УДК 519.1, 519.45

В. А. АНДРЮЩЕНКО, В М. ИЛЬМАН, В. И. ШИНКАРЕНКО (ДИИТ)

КОНСТРУКТИВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МУЛЬТИГРАФОВ

Запропоновано модельну схему конструювання множин мультиграфових об'єктів, вершинами яких є елементи гібридних мультимножин з унікальними ваговими навантаженнями.

Ключові слова: модельна схема, мультиграфові об'єкти, гібридні мультимножини з унікальними ваговими навантаженнями

Предложена модельная схема конструирования множеств мультиграфовых объектов, вершинами которых являются элементы гибридных мультимножеств с уникальными весовыми нагрузками.

Ключевые слова: модельная схема, мультиграфовые объекты, гибридные мультимножества с уникальными весовыми нагрузками

In the article the model scheme of sets of multigraph objects, where the tops are elements of hybrid multisets with unique weight loads, is offered.

Keywords: model scheme, multigraph objects, hybrid multiset with unique weight loads

Вступление

Задачи рациональных перевозок и размещений, прибыльности грузовых и пассажирских потоков, эффективности ремонта и обслуживания подвижного состава и другие задачи зачастую решаются с помощью машинных алгоритмов на графах.

Непосредственная машинная обработка графов возможна для относительно простых структур. Частично проблема обработки и представления графов решается с помощью матриц инциденций, смежностей и иных [1]. Однако, в реальности транспортные сети могут представляться мультиграфами, которые в общем виде не допускают матричного представления. Кроме того, в предметных областях могут возникать ряд других особенностей, которые необходимо учитывать при решении задач на графах, но недопустимых в классических графах. Так объекты технологических задач транспорта моделируемых графами могут иметь одинаковые имена вершин, и часть вершин могут быть «закрепленными», а часть – «свободными». Например, если рассматривается глобальная задача рациональных перевозок по транспортной сети, то в маршрутах движения поездов по сети некоторые станции могут быть одинаковыми. При этом узловые станции с обязательными остановками на графе транспортной сети следует принять как «закрепленные станции», а промежуточные станции с возможными остановками или возможного следования через них – как «свободные станции». Нетрудно видеть, что в этом случае модель обычного графа не подходит и следует рассматривать графовый объект представленный многоэкземплярным (многослойным) мультиграфом.

Поэтому возникает необходимость разработать унифицированную модель представления графовых объектов, на основе которой можно конструктивно строить предметные графы для решения прикладных задач транспорта.

В работе предложена модель для конструирования множеств экземпляров мультиграфовых объектов, вершинами которых являются элементы мультимножества с уникальными весовыми нагрузками. Разработка модели выполнена на произвольном символьном универсуме в три этапа. На первом этапе строится генератор гибридного класса мультимножеств и списков. На следующем – формируется иерархия уровней мультимножественных объектов (необходимых или произвольных) и выполняется их нагружение весовыми множествами. Наконец, на последнем этапе разработана модель поуровневой генерации мультиграфовых объектов. Рассмотрен пример построения многоэкземплярного мультиграфа.

Частично материалы исследований по конструктивному представлению мультиграфов применительно к экономическим сетям доложены на конференции [2].

Множественные объекты

В начале раздела, введем несколько важных для дальнейшего понятий.

Пусть E некоторый (символьный) универсум. Зададим нейтральный (пустой) символ ε, так, что $\varepsilon \in E$ и $\{\varepsilon\} = \varnothing$. Далее предположим, что задано натуральное подмножество $K \subseteq \mathbb{N}$ и пусть $K \bigcup \{\varepsilon\} = K_{\varepsilon}$.

Определение 1. Мультимножество M по Кнуту [3] – множество $A=\{a_i\}\subset E;\quad i\in I\subseteq\mathbb{N}$ с повторяющимися элементами кратности k.

Поэтому, его структуру в скобочной форме зададим в виде

$$M=\{(a_i,k_i);\ a_i\in E,\ i\in I,\ k_i\in\mathbb{N}\} \tag{1}$$

Нетрудно заметить, что из мультимножества (1) как частный случай получается обычное множество

$$M=\{(a_i,k_i);\ k_i=1,\ \forall i\in I\}=\{(a_i,1);\ i\in I\}=A.$$

Определение 2. Множество-список (*список*) есть мультимножество с определенными фиксированными местами в нем.

