УДК 624.071.3

О. С. РАСПОПОВ (ДІІТ)

БАГАТОВИМІРНІ МАТРИЦІ В ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ ПРОСТОРОВИХ СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ

Розглядається динаміка просторових стержневих систем з використанням теорії графів і автоматів. Показано, що структурний склад багатовимірних моделей можна задавати за допомогою просторових матриць. Розроблено ефективний алгоритм розподілення системи на блоки та кодування станів кожної з підсистем.

Рассматривается динамика пространственных стержневых систем с использованием теории графов и автоматов. Показано, что структурный состав многомерных моделей можно задавать с помощью пространственных матриц. Разработан эффективный алгоритм разделения системы на блоки и кодирования состояний каждой из подсистем.

The dynamics of spatial beam systems using the theory of graphs and automats is considered. It is shown that the structural composition of multidimensional models can be set using the spatial matrices. An efficient algorithm for the separation of the system into blocks and encoding the states of each subsystem is developed.

Основні правила і співвідношення, прийняті в ході вивчення одновимірних систем [1], узагальнені на аналогічні дво- і тривимірні стержневі системи, які подані у вигляді пересічних балок або просторових рамних каркасів.

Для просторової системи із трьох ортогональних балок побудовані зв’язні графи GRL, GRT із вхідними параметрами, що відповідають згинально-поздовжнім, згинально-крутильним коливанням пересічних балок [2]. Зв’язки між залежними граничними параметрами у вузлі H зображені на рис. 1.

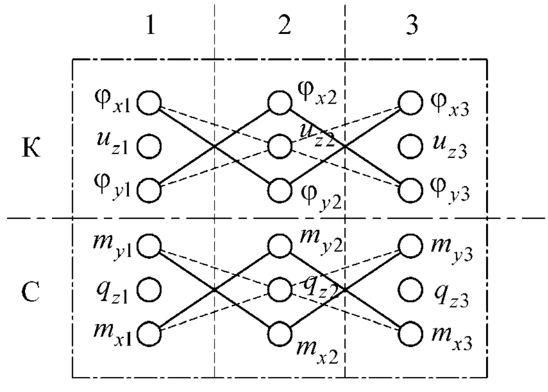

Рис. 1. Зв’язки у вузлі H графа GRT

Детальніше на рис. 2 показані зв’язки між параметрами двох будь-яких пересічних балок системи, що моделюються підграфом GT графа GRT. Кількість підграфів, а отже, і компонент графа GRT, одержаних у результаті розсічення зовнішніх зв’язків, дорівнює шести. Кожен з підграфів характеризує або згинальні, або крутильні коливання однієї з балок.

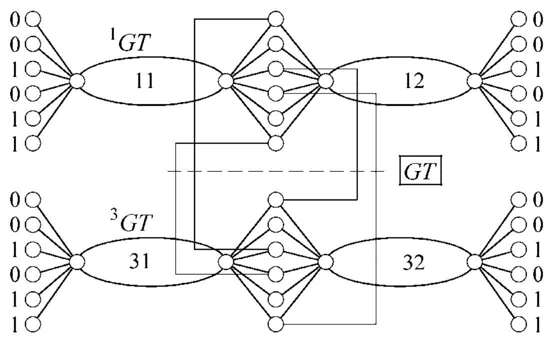

Рис. 2. Підграф системи GT

Показано, що якщо граф для одновимірних або двовимірних стержневих систем зображується на площині, то для просторових стержневих конструкцій двох вимірів недостатньо. Необхідно використовувати додаткові виміри з характерним набором змінних для граничних параметрів стержнів. Встановлено, що структурний склад таких моделей можна задавати за допомогою просторових матриць [3] на основі дослідження топологічних властивостей графа системи. Так, подача ще однієї вхідної послідовності довжиною l для автомата, що моделює коливання просторової стержневої системи, дозволяє виконати побудову тривимірної (кубічної) матриці $\Omega^z_{i_1 i_2 i_3}$ шостого порядку

$$\Omega^z_{i_1 i_2 i_3} = \left\| a_{i_1 i_2 i_3} \right\|_1^6, \; (i_1, i_2, i_3 = 1, 2, ..., 6), \qquad (1)$$

у якій усі шість перерізів орієнтації i_1 при фіксованому значенні індексу $i_1 = 1,\ 2, \ldots,\ 6$ будуть звичайними двовимірними матрицями

6-го порядку $\Omega^z_{1i_2i_3}$, $\Omega^z_{2i_2i_3}$, …, $\Omega^z_{6i_2i_3}$ ($i_2, i_3 = 1$, 2, …, 6). Кожний переріз орієнтації асоційованої просторової матриці кодується точно так, як і матриця звичайної ділянки балки [1].

