УДК 624.071.3

А. С. РАСПОПОВ (ДИИТ)

ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ГРАФОВ И АВТОМАТОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

На основі проведеного аналізу наукової літератури відмічається, що теореми й алгоритми, які використовуються в теоріях графів і автоматів, можуть служити основою для уточнення та розвитку загальноприйнятих теорій і методів в механіці стержневих систем.

На основе проведенного анализа научной литературы отмечается, что используемые в теориях графов и автоматов теоремы и алгоритмы могут служить основой для уточнения и развития общепринятых теорий и методов в механике стержневых систем.

On the basis of conducted analysis of scientific literature it is noted that the theorems and algorithms used in theories of graphs and automata can serve as a basis for the refinement and development of generally accepted theories and methods in the mechanics of beam systems.

Наряду с традиционными методами, позволяющими рассчитывать свободные и вынужденные колебания стержневых систем, все более широкое применение находят топологические методы, связанные с исследованиями структуры графов, представляющих такие системы [1 – 8]. Появилась возможность получить эффективное средство формализации современных инженерных задач, возникающих при изучении сложных механических систем, и разработки оптимальных вычислительных алгоритмов.

В настоящее время имеется множество публикаций, посвященных приложениям теории графов в различных областях исследований. Их детальный обзор и тематическая классификация приведены в работе J. Montbrun-DiFilippo и M. Delgado [9]. Следует также назвать монографии М. Свами, К. Тхуласираман [10], В. П. Сигорского [11], Р. Басакер, Т. Саати [12], В. А. Горбатова [13], в которых излагаются как основы теории графов, так и примеры их практического применения, в частности, в задачах сетевого планирования и управления, построения систем связи и передачи информации, выбора оптимальных маршрутов и потоков в сетях, проектировании механических систем, построении электрических цепей и других. Отметим работы, в которых применялись связные графы для изучения динамики транспортных средств [14 – 16], моделирования механических систем [5, 17, 18], стержневых конструкций [8, 19 – 22], динамики твердого тела [7, 23 – 25] и др. Кроме того, графы широко используются в различных разделах математики, теории конечных автоматов и теории групп [26 – 28].

В свою очередь, конечные автоматы, являясь составной частью теории систем, применяются в самых разнообразных областях науки и техники, таких как электротехника, механика, физиология, лингвистика, а также в задачах анализа и синтеза различных технических устройств, систем и процессов, разработке программ и алгоритмов [11, 29 – 31].

O. Shai, K. Preiss [17], подводя итоги различных исследований, на примере плоской фермы, возвратно-поступательного механизма и планетарной передачи показали, что дискретные математические представления теории графов, матроидов и линейного программирования содержат элементы и структуры, изоморфные многим техническим системам. В следующей работе [18] авторы переходят к логическому выводу, имеющему важное практическое применение. Представляя элементы различных технических систем в виде математического графа, несложно определить, насколько обоснована топология данного графа и, следовательно, топология данной технической системы. Проведение такого анализа до перехода к основному статическому расчету дает явные преимущества, сокращает время на проектирование и исключает вероятность ошибки. Кроме того, дальнейшие исследования N. Ta'aseh, O. Shai [8] открывают новые перспективы для использования известных теорем сопряженных структур в механике, которые могут быть выведены из принципа теоретической двойственности графов, представляющих реальные конструкции.

F. F. Tsai, J. E. Hang [14, 15] вводят понятие топологического анализа, под которым понимается исследование структуры графа, описывающего систему твердых тел. Разработанная методика позволяет приводить граф к структуре дерева и находить пути оптимизации вычислительных процедур для расчета кинематических и динамических характеристик механической системы. Для конкретных примеров многозвенного механизма и четырехколесного экипажа получены матрицы ориентации, скорости и ускорения точек тел.

Работа Е. Г. Кузовкова, А. А. Тырымова [32] посвящена изучению возможностей графового подхода к разработке статических расчетных схем повышенной точности, в частности, при построении дискретной модели упругой ортотропной среды. Вначале среда рассекается на элементы (подграфы), имеющие известное математическое описание. Затем с помощью матриц, гарантирующих структуру графа-модели и уравнений, описывающих отдельные элементы, получают уравнения системы в целом.