Список также можно представить в скобочной форме

$$\bar{M}_N=\{((a_i,m_{ij}),k_i);\ a_i\in M,\\ m_{ij}\in K_\varepsilon,\ k_i\in\mathbb{N},\ j=j_1,j_2,\ldots,j_{k_i}\}. \tag{2}$$

В списочном представлении (2) m_{ij} – порядковый номер элемента a_i в списочной последовательности или нейтральный символ, а k_i – кратность этого элемента во множестве $\bar{M}_N$.

Представление (2) может задавать связанные и не связанные списки, на основе которых по определенным операциям [4, 5] можно строить однорядные и многорядные списки, списки-деревья и другие списки.

Определение 3. Множество линейно связанных списков вида (2), назовем *списочным базисом* BS.

Пусть списки
$\bar{M}_1=\{((a_i,m_i),k_i);\ i=1,2,\ldots n_1\}$,
$\bar{M}_2=\{((a_j,m_j),k_j);\ j=n_1,\ldots,n_2\}$ и
$\bar{M}_3=\{((a_s,m_s),k_s);\ s=1,2,\ldots n_3\}$ из базиса BS.

Тогда операция конкатенации $\otimes$ списков $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$ образует однорядный список

$$\bar{M}_4=\bar{M}_1\otimes\bar{M}_2=\{((a_i,m_i),k_i);\ i=1,2,\ldots n_2\}.$$

С помощью операции конкатенации $\otimes_j$ над списками $\bar{M}_4$ и $\bar{M}_3$ по общему элементу списков a_j и последующим переименованием порядковых номеров во второй компоненте операции получим двухрядный связанный список

$$\bar{M}_4\otimes_j\bar{M}_3=\\ =\left\{\begin{matrix}((a_i,m_i),k_i);\ i=1,2,\ldots,j,\ldots,n_2;\\ ((a_s,m_s),k_s);\ s=1,2,\ldots,j,j+1,\ldots,n_3\end{matrix}\right\}.$$

Эти же операции позволяют строить списки-деревья и прочие.

Структура (2) переопределена, так как кратность элемента a_i может быть подсчитана через количество мест этого элемента в списке, поэтому в дальнейшем кратность элементов в выражении (2) явно не будем указывать. Для однообразия дальнейших представлений кратность элементов также будем опускать в выражении (1), повторяя элементы множества необходимое число раз.

Если в структуре (2) воспользоваться условием

$$\{\varepsilon\}\times E=E\times\{\varepsilon\}=E\times\varnothing=E, \tag{3}$$

то $\forall a\in E$ имеем $(a,\varepsilon)=a$. Тогда мультимножество M является частным случаем списка $\bar{M}_N$, так как места элементов в списочной конструкции становятся нейтральными.

Для конструктивного представления графов необходима единая структура, которая бы позволяла задавать мультимножества, списки или их комбинации.

Рассмотрим конструктивный объект построения таких множеств. Пусть $B=\{\delta,\sigma,\alpha,\beta,\gamma\}$ алфавит вспомогательных символов, $D=\{i,m,\tau,\alpha\}$ числовой алфавит такой, что имена его элементов i,m,τ принимают значения из натурального множества $\mathbb{N}$, а значения имени α берутся из множества K_ε и $F=\{|,,,),(,=,\{,\},\mapsto,\&,+,<,\geq\}$ алфавит специальных символов и пусть терминальное (предметное) подмножество обозначено как $A_\varepsilon\subset E$, в котором $\varepsilon\in A_\varepsilon$. Тогда формальную схему правил формирования мультимножеств (4) над множествами A_ε,B,D,F зададим с помощью логических выводов на отношениях импликации ($\Rightarrow$) и грамматических подстановок ($\rightarrow$) [5], и отображении морфизма μ [6] по операции конкатенации, для которого имеет место свойство $\mu(xy)=\mu(x)\mu(y)$.

$$S_{A_\varepsilon}=\{p_1,p_2,p_3,p_4,p_5. \tag{4}$$

Где правила p_i задаются выражениями:

