УДК 531.36 : 531.312.1 : 531.311 : 531.381 : 531.215

В. Е. АРТЁМОВ (ДИИТ)

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА К ДИНАМИЧЕСКОМУ РАСЧЕТУ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

В роботі розглянуто деякі аспекти динамічного розрахунку просторових стержневих систем із використанням нелінійних диференціальних рівнянь Ейлера. Викладено методику визначення тензору інерції для вузла стержневої системи.

В работе рассмотрены некоторые аспекты динамического расчета пространственных стержневых систем с использованием нелинейных дифференциальных уравнений Эйлера. Изложена методика определения тензора инерции для узла стержневой системы.

In the article some aspects of the Euler dynamic equations applied to modeling the three-dimensional bar systems are presented.

Проблемам динамического расчета строительных конструкций посвящено достаточно большое количество научных работ и исследований, обстоятельные обзоры по которым выполнены, например, в [1 – 3]. Однако, в силу объективных причин, связанных с историей становления динамики сооружений как науки и развитием аналитических методов расчета, под термином «динамический расчет» традиционно принято понимать гармонический или частотный анализ конструкции [4].

Вместе с тем, существуют и другие методы динамического расчета механических систем, в частности, расчет во временной области, имеющий определенные преимущества по сравнению с частотными методами [5]. Он позволяет моделировать пространственную работу конструкции с учетом инерции вращения масс во времени, учитывать воздействие подвижных нагрузок, нелинейного трения и др. Суть метода сводится к последовательному выполнению следующих операций: разделение временной оси на равные интервалы; формирование уравнений движения узлов конструкции; проведение статического расчета конструкции; интегрирование уравнений движения узлов. Рассмотрим некоторые аспекты, связанные с реализацией данного подхода.

В постановке метода конечных элементов (МКЭ) статическая работа дискретной стержневой системы при заданных жесткостных и инерционных параметрах однозначно описывается состоянием ее узлов. С точки зрения вычислительной математики, расчет во временной области является итерационным процессом, который выполняется в определенные моменты времени $t_k, k = 1, 2, \ldots, k_{\max}$ и каждому моменту времени t_k будет соответствовать определенное напряженно-деформированное состояние (НДС) конструкции. Это означает, что статический расчет необходимо проводить на всем заданном интервале времени, так как параметры НДС системы, в общем случае, являются также функциями времени. Самыми длительными операциями при этом будут формирование общей матрицы жесткости и вычисление матрицы податливости МКЭ.

Для описания поступательного движения узла стержневой системы воспользуемся уравнениями движения твердого тела в векторной форме второго закона Ньютона [6]:

$$m\overline{a} = \overline{F}, \tag{1}$$

где $m, \overline{a}$ – соответственно масса и вектор линейного ускорения узла; $\overline{F}$ – главный вектор активных сил, приложенных к узлу, с учетом реакций связей.

В координатной форме уравнения (1) примут вид:

$$m\ddot{x} = F_x; \quad m\ddot{y} = F_y; \quad m\ddot{z} = F_z. \tag{2}$$

Здесь и далее точкой принято обозначение производной параметра по времени.

Даже при сложных видах нагружения процедура интегрирования уравнений (2) численными методами не представляет особых трудностей. Для этих целей может быть применен, например, метод Рунге-Кутта 4-го порядка точности [7].

Для описания вращательного движения узла будем исходить из динамических уравнений Эйлера, описывающих вращение твердого тела вокруг неподвижной точки [8]:

$$\begin{cases} J_1\dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2)\omega_2\omega_3 = M_1; \\ J_2\dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1 = M_2; \\ J_3\dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1)\omega_1\omega_2 = M_3, \end{cases} \tag{3}$$

где J_1, J_2, J_3 – главные моменты инерции массы, сосредоточенной в узле; $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – проекции угловой скорости узла; M_1, M_2, M_3 – проекции вектора главного момента сил, приложенных к узлу.

Уравнения (3) являются нелинейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, которые также называют гироскопическими уравнениями Эйлера [9]. Они описывают вращение i-го узла конструкции в системе координат $O_{e,i}$, геометрически представляемой эллипсоидом инерции (рис. 1, б). Индекс возле каждого параметра в (3) определяет направление главной оси инерции, относительно которой он рассматривается.