Практически из той же идеи исходит метод Г. Крона [33], получивший название «диакоптика». Проводя аналогию между электрическими сетями и системами самой различной физической природы, автор с помощью топологических моделей, матричного и тензорного исчисления получает общее решение по уравнениям отдельных ее частей.

В работе В. А. Баженова, В. Ф. Оробей и др. [4] для рассчитываемой методом граничных элементов стержневой системы составляется ориентированный граф, который практически не отличается от принятой расчетной схемы и содержит номера узлов с указанием начала и конца каждого стержня. Для составления разрешающих уравнений используются топологические матрицы, связанные с переносом конечных параметров и сохраняющие свою структуру в задачах статики, динамики и устойчивости стержневых систем.

На основе применения теории графов K. Watanuki, H. Ohtaki и др. [16] предложили аналитический метод, позволяющий с помощью специальных средств компьютерной алгебры автоматизировать расчет динамических характеристик многомассовых механических систем. На примере моделей с двумя и тремя степенями свободы вычерчивается граф системы, составляются уравнения движения и рассчитываются параметры колебаний. Аналогичный подход использовали в своих работах J. J. McPhee, S. M. Redmond, P. Shi [7, 34, 35] для представления топологии системы твердых тел и составления уравнений движения с помощью специальной компьютерной программы в символьной форме.

Ma Zheng-Dong, N. Kikuchi и др. [6] методы топологической оптимизации относят к одним из самых перспективных направлений оптимального проектирования конструкций, в частности, при отыскании показателей наилучшего распределения конструкционного материала. Предлагается также использовать способ топологической оптимизации в задачах расчета собственных значений однопролетных балок и плоских рам с различными граничными условиями. Развитие этот метод получил в работах G. Guo, N. Morita, T. Torii [21], Y. Dong, H. Huang [20], в которых используется генетический алгоритм для топологической оптимизации ферменной конструкции и определения оптимальных динамических характеристик плоского четырехзвенного механизма, а также в работе K. Shea, J. Cagan, S. J. Fenves [22], где рассматривается топологическая задача оптимального проектирования стержневых конструкций с целью наилучшей группировки структурных звеньев.

Одной из важнейших проблем, возникающих при расчете колебаний стержневых и балочных конструкций на ЭВМ, является формализация ее топологии и автоматизация формирования коэффициентов системы уравнений. И. П. Осолотков, Е. К. Резников [3] для формализации топологии таких конструкций предложили выделение типовых структурных элементов (звено, связь, включение) и присвоение им векторов признаков. Эффективная методика для идентификации изоморфных графов разработана Ch.-H. Hsu, K.-T. Lam [36], где также приведен простой алгоритм перемаркировки вершин графа и получения его топологического кода.

G. Bojadziev, L. Lilov [24] представили уравнения движения системы твердых тел, которые можно разделить на две группы: первая описывает топологию, т.е. совокупность связей между подсистемами, а вторая – физические процессы, происходящие в этих подсистемах. В монографии А. И. Телегина [37] разработана методика формального составления уравнений механики систем твердых тел с помощью таблиц структурных, кинематических и массо-инерционных параметров. В результате использования теории графов K. P. Arczewski, F. A. Dul [23] получили матричное выражение для угловых скоростей отдельных твердых тел системы. Показано, что абсолютная скорость любого тела зависит от топологической структуры системы, которую удобно представить в виде системного и размерного графов. Первый определяет взаимосвязь элементов системы, а второй – прослеживает возможные переходы к основанию от каждого тела.

T. F. Brown [25] для анализа относительно простых динамических систем использует методы прямого моделирования. Такой подход приводит к тому, что специалист создает модель в виде связного графа, который раскрывает сущность конструкции и содержание самой модели, тем самым предотвращает возможность совершения разного рода ошибок и ускоряет процесс благодаря получению набора легко решаемых алгебраических уравнений. Для расчета сложных систем автор предлагает методы непрямого моделирования, основанные на расчетах энергии с помощью уравнений Лагранжа и Гамильтона, которые также совместимы с основными связными графами. Как доказательство приведены многочисленные примеры в виде плоского двухзвенного механизма, системы с переменной регулируемой массой, гиросистемы и др.

Статьи D. Karnopp [5] и B. Maschke [38] развивают предшествовавшие работы, посвященные применению связных графов к исследованию энергетических потоков в физических системах. В частности, предлагается способ построения графа при нелинейных характеристиках конечных связей, который демонстрируется для механического дифференциала при помощи полей инерции и податливости конструкции с последующим аналитическим описанием движения системы уравнениями Лагранжа и Гамильтона.

