(A).$$

Если  $\{B_n\}$  сходится к множеству  $B$ . Тогда для непрерывной функции  $F(A)$  производная по мере равна

$$\left. \frac{dF(A)}{d\mu} \right|_{\{B_n\} \rightarrow B} = \frac{F(A \Delta B) - F(A)}{\mu(A \Delta B) - \mu(A)}. \quad (4)$$

**Теорема 2.** Если на множестве  $A$  функция  $F(A)$  принимает максимальное значение, то с необходимостью имеет место

$$\left. \frac{dF(A)}{d\mu} \right|_{\{B_n\} \rightarrow \{\omega\} \subset A} \geq 0.$$

**Доказательство.** Пусть на  $A$  функция  $F(A_n)$  принимает максимальное значение, то-

$$F(A \Delta B_n) - F(A) \leq 0.$$

Не ограничивая общности рассмотрения, считываем что множества  $B_n$  начиная с некоторого номера принадлежит множеству  $A$ , тогда

$$\begin{aligned} \mu(A \Delta B_n) - \mu(A) &= \mu(A) - \mu(B_n) - \\ &- 2\mu(A \cap B_n) - \mu(A) = -\mu(B_n), \end{aligned}$$

и потому отношение

$$\frac{F(A \Delta B_n) - F(A)}{\mu(A \Delta B_n) - \mu(A)} \geq 0.$$

Вычислив предел при  $n \rightarrow \infty$  получаем доказательство теоремы 2.

Введем функцию Лагранжа

$$L(A) = P(A) + t(\bar{M} - M(A)),$$

производная, которой по мере  $\mu(A)$  существует и задача (1), (2) сводится к максимизации  $L(A)$ , что в силу теоремы 2 дает

$$\left. \frac{dF(A)}{d\mu} \right|_{\{B_n\} \rightarrow \{\omega\} \subset A} = p(\omega) - tm(\omega) \geq 0.$$

Откуда получаем, что множество  $A$  состоит из таких  $\omega \in \Omega$ , при которых  $\frac{p(\omega)}{m(\omega)} \geq t$ .

$A$  множитель Лагранжа принимает минимально возможное таким, чтобы выполнялось соотношение (2). Полученный результат, позволяет эвристический алгоритм решения задачи о ранце считать необходимым и тем самым и слово «эвристический» можно отбросить.

#### Ситуации достаточности алгоритма

Не ограничивая общности рассмотрения будем считать, что нумерация предметов во множестве  $\Omega$  такова, что имеет место:

$$p(\omega_1) \geq p(\omega_2) \geq \dots \geq p(\omega_n).$$

Укажем некоторые ситуации, когда предложенный алгоритм является, не только необходимым, но и достаточным.

c1: Пусть  $m(\omega_i) = \text{const}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

c2: Если  $m(\omega_1) \geq m(\omega_2) \geq \dots \geq m(\omega_n)$ , этого достаточно.

c3: Если при некотором  $t$  имеет место

$$\sum_{\omega \in A_t} m(\omega) = \overline{M(A)}. \quad (5)$$

Первые две ситуации с1 и с2 очевидны. Рассмотрим ситуацию с3. В этой ситуации, множество  $A_t$  представляет собой

$$A_t = \left\{ \omega \in \Omega; p(\omega) / m(\omega) \geq t \right\}.$$

Пусть существует такое  $\omega_0 \notin A_t$ , что можно заменить  $\tilde{\omega} \notin A_t$ , на  $\omega_0$  и соотношение (5) не будет нарушено. Но так как  $p(\tilde{\omega}) \geq p(\omega_0)$ , то значение  $P$  для измененного  $A_t$  будет меньше  $P(A_t)$ , что и доказывает достаточность (5).

### Контрпример

В работе [1] приводится контрпример, когда  $\Omega$  состоит из двух предметов  $\{\omega_1, \omega_2\}$  и  $m(\omega_1) = 200$ ,  $p(\omega_1) = 190$ ,  $m(\omega_2) = 1$ ,  $p(\omega_2) = 5$ , а емкость ранца  $\overline{M(A)} = 200$ .