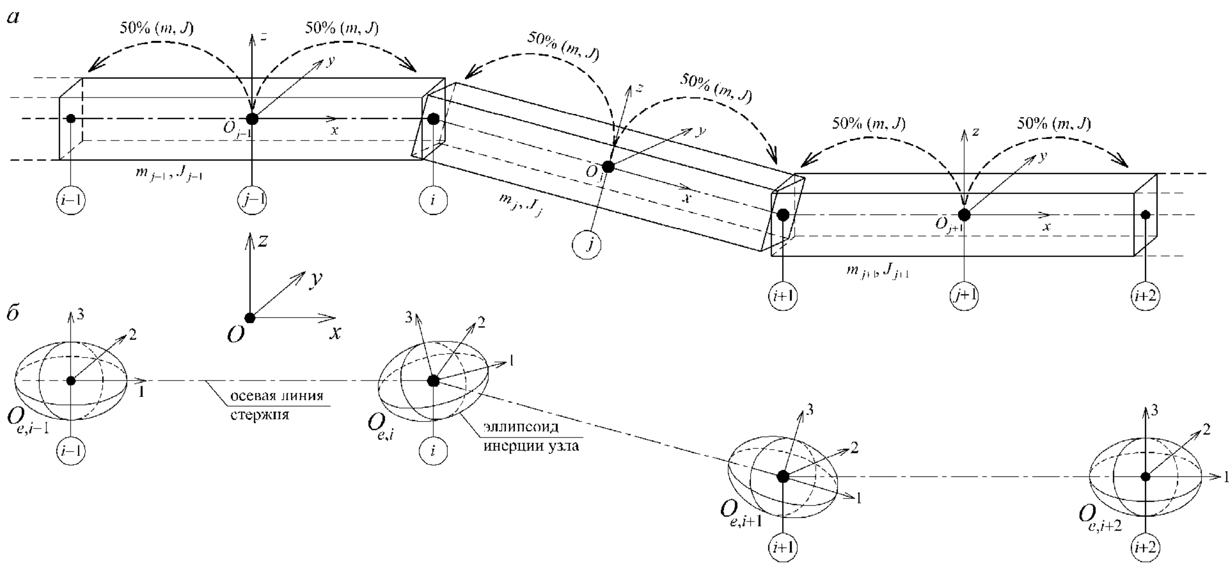

Рис. 1. Пространственная стержневая система:
а – схема распределения инерции; *б* – эллипсоиды инерции узлов

При определении инерционных характеристик узла следует помнить, что сам узел является абстрактным понятием и в реальной стержневой системе только стержень как твердое (деформируемое или недеформируемое) тело может обладать инерцией. Поэтому, по аналогии с жесткостными характеристиками, инерционные параметры j-го стержня также определяем в локальной системе координат O_j, совмещенной с центром тяжести стержня (рис. 1, а). При этом каждый узел, соединяемый стержнем, получает половину его сосредоточенной массы.

Распределение массы в твердом теле при рассмотрении вращательного движения описывается матрицей 3-го порядка – тензором инерции J [6]:

$$J = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

где J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} – осевые моменты инерции массы, а остальные элементы – центробежные моменты инерции, которые принимаются в расчетах со знаком «минус».

Форма тензора (4) пригодна для описания инерционных характеристик как отдельно взятого стержня конструкции, так и узла. В случае произвольно ориентированного стержня его тензор инерции необходимо повернуть с помощью соответствующей матрицы поворота [10] и перенести в узел, используя теорему Гюйгенса-Штейнера [6], после чего все компоненты тензора будут соответствовать осям глобальной системы координат O.

Выполнив суммирование тензоров инерции всех стержней, сходящихся в i-м узле, получим матрицу (4). Однако использовать ее компоненты в уравнениях (3) можно только для систем, обладающих симметрией во всех направлениях. Тензор в этом случае будут определять только осевые моменты инерции, и они же будут являться главными (центробежные будут равны нулю):

$$J_1 = J_{xx}; \quad J_2 = J_{yy}; \quad J_3 = J_{zz}. \tag{5}$$

Появление центробежных моментов инерции может быть вызвано различными факторами. Например, если в пространственной стержневой системе у всех элементов определены только главные моменты инерции, но хотя бы один из узлов имеет координаты $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, то в соседних узлах получим все девять ненулевых моментов инерции, или «полный» тензор (4). В этом случае для отыскания главных моментов используем кубическое уравнение – уравнение собственных значений тензора инерции [6]:

$$\begin{vmatrix} J_{xx} - J^* & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_{yy} - J^* & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_{zz} - J^* \end{vmatrix} = 0, \tag{6}$$

где J^* – один из трех искомых главных моментов инерции (корень уравнения).

Решая уравнение (6), находим величины J_1, J_2, J_3. Этот процесс также называется диагонализацией матрицы. Новый тензор, содержащий только главные моменты инерции, будет иметь вид:

$$J' = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

или в виде вектора:

$$J' = \left\{ J_1 \;\; J_2 \;\; J_3 \right\}. \tag{8}$$

Характерно, что после выполненных преобразований главные оси инерции (сопряженные диаметры эллипсоида) и оси глобальной системы координат O, в которой рассматривается движение узла, не всегда совпадут по направлению. Для нахождения главных осей инерции воспользуемся системой алгебраических уравнений [6]:

$$\left.\begin{aligned} &\left(J_{xx} - J^*\right)x - J_{xy}y - J_{xz}z = 0; \\ &-J_{yx}x + \left(J_{yy} - J^*\right)y - J_{yz}z = 0; \\ &-J_{zx}x - J_{zy}y + \left(J_{zz} - J^*\right)z = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где смысл величины J^* остается таким же, как в (6).