Користуючись двовимірними перерізами, кубічна матриця $\Omega^z_{i_1i_2i_3}$ подана у вигляді таблиці, у якій перерізи відокремлюються вертикальними лініями

$$\Omega^z_{i_1i_2i_3} = \left\| a_{1i_2i_3} \mid a_{2i_2i_3} \mid \ldots \mid a_{6i_2i_3} \right\| \begin{array}{l} \xrightarrow{(i_1)} \\ \xrightarrow{(i_3)} \\ \downarrow (i_2) \end{array}, \qquad (2)$$

де стрілки позначають напрямки зростання порядкових номерів індексів i_1, i_2, i_3.

Досліджуються сумісні коливання системи поздовжніх і поперечних пересічних ортогональних балок, розташованих в одній площині xy [4]. Попередньо розглядається структура частотного рівняння для універсальної стосовно загальної розрахункової схеми типової *j*-ої підсистеми з різною кількістю «входів-виходів», які характеризують стани крайніх і проміжних підсистем. Потім, використовуючи принцип ортогональності, складається рівняння для всієї системи. Так, для сумісних згинальних коливань системи пересічних балок у напрямку осі z рівняння частот має вигляд

$$V\left(G_{z1}\right)\prod_{j=2}^{m-2}\Phi_{zj}\tilde{V}\left(G_{zm-1}\right) = 0, \qquad (3)$$

де $V\left(G_{z1}\right) = \Omega^{z1}_{i_2 i_3}\prod_{i=2}^{n-2}\Omega^{zi}_{i_1 i_2 i_3}\Omega^{zn-1}_{i_1 i_3}$ – одновимірна матриця напрямку i_3 (матриця-рядок) із характеристиками стержнів першої $\left(j=1\right)$ підсистеми; $\Phi_{zj} = \Omega^{z1}_{i_2 i_3 i_4}\prod_{i=2}^{n-2}\Omega^{zi}_{i_1 i_2 i_3 i_4}\Omega^{zn-1}_{i_1 i_3 i_4}$ – двовимірна матриця шостого порядку, що характеризує стани проміжних підсистем ($j = 2$, 3, …, $m-2$); $\tilde{V}\left(G_{zm-1}\right) = \Omega^{z1}_{i_2 i_4}\prod_{i=2}^{n-2}\Omega^{zi}_{i_1 i_2 i_4}\Omega^{zn-1}_{i_1 i_4}$ – матриця-стовпець напрямку i_4 з характеристиками стержнів підсистеми $m-1$.

Наведено графіки-номограми зміни частотних параметрів, отримані для регулярної системи, що має однакові довжини прогонів і погонні маси, з різними співвідношеннями згинальних жорсткостей поперечних і поздовжніх балок, а також різними значеннями параметрів i/n та j/m (рис. 3). Відзначається, що, як і у випадку багатопрогонових нерозрізних балок, отримані спектри частот мають досить вузький діапазон і послідовні зони згущення.

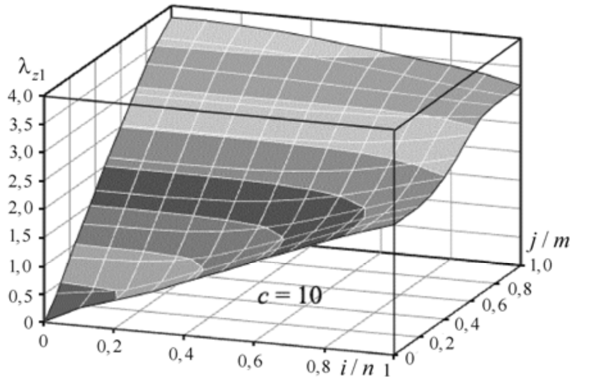

Рис. 3. Значення частотних параметрів λ_{z1} для регулярної системи балок

Для вирішення задачі кодування складної стержневої системи виконується її декомпозиція на більш прості конструктивні частини. Кожна конструктивна частина розділяється на ще дрібніші підсистеми, розміри яких визначаються можливостями кодування або наявністю вже готових для них рішень. У результаті отримано декілька рівнів *q*-вимірних підсистем, що створюють *q*-вимірні ланцюги, для декомпозиції й кодування станів яких використовуються каскадні алгоритми. Процедури кодування *k*-тої підсистеми будуються за принципом поетапного використання вхідних послідовностей, переданих від спряжуваних підсистем, що належать різним рівням. При цьому символами коду наступного рівня (ступеня) є символи коду попереднього рівня. Показано, що для підсистем одного рівня можливе використання паралельних процедур кодування. У результаті, переходячи від сукупності підсистем першого каскаду до останнього, отримуємо набір послідовних кодів, що характеризують стани всієї системи. Застосування такого алгоритму дозволяє використовувати існуючі дво- та одновимірні моделі також і для тривимірного моделювання. Сполучення кодованих підсистем і одержання топологічного рівняння системи виконується у зворотному порядку на основі принципу ортогональності.