Чтобы учесть и такую ситуацию, предлагается приведенный алгоритм пополнить следующим:

п1: Вычисляем

$$\bar{P} = \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega).$$

п2: Удаляем последовательно из  $\Omega$  такие предметы, у которых  $p(\omega)$  минимальна, до тех пор пока  $M(A)$  не станет меньше или равным  $\overline{M(A)}$ .

п3: Если  $L_{\text{opt}} = A_t \subseteq \Omega$ ,  $L1_{\text{opt}}$  – множество, построенное по приведенному алгоритму, то тогда выбираем такое множество  $L_{\text{opt}}$  или  $L1_{\text{opt}}$ , у которого  $P$  максимально.

Таким образом, алгоритм позволяет находить решение в задаче о ранце.

### Векторная оптимизация

Заметим, что с задачей о ранце (1), (2) можно связать задачу о векторной оптимизации в виде

$$\begin{pmatrix} P(A) \\ -M(A) \end{pmatrix} \rightarrow \max$$

при условии  $A \in \Xi(\Omega)$ .

Решение данной задачи сводится к построению множества  $A_t$  определяемого следующим образом

$$A_t = \left\{ \omega \in \Omega; p(\omega) / m(\omega) \geq t \right\}.$$

Тогда  $P(A_t)$  и  $M(A_t)$  получаем как некоторые функции параметра  $t \geq 0$ , в пространстве функционалов зависимости  $P$  от  $M$  качественный характер имеет вид:

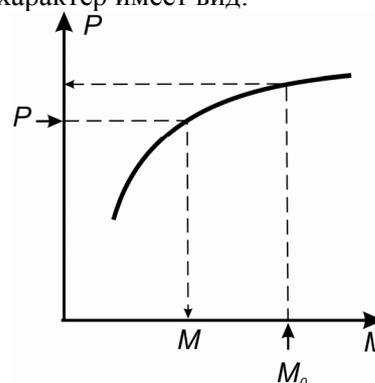


Рис. 1. Качественная зависимость  $P$  от  $M$

И по заданному  $M_0$  определяем максимально возможное  $P$ . Если зададимся  $P$ , то найдем минимально необходимую вместимость ранца (рис. 1).

В заключение отметим, что при условии, когда  $P(A)$  и  $M(A)$  являются аддитивными функциями, то предложенный алгоритм с необходимостью определяет Парето решение соответствующей задачи векторной оптимизации.

### Выводы

Доказано необходимость эвристического алгоритма и дано его усовершенствование решения задачи о ранце. Для аддитивных функций предложен алгоритм определения Парето решения задачи векторной оптимизации по двум показателям.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лазарев, А. А. Теория расписаний, задачи и алгоритмы [Текст] / А. А. Лазарев, Е. Р. Гафаров. – М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2011. – С. 222.
2. Босов, А. А. Функции множества и их применение [Текст] / А. А. Босов. – Днепропетровск: Вид. дім «Андрій», 2007. – 182 с.

Поступила в редколлегию 05.11.2012.

Принята к печати 23.11.2012.

## ПРОГРАММА В СРЕДЕ MAPLE РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАНЦЕ

(Рациональное инвестирование)

> **restart:with(linalg):with(plots):****n:=12;** Число предметов(число мероприятий).

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

Warning, the name changecoords has been redefined

 $n := 12$ > **Mr:=534;** Вместимость ранца(Располагаемые финансы). $Mr := 534$ > **m:=[52,56,65,54,75,50,70,84,60,52,65,67];** Массы предметов(затраты по мероприятиям). $m := [52, 56, 65, 54, 75, 50, 70, 84, 60, 52, 65, 67]$ > **p:=[164,163,165,165,191,160,182,184,164,165,167,168];** Ценность предметов(прибыль от мероприятий). $p := [164, 163, 165, 165, 191, 160, 182, 184, 164, 165, 167, 168]$ > **t:= [seq(p[i]/m[i], i=1..n)];** $t := \left[ \frac{41}{13}, \frac{163}{56}, \frac{33}{13}, \frac{55}{18}, \frac{191}{75}, \frac{16}{5}, \frac{13}{5}, \frac{46}{21}, \frac{41}{15}, \frac{165}{52}, \frac{167}{65}, \frac{168}{67} \right]$ > **ttmin:=sort(t, `>`);** $ttmin := \left[ \frac{16}{5}, \frac{165}{52}, \frac{41}{13}, \frac{55}{18}, \frac{163}{56}, \frac{41}{15}, \frac{13}{5}, \frac{167}{65}, \frac{191}{75}, \frac{33}{13}, \frac{168}{67}, \frac{46}{21} \right]$ > **W:=[]:for i from 1 to n do for j from 1 to n do if ttmin[i]=t[j] then W:=[op(W),w[j]] end if: end do: end do;print(W);** $[w_6, w_{10}, w_1, w_4, w_2, w_9, w_7, w_{11}, w_5, w_3, w_{12}, w_8]$ 