Последовательно подставляя в (9) вместо J^* найденные ранее значения главных моментов инерции J_1, J_2, J_3 получим три группы координат x, y, z точек, лежащих на главных осях инерции. Косинусы углов между этими векторами и осями глобальной системы координат составляют унитарную изометричную матрицу поворота $R_{e,i}$. Поворачивая с её помощью вектора (8), имеем:

$$J^{(\mathrm{o})} = R_{e,i}^T J' = \left\{ J_1^{(\mathrm{o})} \;\; J_2^{(\mathrm{o})} \;\; J_3^{(\mathrm{o})} \right\}, \tag{10}$$

где T – знак транспонирования матрицы.

Решая каждое из уравнений (3) относительно вектора углового ускорения, с учетом (10) имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\omega}_1 = \varepsilon_1; \quad \varepsilon_1 = \left[M_1 - \left(J_3^{(\mathrm{o})} - J_2^{(\mathrm{o})}\right)\omega_2\omega_3\right] / J_1^{(\mathrm{o})}; \\ &\dot{\omega}_2 = \varepsilon_2; \quad \varepsilon_2 = \left[M_2 - \left(J_1^{(\mathrm{o})} - J_3^{(\mathrm{o})}\right)\omega_3\omega_1\right] / J_2^{(\mathrm{o})}; \\ &\dot{\omega}_3 = \varepsilon_3; \quad \varepsilon_3 = \left[M_3 - \left(J_2^{(\mathrm{o})} - J_1^{(\mathrm{o})}\right)\omega_1\omega_2\right] / J_3^{(\mathrm{o})}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

В заключение следует отметить, что при моделировании динамической работы пространственной стержневой системы без учета инерции вращения узлов теряются важные нелинейные составляющие их движения. В дифференциальных уравнениях Эйлера установлена взаимосвязь между угловой скоростью и угловым ускорением узла в проекциях на главные оси инерции, что характеризует определенную связь между вертикальными, горизонтальными и крутильными колебаниями конструкции, а также распределение энергии в системе. Данный алгоритм имеет блочную структуру, адаптирован для работы с матрицами и реализован в программном комплексе Belinda [11]. В дальнейших исследованиях с помощью уравнений Эйлера планируется оценить влияние инерции вращения на пространственную динамику пролетных строений мостов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Численные методы в механике [Текст] / В. А. Баженов [и др.] – Одесса: Стандартъ, 2005. – 563 с.
2. Андрєєв, Ю. М. Розробка аналітичних комп'ютерних методів аналізу та синтезу динаміки машин [Текст] : автореф. дис. … докт. техн. наук: спец. 05.02.09 «Динаміка та міцність машин» / Ю. М. Андрєєв. – Х., 2009. - 40 с.
3. Распопов, О. С. Автоматні та топологічні методи динамічного аналізу просторових стержневих систем [Текст] : автореф. дис. … докт. техн. наук: спец. 05.23.17 «Будівельна механіка» / О. С. Распопов. – Д., 2009. - 36 с.
4. Филиппов, А. П. Колебания деформируемых систем [Текст] / А. П. Филиппов. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.
5. Математическое моделирование колебаний рельсовых транспортных средств [Текст] / В. Ф. Ушкалов [и др.]; АН УССР. Ин-т техн. механики. – К.: Наук. думка, 1989. – 240 с.
6. Никитин, Н. Н. Курс теоретической механіки [Текст] : учеб. для машиностроит. и приборостроит. спец. вузов / Н. Н. Никитин. - М.: Высш. шк., 1990. - 607 с.
7. Распопов, А. С. Воздействие подвижных нагрузок на балочный мост, моделируемый системой дискретных элементов [Текст] / А. С. Распопов, В. Е. Артемов, С. П. Русу // Стр-во, материаловед., машиностр.: Сб. науч. тр. Приднепр. гос. акад. стр-ва и арх-ры. - 2008. - Вып. 47. - С. 493-501.
8. Лурье, А. И. Аналитическая механика [Текст] / А. И. Лурье. - М.: Физматлит, 1961. - 824 с.
9. Циглер, Ф. Механика твердых тел и жидкостей [Текст] / Ф. Циглер [пер. с англ.]. - Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. - 912 с.
10. Распопов, А. С. Моделирование колебаний балочных железнодорожных мостов в среде объектно-ориентированного программирования Delphi [Текст] / А. С. Распопов, В. Е. Артемов, С. П. Русу // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. - 2010. - Вип. 33. – Д.: Вид-во ДНУЗТ, 2010. – С. 217-222.
11. Распопов, А. С. Особенности компьютерного моделирования динамической нагруженности конструкций железнодорожных мостов [Текст] / А. С. Распопов, В. Е. Артемов, С. П. Русу // Зб. наук. пр. Укр. держ. акад. залізн. трансп. – Х., 2010. - Вып. 114. - С. 123-132.

Поступила в редколлегию 11.05.2010.
Принята к печати 20.05.2010.