$p_1:\delta\rightarrow\{\sigma\}\Rightarrow i\mapsto 0;$

$p_2:\sigma\rightarrow\varepsilon;$

$p_3:\sigma\rightarrow\gamma m\tau\sigma\Rightarrow m\mapsto 0\ \&\ \tau\mapsto k\in\mathbb{N};$

$p_4:p_{4,1}\ \&\ p_{4,2};$

$p_{4,1}: \gamma m\tau \to \beta\alpha), \gamma m\tau \,\&\, |m| < |\tau| \Rightarrow$

$$\Rightarrow m \mapsto |m|+1 \,\&\, i \mapsto |i|+1 \,\&\, \alpha \mapsto |i|\,|\varepsilon;$$

$p_{4,2}: \gamma m\tau \to \varepsilon \,\&\, |m| \geq |\tau| \Rightarrow$

$$l = \beta\alpha), \beta\alpha), \ldots \beta\alpha), \varepsilon = (\beta\alpha),)^{\tau-1} \beta\alpha), \varepsilon;$$

$p_5: \mu(l) = (\mu(\beta\alpha),))^{\tau-1} \mu(\beta\alpha), \varepsilon); (\mu(\beta\alpha),)) =$

$$= \mu(\beta)\mu(\alpha)\mu())\mu(,);$$

$\mu(\beta) = (a,; \forall a \in A_\varepsilon,$

a – фиксированное в цепочке l;

$\mu(\alpha) = |\alpha|; \mu()) =); \mu(,) = ,; \mu(,\varepsilon) = \varepsilon$.

В схеме-генераторе (4) введены обозначения: $|\tau|$ – значение имени τ, $|$ – символ «или», $\mapsto$ – символ нотационного отношения, k – размер множества (мощность).

Правило p_1 в схеме (4) всегда является начальным (первым) при любой генерации множества, все другие правила могут использоваться в произвольной последовательности. После конструирования множества по схеме (4) к его элементам применяется свойство поглощения нейтрального символа ε, т. е.

$$x\varepsilon = \varepsilon x = x. \quad (5)$$

Предложенный генератор является универсальным в том смысле, что он конструирует множества (1), (2) в форме с опущенной кратностью и больше того, может конструировать гибридные множества, составленные из списков и мультимножеств. Так сложное множество $\bar{M}_1 = \{a,(b,2),(b,3),\varepsilon,c\}$ на части $A_\varepsilon = \{a,b,c,\varepsilon\} \subset E$ может быть получено по схеме (4)–(5) в результате применения последовательности правил:

$$p_1, p_3, p_3, p_3, p_3, p_2, p_{4,1} \quad (1)$$

$$p_{4,2}, p_5(a), p_{4,1} \quad (2)$$

$$p_{4,2}, p_5(b), p_{4,1} \quad (3)$$

$$p_{4,2}, p_5(b), p_{4,1} \quad (4)$$

$$p_{4,2}, p_5(\varepsilon), p_{4,1}, \quad (5)$$

$$p_{4,2}, p_5(c), \quad (6)$$

где в скобках указаны сгенерированные элементы и их места.

Отметим, что рекурсивное правило p_3 генератора (4) частично определяет структурный уровень конструируемого множества $\bar{M}_1$.

Последовательность (6) образует конструкцию $\{(a,\varepsilon)\varepsilon,(b,2),(b,3)\varepsilon,(\varepsilon,\varepsilon)\varepsilon,(c,\varepsilon)\varepsilon\}$. Используя теперь свойство поглощения пустого символа (5) и учитывая условие (3), получим множество $\bar{M}_1$. В полученном множестве свободные элементы a, c и ε образуют мультимножество, ограниченное первым, четвертым и пятым местами их возможного расположения. Поэтому множество $\bar{M}_1$ можно записать, например, и так $\{\varepsilon,(b,2),(b,3),c,a\}$.

Определение 4. Множественным объектом $\bar{M}$ назовем конструктивное множество, сгенерированное по схеме (4).