Топологические аспекты механики стержневых систем, а также основные понятия теории графов использованы А. П. Филиным, О. Д. Тананайко и др. [19] в статических расчетах строительных конструкций с применением классических методов сил и перемещений. Графовая модель и функция Грина использовались в работе М. Абдульмаджида и В. А. Прядиева [39] при расчете колебаний упругой сетки из струн, сочлененных пружинами.

Приложение булевой алгебры, математической логики и некоторых понятий теории конечных автоматов к решению плоской задачи изгибных колебаний пластин и цепных стержневых систем можно найти в работах В. Л. Рвачева [40] и Г. Н. Эйхе [41]. В первом случае для описания сложных краевых условий в расчеты вводятся специальные R-функции, которые являются функциями обычных непрерывных аргументов и обладают рядом свойств функций алгебры Буля. Во втором – применяется метод прогонки в сочетании с ассоциированными матрицами, действия над которыми сведены к простым и наглядным операциям.

А. С. Галиуллин [42], анализируя основные задачи динамики механических систем, отметил, что они как по постановке, так и по методике их решения могут быть рассмотрены в виде прямой и обратной задач теории симметрии, предполагающей существование исходного и отображенного множеств. Особенно четкое представление составляющих симметрии наблюдается в системах динамической аналогии между процессами различного физического содержания.

Как известно [43, 44], формальное сходство дифференциальных уравнений, описывающих колебательное движение механических, электрических, акустических и других систем позволяет провести динамические аналогии между ними.

К примеру, уравнения Лагранжа второго рода для электрической системы (уравнения Лагранжа-Максвелла) по аналогии «сила-напряжение» выражают второй закон Кирхгофа, а по аналогии «сила-ток» – первый. Поэтому выводы, полученные при исследовании уравнений одной системы, могут быть распространены на другие динамически аналогичные системы.

В. Ю. Бобыльченко, П. М. Чеголин [45] использовали метод электромеханических аналогий для определения собственных изгибных колебаний балок с сосредоточенными регулярными массами. Электрическая схема замещения колеблющейся балки представлена в виде четырехполюсника, а динамические уравнения – в форме метода начальных параметров, содержащие в качестве неизвестных либо углы поворота и изгибающие моменты, либо линейные перемещения и перерезывающие силы. В статье С. В. Кудинова [46] показана возможность электрического моделирования связанных изгибно-крутильных и поперечно-продольных колебаний простой балки. Проведены аналогии между уравнениями в электромагнитных цепях и дифференциальными уравнениями, полученными для механических систем. В работе Г. Крона [33] упругая балка рассматривается как шестифазная линия передачи. При этом линейные и угловые смещения балки возникают под действием приложенных сил точно так же, как и электрические токи в трехфазной линии передачи под действием приложенных напряжений.

В свою очередь, анализ электрических цепей удобно проводить с помощью теории графов [10, 12]. В этом случае соотношения между токами и напряжениями на элементах цепи вытекают из законов Кирхгофа и отношения ортогональности между цикломатической матрицей и матрицей сечений соответствующего ориентированного графа. Излагаемые в работах Ю. Г. Минкина, К. Ю. Красносельского [1, 2] методы исследования колебаний некоторых механических систем обобщают результаты, полученные в теории электрических цепей. Стержень представляется в виде двухполюсника, соединенных дугой графа. Составление дифференциальных уравнений производится по методу интегральных координат. Однако следует отметить сложность формирования разрешающей системы уравнений даже для простых конструкций, а также большой порядок получаемых матриц, включающий до нескольких тысяч строк (столбцов).

Дальнейшее развитие этого направления предложено O. Shai [47] для решения задач проектирования с помощью дискретных математических моделей. Когда различные технические системы представляются в виде одного и того же графа, существует возможность обмена информацией между ними через каналы связи. Это свойство автор использует для преобразования задач по проектированию из одной области в другую с последующим поиском решения в этой вторичной области. Как только решение найдено, оно трансформируется обратно в первоначальную задачу и возвращается в исходную область.

Как известно [33], разработанная математиками фундаментальная наука о структурах (комбинаторная топология) послужила мощным толчком в развитии теории электрических цепей. В связи с этим можно ожидать, что использование основных понятий комбинаторной топологии для анализа и расчета механических систем также будет служить развитию существующих и созданию новых более мощных методов их исследования.