&gt;

**PP:=array(1..n, []);MM:=array(1..n, []);LL:=array(1..n, []);LLL:=array(1..n, []);** $PP := \text{array}(1..12, [ ])$  $MM := \text{array}(1..12, [ ])$  $LL := \text{array}(1..12, [ ])$  $LLL := \text{array}(1..12, [ ])$ > **k:=0:L:=[]:LL:=[]:P:=0:M:=0:for z in W do k:=k+1:****L:=[op(L),z]:P:=P+p[op(1,z)]:M:=M+m[op(1,z)]:print(L, `P=` , P, `M=` , M):PP[k]:=P:****MM[k]:=M:LL:= [op(LL),L] end do:** $[w_6], P=, 160, M=, 50$  $[w_6, w_{10}], P=, 325, M=, 102$  $[w_6, w_{10}, w_1], P=, 489, M=, 154$  $[w_6, w_{10}, w_1, w_4], P=, 654, M=, 208$  $[w_6, w_{10}, w_1, w_4, w_2], P=, 817, M=, 264$  $[w_6, w_{10}, w_1, w_4, w_2, w_9], P=, 981, M=, 324$

```

[w6, w10, w1, w4, w2, w9, w7], P=, 1163, M=, 394
[w6, w10, w1, w4, w2, w9, w7, w11], P=, 1330, M=, 459
[w6, w10, w1, w4, w2, w9, w7, w11, w5], P=, 1521, M=, 534
[w6, w10, w1, w4, w2, w9, w7, w11, w5, w3], P=, 1686, M=, 599
[w6, w10, w1, w4, w2, w9, w7, w11, w5, w3, w12], P=, 1854, M=, 666
[w6, w10, w1, w4, w2, w9, w7, w11, w5, w3, w12, w8], P=, 2038, M=, 750
>
> for ii from 1 to n do if Mr>=MM[ii] then
Mopt:=MM[ii]:Popt:=PP[ii]:Lopt:=LL[ii] end if: end do;
> print(`Lopt=`,Lopt,`Popt=`,Popt,`Mopt=`,Mopt);
Lopt=, [w6, w10, w1, w4, w2, w9, w7, w11, w5], Popt=, 1521, Mopt=, 534
> P1:=array(1..n, []); M1:=array(1..n, []);
PI := array(1..12, [ ])
MI := array(1..12, [ ])
> LLL:=LL[n]:i2:=1:P1[i2]:=P:M1[i2]:=M:for i from 1 to n-1 do
fmin:=10000:k:=0:for j from 1 to n do k:=k+1: if L[j]<>h then if
fmin>=p[op(1,L[j])] then fmin:=p[op(1,L[j])]:jmin:=op(1,L[j]):jj:=k: end if:
end if: end do;print(fmin,m[jmin]):L[jj]:=h:LLL:=op(LLL),L]:i2:=i2+1:M:=M-
m[jmin]:P:=P-p[jmin]:print(L,P,M);P1[i2]:=P:M1[i2]:=M: end do:
160, 50
[h, w10, w1, w4, w2, w9, w7, w11, w5, w3, w12, w8], 1878, 700
163, 56
[h, w10, w1, w4, h, w9, w7, w11, w5, w3, w12, w8], 1715, 644
164, 60
[h, w10, w1, w4, h, h, w7, w11, w5, w3, w12, w8], 1551, 584
164, 52
[h, w10, h, w4, h, h, w7, w11, w5, w3, w12, w8], 1387, 532
165, 65
[h, w10, h, w4, h, h, w7, w11, w5, h, w12, w8], 1222, 467
165, 54
[h, w10, h, h, h, h, w7, w11, w5, h, w12, w8], 1057, 413
165, 52
[h, h, h, h, h, h, w7, w11, w5, h, w12, w8], 892, 361
167, 65
[h, h, h, h, h, h, w7, h, w5, h, w12, w8], 725, 296
168, 67