Так как элементы мультимножеств этих гибридных объектов могут располагаться на различных свободных местах, то представление множественных объектов генератором (4) являются *многоэкземплярным*. Так для рассмотренного выше объекта $\bar{M}_1$ в схеме S_E, имеем шесть экземпляров представления

$\{a,(b,2),(b,3),\varepsilon,c\}$, $\{a,(b,2),(b,3),c,\varepsilon\}$,

$\{c,(b,2),(b,3),\varepsilon,a\}$, $\{c,(b,2),(b,3),a,\varepsilon\}$,

$\{\varepsilon,(b,2),(b,3),a,c\}$ и $\{\varepsilon,(b,2),(b,3),c,a\}$.

Очевидно, количество экземпляров представления множественного объекта определяется параметрами входящего в него мультимножества M.

Рассмотрим теперь классы введенных множественных объектов, установим некоторые их свойства и иерархию подчинения классов.

Классы множественных объектов

Определение 5. Множество всех множественных объектов, порожденных генератором S_E, образуют класс – E^*.

Утверждение 1. Конструктивный класс E^* перечислимый.

Формирование семейства мультиграфов можно выполнить на различных множественных подклассах класса E^*. Конструктивные подклассы будем выделять из класса E^* с помощью признаков-отношений сигнатуры Σ, т.е. имеем отображение $\Sigma: E^* \to \bar{M}^*$ такое, что $\bar{M}^* \prec_\Sigma E^*$. Символ $\prec_\Sigma$ определяет включение по отношениям сигнатуры. При необходимости, чтобы указать выделенный подкласс по отношениям (отношению) будем пользоваться записью $\bar{M}^*_{\Sigma}$. Рассмотрим некоторые из подклассов класса E^*, задаваемых отношениями из сигнатуры Σ.

Пусть для множеств A_i, $i \in I \subset \mathbb{N}$ имеем $A_i \subset E$ и $A_i \bigcap A_j = \varnothing$, $i \neq j$. Тогда на подмножествах A_i определено неиерархическое отношение $\rho_0^2 \in \Sigma$.

Утверждение 2. Множество $\{\bar{M}_i\}$, сгенерированное схемами S_{A_i} образует подкласс $\bar{M}^* \prec_{\rho_0} E^*$ по отношению ρ_0 такой, что для этого класса справедливо $\bar{M}_i \bigcap \bar{M}_j = \varnothing$.

Утверждение 3. Если для множеств A_i имеет место $A_i \subset A_j$, $i < j$, то введенное отношение $\rho_1^2 \in \Sigma$ определяет иерархию по включению на множественных объектах $\bar{M}_i \prec_{\rho_1} \bar{M}_j$, $i < j$.

Действительно, так как на семействе подмножеств A_i множества $A \subset E$, имеет место $A_i \subset A_j$, то схема (4) генерирует префиксные объекты (порождение объекта $\bar{M}_i$ совпадает с началом порождения объекта $\bar{M}_j$) и отношение ρ_2 является иерархическим.

Например, для множества $A_\varepsilon = \{a, b, c, \varepsilon\} \subset E$ и вышеприведенного множественного объекта $\bar{M}_1 = \{a, (b,2), (b,3), \varepsilon, c\}$ из класса E^* по отношению ρ_2 выделяется подкласс

$$\bar{M}^*_{\rho_2} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ c \\ \varepsilon \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} a \\ c \\ \varepsilon \end{pmatrix}, (b,1 \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} a \\ c \\ \varepsilon \end{pmatrix}, (b,1), (b,2) \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ c \\ \varepsilon \end{pmatrix}, (b,1), (b,2), \begin{pmatrix} \varepsilon \\ a \\ c \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} a \\ c \\ \varepsilon \end{pmatrix}, (b,1), (b,2), \begin{pmatrix} \varepsilon \\ a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ \varepsilon \\ a \end{pmatrix} \right\},$$

где скобками $\begin{pmatrix} a \\ c \\ \varepsilon \end{pmatrix}$ обозначены альтернативные элементы подмножеств, которые могут располагаться на соответствующих местах без повторений (кратность символов a, ε, c мультимножества равна – единице).