Имеющийся опыт позволяет предположить, что интеграция топологических и автоматных методов наиболее перспективна по отношению к методам решения краевых задач на базе граничных интегральных уравнений [48]. В числе работ, использующих модели стержневых систем с распределенными параметрами, все чаще применяется метод граничных элементов [4, 48 – 51], который превосходит многие методы по точности получаемых результатов, простоте алгоритма, экономичности использования ресурсов ЭВМ, времени подготовки данных и времени счета и т.д. Среди упомянутых обращают на себя внимание работы отечественных ученых В. А. Баженова, В. Ф. Оробея и др. [4, 51], в которых основные соотношения метода начальных параметров используются в задачах динамики стержневых систем на качественно более высоком уровне. Дальнейшее развитие МГЭ возможно за счет решения некоторых проблем, связанных с точным учетом сосредоточенных масс и сил инерции подвижных элементов, исключением из матриц нулевых ведущих элементов, раскрытием определителей высоких порядков, а также с детальной проработкой вопросов расчета совместных колебаний двух- и трехмерных стержневых систем, учетом различных факторов реальных конструкций и других.

По результатам краткого анализа научной литературы можно отметить, что многие стержневые конструкции могут быть представлены в виде графов и автоматов, однако лишь небольшое число публикаций посвящено использованию понятий комбинаторной топологии в решении инженерных задач, возникающих при изучении сложных механических систем. Тем не менее, ряд научных исследований показывает, что используемые в теориях графов и автоматов теоремы и алгоритмы могут служить основой для уточнения и развития общепринятых теорий и методов в механике стержневых систем.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Красносельский, К. Ю. Новый алгоритм исследования динамики сложных пространственных конструкций [Текст] / К. Ю. Красносельский, Ю. Г. Минкин // Пробл. прочн. матер. и сооруж. на трансп. – 1989. – С. 49-59.
2. Минкин, Ю. Г. Топологические методы исследования колебаний некоторых механических систем [Текст] / Ю. Г. Минкин // 3-й Всесоюзн. съезд по теор. и прикл. механике: Сб. аннотац. докл. (Москва – 1968). – Изд-во АН СССР, 1968. – С. 16-20.
3. Осолотков, И. П. Матричный метод расчета динамических характеристик систем с упругими звеньями [Текст] / И. П. Осолотков, Е. К. Резников // Сб. науч. тр. Челяб. политехн. ин-та. – 1981. – № 254. – С. 74-78.
4. Строительная механика. Применение метода граничных элементов: [спец. курс] [Текст] / под ред. В. А. Баженова. – Одесса: Астропринт, 2001. – 288 с.
5. Karnopp, D. An approach to derivative causality in bond graph models of mechanical systems [Text] /