Спочатку досліджуються можливі стани типової *k*-тої ($k = 1$, 2, …, $p-1$) підсистеми, яка одержана після розділення тривимірної стержневої системи взаємно ортогональними площинами перерізами, що проходять через центри внутрішніх прогонів балок кожного з напрямків, при послідовній зміні кодів НП, КП стержнів-стояків. Далі, з k-тої системи виділяється j_k-та підсистема, яка представляється графом GR_{yj} та ланцюжком зв'язаних підграфів GR_{y1}, GR_{y2}, …, GR_{yn-1}, що поділяються на компоненти ${}^1G_{y1}$, ${}^2G_{y1}$, ${}^3G_{\varphi 1}$, …, ${}^1G_{yn-1}$, ${}^2G_{yn-1}$, ${}^3G_{\varphi n-1}$ (рис. 4).

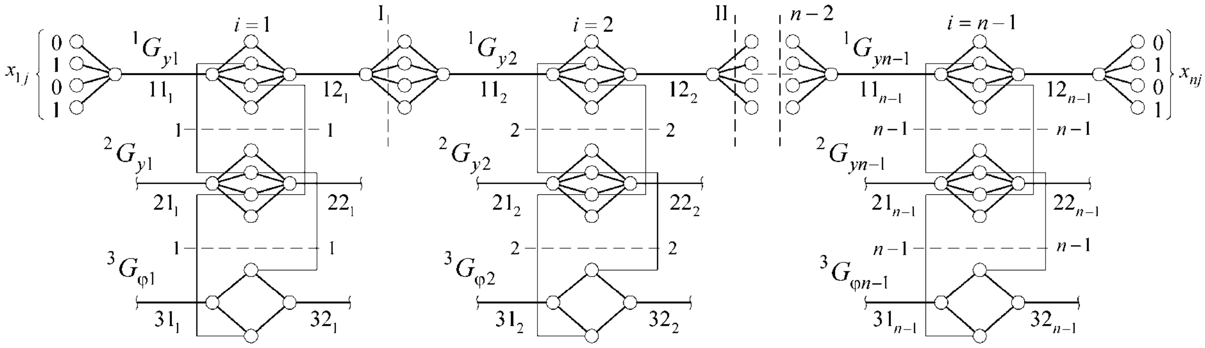

Рис. 4. Граф підсистеми GR_{yj}

Показано [4], що можливі стани системи при послідовній зміні одного з кодів стержня-стояка описуються п'ятивимірною матрицею, яка також подана у вигляді таблиці з виділенням чотиривимірних перерізів вертикальними лініями

$$\Omega^{\varphi yz}_{i_1 i_2 \ldots i_5} = \left\| a_{i_1 i_2 i_3 i_4 1} \middle| a_{i_1 i_2 i_3 i_4 2} \right\|, \tag{4}$$

$$(i_1, ..., i_4 = 1, 2, ..., 6).$$

Структура двовимірних матриць, що утворені трикратним перерізом орієнтації ($i_1\, i_2\, i_5$) при фіксованих значеннях індексів $i_1\, i_2\, i_5$, наприклад при $i_1\, i_2\, i_5 = 1$, має вигляд:

$$\Omega^{\varphi yz}_{11 i_3 i_4 1} = \left\| M_{y11} M_{y12} \quad M'_{y11} M'_{y12} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{matrix} V_{21}^{1100} \tilde{V}_{22}^{0011} & 0 \\ 0 & V_{21}'^{1100} \tilde{V}_{22}'^{0011} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} w_{31} \tilde{w}_{32}^{01} \\ w'_{31} \tilde{w}_{32}'^{01} \end{matrix} \right\|, \tag{5}$$

де нижні індекси вказують на тип коливань і номери стержнів, а верхні – коди рядків або стовпців, що відповідають асоційованим матрицям ділянки балки.