Замечание 1. Для класса $\bar{M}^*_{\rho_2}$ объекта $\bar{M}$ справедливо: 1) $\bar{M}^*_{\rho_2} \subset E^*$, 2) если $\bar{M}_i \in \bar{M}^*_{\rho_2}$ и $\exists \bar{M}_{i_j} \in \bar{M}^*_{\rho_2}; j = 1, 2, \cdots, k$; $\bar{M}_{i_1} \subset \bar{M}_{i_2} \subset \cdots \subset \bar{M}_i$, то для множественного объекта $\bar{M}_i$ имеет место *иерархия по отношению* $(\subset)$. Множественный объект $\bar{M}_{i_1}$ является *минимальным* по этому включению.

В общем случае, из класса E^* можно выделить подкласс множественных объектов на смешанных отношениях сигнатуры Σ.

Теперь, если задать множество именных весов $W = \{w_j\}$, $j \in J \subset \mathbb{N}$, $\varepsilon \in W$ и на его элементах определить отображение номинативных отношений $w_i \mapsto H$, то можно с помощью операций «приписывания» $\varphi \in \hat{O}$ нагрузить элементы множественных объектов «весами». В номинативном отображении множество H есть множества значений номинант атомарного или структурированного типа.

Формирование классов объектов и приписывание им весов (маркирование вершин графов) удобно представить формальной моделью G:

$$G = \begin{cases} \forall \rho \in \Sigma \ \& \ \exists \bar{M}_i, \bar{M}_j \in E^*, \\ \rho(\bar{M}_i, \bar{M}_j) \Rightarrow \{\bar{M}_i\} = \bar{M}^* \prec_\rho E^*; \\ \forall \bar{M}_i \in \bar{M}^*_\rho, \ \bar{M}_i = A_i \times K_\varepsilon, \\ \forall a_k \in A_i \ \& \ W_i \subset W; \\ W_i \mapsto H_i \ \& \ \varphi \in \hat{O} \Rightarrow \\ \varphi(a_k, H_i) = (a_k, H_i) \ \& \\ \{(a_k, H_i)\} \to (\bar{M}^*_\rho, H \mid W \mid \varepsilon) = \bar{M}^*_{\rho,\varphi}. \end{cases} \qquad (7)$$

Утверждение 4. Класс $\bar{M}^*_{\rho,\varphi}$ частично упорядочен по отношениям ρ и φ.

Определение 6. Множество всех множественных классов по отношениям ρ и φ называется *гибридным классом* $\bar{M}^*_{\Sigma,\Phi}$.

Утверждение 5. $\bar{M}^* \prec_{\Sigma,\hat{O}} E^*$.

Модель генерации мультиграфов

Генерацию мультиграфов зададим на гибридных классах по отношениям ρ и φ.

Для отражения зависимостей подклассов и компонент классов множества $\bar{M}^*_{\Sigma,\Phi}$ *по уровням иерархий* будем использовать символ упорядочения $(\prec)$ независимо от элементов отношений сигнатуры Σ на этих классах. То есть, если два множественных объекта $\bar{M}_1, \bar{M}_2 \in \bar{M}^*_{\Sigma,\Phi}$ находятся в отношении $\overline{M}_1 \prec \overline{M}_2$, то $\overline{M}_1$ находится на уровне предшественнике уровня со вторым объектом $\overline{M}_2$.

Пусть отношение связей X на гибридном классе $\overline{M}^*_{\Sigma,\Phi}$ определено, как $X \subset \overline{M}^*_{\Sigma,\Phi} \times \overline{M}^*_{\Sigma,\Phi} \times Z$, где Z - весовое множество связей, тогда его можно представить в виде $\overline{M}^*_{\Sigma,\Phi} \overset{Z}{\longleftrightarrow} \overline{M}^*_{\Sigma,\Phi}$. Здесь символ ($\overset{Z}{\longleftrightarrow}$) обозначает возможную прямую по иерархии уровней и обратную связи.