D. Karnopp // J. of the Franklin Institute. - 1992. – vol. 329, № 1. – P. 65-75.
6. Ma, Zh.-D. Topological optimization technique for free vibration problems [Text] / Zh.-D. Ma [et al.] // Trans. ASME J. Appl. Mech. – 1995. - vol. 62, № 1. – P. 200-207.
7. McPhee, J. J. On the use of linear graph-theory in multibody system dynamics [Text] / J. J. McPhee // Nonlinear Dynamics. – 1996. – vol. 9, № 1-2. – P. 73-90.
8. Ta'aseh, N. Graph theoretical duality perspective on conjugate structures and its applications [Text] / N. Ta'aseh, O. Shai // Eur. J. Mech. A. - 2005. – vol. 24, № 6. – P. 974-986.
9. Montbrun-Di Filippo, J. A survey of bond graphs: theory, applications and programs [Text] / J. Montbrun-Di Filippo, M. Delgado // J. of the Franklin Institute. – 1991. – vol. 328, № 5-6. – P. 565-606.
10. Свами, М. Графы, сети и алгоритмы [Текст] / М. Свами, К. Тхуласираман. – М.: Мир, 1984. – 455 с.
11. Сигорский, В. П. Математический аппарат инженера [Текст] / В. П. Сигорский. – К.: Техника, 1975. – 768 с.
12. Басакер, Р. Конечные графы и сети [Текст] / Р. Басакер, Т. Саати. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. – 368 с.
13. Горбатов, В. А. Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика [Текст] / В. А. Горбатов. – М.: Наука, Физматлит, 2000. – 544 с.
14. Tsai, F.-F. Real-time multibody system dynamic simulation. P. I. A modified recursive formulation and topological analysis [Text] / F.-F. Tsai, E. J. Huag // Mech. Struct. and Mach. – 1991. – vol. 19, № 1. – P. 99-127.
15. Tsai, F.-F. Real-time multibody system dynamic simulation. P. II. A parallel algorithm and numerical results [Text] / F.-F. Tsai, E. J. Huag // Mech. Struct. and Mach. – 1991. – vol. 19, № 2. - P. 129-162.
16. Watanuki, K. Automation to mechanical vibration systems [Text] / K. Watanuki [et al.] // Nihon kikai gakkai ronbunshu. C. = Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. C. – 1993. – vol. 59, № 562. – P. 1960-1965.
17. Shai, O. Graph theory representations of engineering systems and their embedded knowledge [Text] / O. Shai, K. Preiss // Artificial Intelligence in Engineering. – 1999. – № 13. – P. 273-285.
18. Shai, O. Isomorphic representations and Well-Formedness of engineering systems [Text] / O. Shai, K. Preiss // Engineering with computers. – 1999. – № 15. – P. 303-314.
19. Алгоритмы построения разрешающих уравнений механики стержневых систем [Текст] / под ред. А. П. Филина. – Л.: Стройиздат, 1983. – 232 с.
20. Dong, Y. The optimization of topology of the frame construction through the approximation of suspension points and the genetic algorithm [Text] / Y. Dong, H. Huang // Jisuan lixue xuebao = Chin. J. Comput. Mech. – 2004. – vol. 21, № 6. - P. 746-751.
21. Guo, G. Optimum dynamic design of planar linkage using genetic algorithms [Text] / G. Guo, N. Morita, T. Torii // JSME Int. J. C. – 2000. – vol. 43, № 2. – P. 372-377.
22. Shea, K. A shape annealing approach to optimal truss design with dynamic grouping of members [Text] / K. Shea, J. Cagan, S. J. Fenves // Trans. ASME. J. Mech. Des. [Trans. ASME. J. Mech., Transmiss., and Autom. Des.] – 1997. – vol. 119, № 3. – P. 388-394.
23. Arczewski, K. P. Determination of angular velocities within a multibody system by means of graphs [Text] / K. P. Arczewski, F. A. Dul // Z. angew. Math. Und Mech. – 1995. – vol. 75, Suppl. № 1. – P. 105-106.
24. Bojadziev, G. Dynamics of multicomponent systems based on the orthogonality principle [Text] / G. Bojadziev, L. Lilov // 1st Eur. Solid Mech. Conf. «EUROMECH» : Abstr. (München, 09-13 Sept. 1991). – 1991. – Sec. 1. – P. 33-34.
25. Brown, F. T. Hamiltonian and Lagrangian bond graphs [Text] / F. T. Brown // J. of the Franklin Institute. – 1991. – vol. 328, № 5-6. – P. 809-831.
26. Татт, У. Теория графов [Текст] / У. Татт. – М.: Мир, 1988. – 424 с.
27. Харари, Ф. Теория графов [Текст] / Ф. Харари. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 296 с.
28. Хопкрофт, Дж. Э. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений [Текст] / Дж. Э. Хопкрофт., Р. Мотвани, Дж. Д. Ульман. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2002. – 528 с.
29. Брауэр, В. В. Введение в теорию конечных автоматов [Текст] / В. В. Брауэр. – М.: Радио и связь, 1987. – 392 с.
30. Гилл, А. Введение в теорию конечных автоматов [Текст] / А. Гилл. – М.: Наука, 1966. – 272 с.
31. Кудрявцев, В. Б. Введение в теорию автоматов [Текст] / В. Б. Кудрявцев, С. В. Алешин, А. С. Подколзин. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. – 320 с.
32. Кузовков, Е. Г. Графовая модель упругой ортотропной среды [Текст] / Е. Г. Кузовков, А. А. Тырымов // 2-я Межресп. конф. «Мех. и технол. изделий из мет. и металлокерам. композиц. матер.» : Мат. конф. (Волгоград, 25.09-01.10.1995 г.). – 1996. – С. 95-101.
33. Крон, Г. Исследование сложных систем по частям (диакоптика) [Текст] / Г. Крон. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
34. McPhee, J. J. Modeling multibody systems with indirect coordinates [Text] / J. J. McPhee, S. M. Redmond // Computer methods in app. mech. and eng. – 2006. – vol. 195, № 50-51. – P. 6942-6957.
35. Shi, P. Dynamics of flexible multibody systems using virtual work and linear graph theory [Text] / P. Shi, J. J. McPhee // Multibody System Dynamics. – 2000. – vol. 4, № 4. – P. 355-381.