```

$[h, h, h, h, h, h, w_7, h, w_5, h, h, w_8]$ , 557, 229

182, 70

$[h, h, h, h, h, h, h, w_5, h, h, w_8]$ , 375, 159

184, 84

$[h, h, h, h, h, h, h, w_5, h, h, h]$ , 191, 75

```
> for kk from n by -1 to 1 do if Mr>=M1[kk] then
Mlopt:=M1[kk]:Plopt:=P1[kk]:Llopt:=LLL[kk]: end if: end
do;print(`Llopt=`,Llopt,`Plopt=`,Plopt,`Mlopt=`,Mlopt);
      Llopt=, [h, w10, h, w4, h, h, w7, w11, w5, w3, w12, w8], Plopt=, 1387, Mlopt=, 532
> if Plopt>Popt then print(`Llopt=`,Llopt,`Plopt=`,Plopt,`Mlopt=`,Mlopt) else
print(`Lopt=`,Lopt,`Popt=`,Popt,`Mopt=`,Mopt): end if:
      Lopt=, [w6, w10, w1, w4, w2, w9, w7, w11, w5], Popt=, 1521, Mopt=, 534
>
```

A. A. БОСОВ, А. В. ГОРБОВА, Н. В. ХАЛІПОВА (ДІІТ)

## ОБҐРУНТУВАННЯ ЕВРИСТИЧНОГО АЛГОРИТМУ В ЗАДАЧІ ПРО РАНЦІ

**Вступ:** Сформована завдання про ранці в термінах функцій множини і приведений евристичний алгоритм. **Мета:** доказ того, що евристичний алгоритм є необхідною умовою. Деякі факти з роботи [2]. Показана еквівалентність граници послідовності по Е. Борелю і збіжністю по мірі. Доведено теорему про необхідність максимуму функції безлічі. **Ситуації достатності алгоритму:** Наведено три ситуації, коли евристичний алгоритм є достатнім. **Контрприклад:** Наведено контр прийме з роботи [1] і дано додавання в евристичний алгоритм, що дозволяє отримувати рішення задачі про ранці. **Векторна оптимізація:** Із завданням про ранці зав'язується завдання векторної оптимізації інвестування заходів. **Висновки:** запропоновано алгоритм рішення задачі про ранці і для адитивних функцій алгоритм визначення Парето рішення задачі векторної оптимізації за двома показниками. **Додаток:** наведена програма в середовищі Maple рішення задачі про ранці.

*Ключові слова:* задача про ранці, функції множини, векторна оптимізація, завдання інвестування

A. A. BOSOV, A. V. GORBOVA, N. V. KHALIPOVA (DIIT)

## SUBSTANTIATION OF A HEURISTIC ALGORITHM IN THE KNAPSACK PROBLEM

**Introduction:** Formed knapsack problem in terms of set functions and is a heuristic algorithm. The goal: to prove that the heuristic algorithm is essential. Some facts from [2]. The equivalence of the limit order to E. Borely and convergence in measure. The theorem about the need to set a maximum of function. **The situation is quite the algorithm:** We present three cases where a heuristic algorithm is sufficient. **Counterexample:** An Rear take from [1], and given the addition heuristic algorithm, which allows to obtain the solution of the knapsack problem. **Vector optimization:** With the knapsack problem is tied vector optimization of investment activities. **Conclusions:** The proposed algorithm for solving the knapsack problem and for additive functions algorithm for Pareto solutions of vector optimization for the two indicators. **Appendix:** an agenda for the Maple solutions knapsack problem.

*Keywords:* knapsack problem, set functions, vector optimization, the task of investing