Теорема 1. Граф Γ на классе $\overline{M}^*_{\Sigma,\Phi}$ можно задать с помощью фактор-множества $\overline{M}^*_{\Sigma,\Phi}/X$ абстрактно, как $\left\langle \overline{M}^*_{\Sigma,\Phi}, \overline{M}^*_{\Sigma,\Phi}/X \right\rangle$ или конструктивно с помощью схемы-генератора:

$$\Gamma = \begin{cases} \forall(\rho \in \Sigma \,\&\, \varphi \in \Phi),\ \exists \overline{M}^*_i; \\ \overline{M}^*_j \in \overline{M}^*_{\Sigma,\Phi};\ \overline{M}^*_i \prec \overline{M}^*_j; \\ \overline{M}^*_1 - \textit{начальный уровень}; \\ \overline{M}^*_i - \textit{уровень предшественник}; \\ \overline{M}^*_i - \textit{уровень наследник},\ j < \#\overline{M}^*_{\Sigma,\Phi}; \\ \chi_{i,j} \subset X,\ Z_{i,j} \subset Z,\ \overline{M}_k \subset \overline{M}^*_k,\ k = i \mid j; \\ \gamma \to \varepsilon; \\ i \mapsto 0,\ j \mapsto 1; \\ j < j_{\max} \Rightarrow \gamma \to \alpha\gamma \,\& \\ (i \mapsto |i| + 1,\ j \mapsto |j| + 1 \,\& \\ \alpha \to \chi_{i,j} : \overline{M}^*_i \mid \overline{M}_i \xleftrightarrow{Z_{i,j}|Z_{ji}} \overline{M}^*_o \mid \overline{M}_o \end{cases} \tag{8}$$

Определение 7. Граф, порожденный схемой (8) назовем графовым объектом.

Генератор (8) индуктивным образом порождает множество объектов Γ^* разного типа: деревья, сети, мультиграфы и другие. Причем, так как уровнями графов есть множественные объекты, то структура отдельного графового объекта в общем – множественная, составленная из множества экземпляров. Отметим также, что предложенная модель построения графовых объектов может служить основой для конструирования соответствующих структур данных.

Итак, суммируя полученные результаты можно утверждать, что для получения множественного мультиграфа по схеме (8) необходимо задать отношения Σ, Φ, а также весовое множество Z и сконструировать определенные схемой (7) классы множественных объектов, сгенерированные в схеме (4).

В завершение статьи рассмотрим пример, демонстрирующий процесс конструктивного построения множественного графа.

Пример. На префиксном классе $\overline{M}^*_{\rho_2}$ множественного объекта

$$\overline{M} = \{(b,1), c, (b,3), b, d, (c,5), d, a\}$$

необходимо построить формальную шестиуровневую ненагруженную сеть с начальной фиксированной (закрепленной) вершиной $(b,1)$ и заключительной закрепленной вершиной $(c,5)$ и возможными связями.

Анализ множественного объекта $\overline{M}$ показывает, что он задан на множестве $A_\varepsilon = \{a, b, c, d, \varepsilon\} \subset E$ и мультиграфовый объект может иметь на классе $\overline{M}^*_{\rho_2}$ не более семи вершин, из которых три фиксированы, а четырьмя различными можно управлять, например, так чтобы маршруты сети не пересекались.

Класс $\overline{M}^*_{\rho_2}$ имеет восемь технологических уровней упорядочения.

$$\overline{M}_1 \prec \overline{M}_2 \prec \overline{M}_3 \prec \overline{M}_4 \prec \overline{M}_5 \prec \overline{M}_6 \prec \overline{M}_7 \prec \overline{M},$$

где

$$\overline{M}_1 = \{(b,1)\}, \quad \overline{M}_2 = \left\{ (b,1), \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \right\},$$

$$\overline{M}_3 = \left\{ (b,1), \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, (b,3) \right\},$$

$$\overline{M}_4 = \left\{ (b,1), \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, (b,3), \begin{pmatrix} b \\ a \\ d \\ c \end{pmatrix} \right\},$$

$$\overline{M}_5 = \left\{ (b,1), \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, (b,3), \begin{pmatrix} b \\ a \\ d \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} \right\},$$

$$\overline{M}_6 = \left\{ (b,1), \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, (b,3), \begin{pmatrix} b \\ a \\ d \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}, (c,5) \right\},$$

$$\bar{M}_7 = \left\{ (b,1), \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, (b,3), \begin{pmatrix} b \\ a \\ d \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}, (c,5), \begin{pmatrix} d \\ d \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\},$$

$$\bar{M} = \left\{ (b,1), \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}, (b,3), \begin{pmatrix} b \\ a \\ d \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}, (c,5), \begin{pmatrix} d \\ d \\ a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \\ d \\ a \end{pmatrix} \right\}.$$