36. Hsu, Ch.-H. Topological Code of Graphs [Text] / Ch.-H. Hsu, K.-T. Lam // J. of the Franklin Institute. – 1992. – № 329. – P. 99-109.
37. Телегин, А. И. Системы твердых тел. Математическое обеспечение решения задач механики и управления [Текст] / А. И. Телегин. – Челябинск: ЧГТУ, 1995. – 202 с.
38. Maschke, B. Geometrical formulation of bond graph dynamics with application to mechanism [Text] / B. Maschke // J. of the Franklin Institute. – 1991. – vol. 328, № 5-6. – P. 723-740.
39. Абдульмаджид, М. О спектре разрывной задачи Дирихле на графе [Текст] / М. Абдульмаджид, В. Л. Прядиев // Воронеж. ун-т. – 1992. – 10 с. – Деп. в ВИНИТИ 27.07.92, № 2473-В92.
40. Рвачев, В. Л. Геометрические приложения алгебры логики [Текст] / В. Л. Рвачев. – К.: Техника, 1967. – 212 с.
41. Эйхе, Г. Н. Особенности структуры уравнений частот и форм установившихся колебаний рамных мостов и других плоских ортогональных стержневых систем [Текст] / Г. Н. Эйхе // Вопросы статики и динамики мостов: Межвуз. сб. науч. тр. – 1987. – С. 83-94.
42. Галиуллин, А. С. Симметрия и основные задачи динамики [Текст] / А. С. Галиуллин // Вестник Рос. ун-та дружбы народов. – 1999. – № 1. – С. 6-11.
43. Вибрации в технике : Справочник в 6 т. – Т. 1: Колебания линейных систем [Текст] / под ред. В. В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.
44. Яблонский, А. А. Курс теории колебаний [Текст] / А. А. Яблонский, С. С. Норейко. – М.: Высш. шк., 1975. – 248 с.
45. Бобыльченко, В. Ю. Определение собственных колебаний балок с сосредоточенными регулярными массами методом электромеханических аналогий [Текст] / В. Ю. Бобыльченко, П. М. Чеголин // Рост. гос. акад. стр-ва. – 1996. – 12 с. – Деп. в ВИНИТИ 09.08.96, № 2652-В96.
46. Кудинов, С. В. Электрическое моделирование связанных колебаний стержневых конструкций [Текст] / С. В. Кудинов // III Междунар. науч.-практ. конф. «Моделирование. Теория, методы и средства»: Мат. конф. (Новочеркасск, 11 апр. 2003 г.) – ЮРГТУ, 2003. – Ч. 5. – С. 43-45.
47. Shai, O. Design through common graph representations [Text] / O. Shai // “Design Engineering Technical Conf.” and “Computers and Information in Engineering Conf.”: DETC’03 ASME 2003: Proc. (Chicago, Illinois, USA. Sept. 02-06, 2003). – 2003. – P. 1-10.
48. Бенерджи, П. Метод граничных элементов в прикладных науках [Текст] / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
49. Барановская, Л. В. Расчет балки непрямым методом граничных элементов [Текст] / Л. В. Барановская // Проблемы прочности и надежности строительных и машиностроительных конструкций: Межвуз. сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во СГТУ, 2005. – С. 63-67.
50. Давидчак, О. Р. Динамічний розрахунок перехресно-ребристої системи на основі дискретно-неперервної моделі [Текст] / О. Р. Давидчак, Р. М. Тацій // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. – 2007. – Вип. 7. – С. 17-22.
51. Оробей, В. Ф. Расчет неразрезной балки на устойчивость и динамику численными методами [Текст] / В. Ф. Оробей, Н. Г. Сурьянинов, Д. В. Лазарева // Тр. Одес. политехн. ун-та. – 2005. – № 1. – С. 14-16.

Поступила в редколлегию 11.05.2010.
Принята к печати 20.05.2010.