Варіювання кодів НП, КП стержня-стояка дозволило визначити ще одну координату i_6 r-вимірного простору ($r = 6$) та скласти r-вимірну матрицю $\Omega^{\varphi yz}_{i_1 i_2 \ldots i_6}$, чотиривимірні перерізи якої подані у вигляді

$$\Omega^{\varphi yz}_{i_1 i_2 i_3 i_4 \underline{i_5 i_6}} = \left\| \begin{array}{c|c} a_{i_1 i_2 i_3 i_4 11} & a_{i_1 i_2 i_3 i_4 12} \\ \hline a_{i_1 i_2 i_3 i_4 21} & a_{i_1 i_2 i_3 i_4 22} \end{array} \right\| \tag{6}$$

В [4] детально описана процедура побудови асоційованих матриць для крайніх ($k = 1,\ p-1$) та проміжних ($k = 2, 3, \ldots, p-2$) підсистем. В останньому випадку двомірна матриця шостого порядку складена таким чином:

$$F_{\varphi k} = V_k\left(G_{\varphi 1}\right) \prod_{j=2}^{m-2} \Phi_{k\varphi j} \tilde{V}_k\left(G_{\varphi m-1}\right), \tag{7}$$

де $V_k\left(G_{\varphi 1}\right)$, $\tilde{V}_k\left(G_{\varphi m-1}\right)$ – кубічні матриці крайніх ділянок ($j = 1$, $j = m-1$) k-тої підсистеми, $\Phi_{k\varphi j}$ – чотиривимірна матриця проміжних ділянок ($j = 2, 3, \ldots, m-2$):

$$V_k\left(G_{\varphi 1}\right) = \Omega^{\varphi 1}_{i_2 i_3 i_5 i_6} \prod_{i=2}^{n-2} \Omega^{\varphi i}_{i_1 i_2 i_3 i_5 i_6} \Omega^{\varphi n-1}_{i_1 i_3 i_5 i_6}; \tag{8}$$

$$\Phi_{k\varphi j} = \Omega^{\varphi 1}_{i_2 \ldots i_6} \prod_{i=2}^{n-2} \Omega^{\varphi i}_{i_1 \ldots i_6} \Omega^{\varphi n-1}_{i_1 i_3 \ldots i_6}; \tag{9}$$

$$\tilde{V}_k\left(G_{\varphi m-1}\right) = \Omega^{\varphi 1}_{i_2 i_4 i_5 i_6} \prod_{i=2}^{n-2} \Omega^{\varphi i}_{i_1 i_2 i_4 i_5 i_6} \Omega^{\varphi n-1}_{i_1 i_4 i_5 i_6}. \tag{10}$$

Аналіз структури отриманих r-вимірних матриць дозволив встановити деякі закономірності їх утворення. Так, уведення в систему додаткової залежної змінної або групи залежних змінних, відповідних одному із входів автомата, що описує коливання складної стержневої системи, додає ще один вимір в евклідовий простір і в структуру матриці Ω. Відзначена обставина дозволила запропонувати пірамідальний принцип побудови просторових асоційованих матриць, які на відміну від простих конструкцій стосуються не окремих стержнів, а окремих блоків або підблоків системи.

У загальному випадку підавтомат A, що характеризує стани проміжної (внутрішньої) підсистеми, яка має r входів, описується r-вимірною просторовою матрицею, порядок якої залежить від кількості можливих перестановок кодів відповідних вхідних змінних. Зменшення кількості «входів», наприклад для крайніх (граничних) підсистем, зменшує відповідно кількість координат r-вимірного простору. При цьому r-вимірну матрицю для всієї системи отримують у результаті послідовного добутку $(r+1)$ - та $(r+2)$ -вимірних матриць для підсистем, що її утворюють. У підсумку, на верхньому рівні «піраміди» стоїть скалярна величина, що відповідає деякій точці евклідового простору й визначається добутком векторів, які описують стан відособленої замкнутої підсистеми.

В остаточній формі рівняння частот для згинально-крутильних (згинально-поздовжніх) коливань тривимірної стержневої системи приводиться до вигляду:

$$V\left(GRT_1\right)\prod_{k=2}^{p-2} F_{\varphi k}\,\tilde{V}\left(GRT_{p-1}\right)=0\,. \qquad (11)$$

Отримані результати для матриці F, а також матриць перетворень достатньо просто узагальнюються і для унітарних просторів [5], коли елементами векторів та матриць є комплексні числа, що має місце у розрахунках дисипативних стержневих систем.