Так как по условию задачи сеть не нагружена, то отношения связей X определено на декартовом произведении $\bar{M}^*_{\rho_2} \times \bar{M}^*_{\rho_2}$ своими компонентами $\chi_{i,j}$, относительно i и j уровней $i < j,\ j = 2,\ldots,6$ может выглядеть так:

$$\chi_{1,2} = \left\{ \begin{array}{c} \{(b,1)\} \\ \downarrow \\ \{(b,1),\{b,c,d\}\} \end{array} \right.,$$

$$\chi_{2,3} = \left\{ \begin{array}{ccc} \{(b,1), & (b, & d)\} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \{(b,3)\} & \{a,b,d\} & \{a\} \end{array} \right.,$$

$$\chi_{3,4} = \left\{ \begin{array}{ccccc} \{(b,1), & (a, & b, & d), & (b,3)\} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \{d\} & \{b,c\} & \{a,d\} & \{c\} & \{(b,1),(b,3)\} \end{array} \right.,$$

$$\chi_{4,5} = \left\{ \begin{array}{ccccc} \{(b,1), & (a, & b, & d), & (b,3)\} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \{a\} & \{b,c\} & \{d\} & \{c,b\} & \{b,d\} \end{array} \right.,$$

$$\chi_{5,6} = \left\{ \begin{array}{cc} \{b, & d\} \\ \downarrow & \downarrow \\ \{(c,5)\} & \{(c,5)\} \end{array} \right..$$

В приведенных отношениях, ради упрощения, компоненты уровней, не участвующие в отношениях опущены и горизонтальные межуровневые связи схемы-генератора (8) заменены вертикальными стрелками.

Анализ сети по заданным отношениям показывает, что переходы по дугам, связывающим вершины поименованные элементами мультимножества, являются альтернативно возможными. Так, попасть в заключительную вершину $(c,5)$ по сети можно через альтернативные вершины b и d, но не через вершины a или b мультиграфа. Таким образом, на заданных отношениях можем иметь не более 12 экземпляров альтернативных сетей, среди которых по определенным критериям можно выбрать лучшую.

Выводы

Предложена конструктивная модель формирования множественных объектов. Множественный объект может быть обычным множеством, мультимножеством, списком или гибридным множеством. Рассмотрены некоторые свойства множественных объектов.

Исследованы классы множественных объектов и установлена иерархия на них. Построена формальная модель формирования множественных классов нагруженных определенными весами.

На основе предложенной схемы-генератора можно строить различные мультиграфовые объекты деревья, сети и прочее.

Представленный методологический инструментарий с одной стороны позволяет формировать графовые объекты предметных областей и при разработке необходимой методики работы с такими объектами решать соответствующие задачи, с другой – может быть использован при конструировании структур данных в языках программирования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Свами, М. Графы, сети и алгоритмы [Текст] / М. Свами, К. Тхуласираман. – М.: Мир, 1984. – 380 с.
2. Андрющенко, В. О. Індуктивне представлення економічних мереж [Текст] / В. О. Андрющенко, В. М. Ільман, В. І. Шинкаренко // Проблеми економіки транспорту. 9-та Міжн. наук. конф. Тези доповідей. – Д.: ДНУЗТ, 2010. – С. 184.
3. Кнут, Д. Искусство программирования для ЭВМ [Текст] / Д. Кнут. – Т 2. – М.: Мир, 1977.– 727 с.
4. Босов, А. А. Функции множеств и их применение [Текст] / А. А. Босов. – Днепродзержинск: Изд. дом «Андрій», 2007. – 182 с.
5. Ільман, В. М. Формальні структури і їх застосування [Текст] / В. М Ільман, В. В. Скалозуб, В. І. Шинкаренко. – Д.: Вид-во ДНУЗТ, 2009. – 205 с.
6. Саломаа, А. Жемчужины теории формальных языков [Текст] / А. Саломаа. – М.: Мир, 1986. – 159 с.

Поступила в редколлегию 05.11.2010.
Принята к печати 23.11.2010.