У підсумку, частотне (топологічне) рівняння просторової стержневої конструкції розглядається як послідовність одно-, дво-, три- і т. д. r-вимірних матриць, з’єднаних в одну систему. Показано можливість використання пірамідального принципу побудови таких рівнянь. На самому верхньому рівні результуюче рівняння складається з добутку одно- та двовимірних матриць системи.

Як приклад на рис. 5 наведено графікномограма зміни частотного параметра λ_{z1} для згинальних коливань шарнірно-обпертих балок, що лежать у площині xy, та поздовжніх коливань ортогональних їм балок із защемленими кінцями, розташованих уздовж осі z. За інших рівних геометричних, інерційних та жорсткісних характеристик системи різною приймалася лише відносна жорсткість c' на розтягнення-стиснення балок, паралельних осі z, а також значення параметрів i/n та j/m.

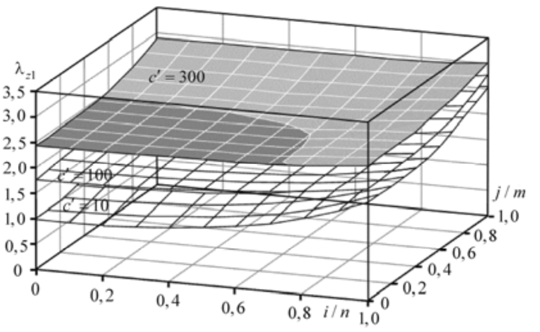

Рис. 5. Значення λ_{z1} для регулярної системи пересічних балок

Відзначається, що невеликі зміни в структурі системи або її параметрів можуть бути враховані без повторення процесу побудови загального рівняння системи. Досить побудувати асоційовані матриці для якої-небудь однієї характерної підсистеми, які будуть дійсні також для опису інших аналогічних підсистем. Показано, що без топологічних моделей і автоматів використання таких понять, як r-вимірні матриці в динамічних розрахунках стержневих систем стає значно складнішим.

За допомогою методу деформацій і скінченних тригонометричних рядів у роботі [6] отримано значні спрощення для регулярних конструкцій, які являють собою систему багатошарових пересічних балок з однаковими граничними умовами, зв’язаних між собою у вузлових точках лінійно-пружними безінерційними зв’язками. Наведені рівняння дозволяють урахувати інерцію обертання, деформації зсуву й статичні поздовжні сили, а також будь-яку кількість континуальних балок кожного з напрямків.

Таким чином, для декомпозиції дво- та тривимірних стержневих систем розроблені каскадний алгоритм розділення системи на блоки й відповідна методика каскадного кодування станів кожної з підсистем, що дозволило проводити процедуру побудови розв’язуючих рівнянь послідовно по частинах. Встановлено, що структурний склад багатовимірних моделей можна задавати за допомогою просторових матриць на основі дослідження топологічних властивостей графа системи. Розроблено пірамідальний принцип побудови асоційованих матриць. Показано, що кількість вимірів просторової матриці залежить від кількості входів автомата, що описує коливання стержневої системи, а її порядок – від кількості перестановок кодів відповідних вхідних змінних.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Распопов, А. С. Конечно-автоматное моделирование пространственных колебаний стержневых и балочных конструкций [Текст] / А. С. Распопов // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2007. – Вип. 19. – Д.: Вид-во ДНУЗТ, 2007. – С. 125-133.
2. Распопов, А. С. Применение топологических методов к расчету пространственных колебаний двух- и трехмерных стержневых систем [Текст] / А. С. Распопов // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2008. – Вип. 22. – Д.: Вид-во ДНУЗТ, 2008. – С. 117-124.
3. Соколов, Н. П. Пространственные матрицы и их приложения [Текст] / Н. П. Соколов. - М. : Физматгиз, 1960. – 300 с.
4. Распопов, А. С. Расчет многокомпонентных стержневых систем методом декомпозиции [Текст] / А. С. Распопов // Вісник. Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. - 2008. – Вип. 25. – Д.: Вид-во ДНУЗТ, 2008. – С. 105-109.
5. Сигорский, В. П. Математический аппарат инженера [Текст] / В. П. Сигорский. – К.: Техника, 1975. – 768 с.
6. Распопов, А. С. Колебания многоярусных и многопролетных регулярных рам [Текст] / А. С. Распопов, О. О. Рубан, С. А. Чернышенко // Вісник. Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. - 2009. – Вип. 27. – Д.: Вид-во ДНУЗТ, 2009. – С. 193-198.

Надійшла до редколегії 03.06.2010.
Прийнята до друку 14.06.2010.