УДК 656.21.001.57

А. А. БОСОВ, К. В. ЕЛИСЕЕНКО (ДІІТ)

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕРЫ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Запропоновано варіант числення функцій множини та його застосування.

Предложен вариант исчисления функций множества и его применение.

The variant of calculus of functions of a set and its application are offered.

В работе [1, с. 92] сформулированы две задачи теории меры:

1. Трудная задача теории измерения.

Необходимо каждому ограниченному множеству E приписать неотрицательное число $\mu(E)$ – его меру так, чтобы были выполнены следующие условия:

1) если $E=[0,\ 1]$, то $\mu(E)=1$;

2) если множества A и B конгруэнтны, то $\mu(A)=\mu(B)$;

3) если $E=\bigcup\limits_k E_k$ и $E_i \bigcap E_j=\varnothing$ при $i \neq j$, то

$$\mu(E)=\sum_k \mu(E_k).$$

Оказывается, что эта задача неразрешима даже в пространстве R_1.

2. Легкая задача теории измерения.

В этой задаче условия 1) и 2) такие же, как и в трудной задаче, а условие 3) выполняется только для конечного числа слагаемых, т.е. если $E=\sum\limits_{k=1}^{n} E_k$ и $E_i \bigcap E_j=\varnothing$ при $i \neq j$, то

$$\mu(E)=\sum_{k=1}^{n} \mu(E_k).$$

Относительно легкой задачи имеем следующее.

Теорема (С. Банах). Легкая теория измерения разрешима для пространств R_1 и R_2, но не единственным образом.

Теорема (Ф. Хаусдарф). Для пространств R_n, где $n \geq 3$, легкая задача теории измерения неразрешима.

Отметим, что условие 2) неявно утверждает, что работаем в однородном пространстве. Последнее можно воспринимать как ограничение на «размеры» области (множества), в которой работаем.

Если мы откажемся от предположения об однородности пространства, то тогда теряет смысл и условие 1).

Пусть X является некоторым подмножеством множества Ω, а $\mathfrak{A}(X)$ – множество подмножеств множества X, причем считаем, что $\mathfrak{A}(X)$ является алгеброй [2].

Определение 1. Отображение $\mathfrak{A}(X)$ на действительную ось R будем называть функцией множества и символически записывать $\mathfrak{A}(X) \xrightarrow{F} R$, где F – правило отображения.

Среди всевозможных правил отображения выберем такое, что имеет место

$$\begin{aligned}
&1.\ \mu(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathfrak{A}(X).\\
&2.\ \text{Если } \mu(A)=0, \text{ то } A=\varnothing.\\
&3.\ \forall A, B \in \mathfrak{A}(X) \text{ имеем}\\
&\mu(A \bigcup B)=\mu(A)+\mu(B)-\mu(A \bigcap B).
\end{aligned} \tag{1}$$

Функцию множества $\mu(A)$ будем называть мерой на множестве $\mathfrak{A}(X)$.

Рассмотрим некоторые примеры.

Дискретные множества. В этом случае $\Omega=\{\omega_i,\ i=1, ..., n\}$, а $X \subset \Omega$ состоит из конечного числа точек. Пусть $|X|$ – число равное числу точек, принадлежащих X. В этом случае $\mathfrak{A}(X)$ будет содержать $2^{|X|}$ подмножеств множества X.

Каждому $x \in X$ присвоим число $p(x)>0$. В этом случае $\forall A \in \mathfrak{A}(X)$ имеем

$$\mu(A)=\sum_{x \in A} p(x). \tag{2}$$

Легко проверить, что так определенная $\mu(A)$ удовлетворяет соотношениям (1).

Однако, в общем случае существование $\mu(A)$, удовлетворяющей соотношениям (1), требует дополнительного исследования.

Рассмотрим пример [3], когда введенная мера учитывает неоднородные оси.

Определение 2. Промежутком оси считаем любые из следующих видов множеств:

1) отрезок $[\alpha, \beta]$ (концы включены);

2) интервал (α, β) (концы исключены);

3) полуинтервал $(\alpha, \beta]$ (включен правый конец);

4) полуинтервал $[\alpha, \beta)$ (включен левый конец);

5) отдельная точка $[\alpha]$.

Пусть каждому промежутку Δ на отрезке $[a, b]$ сопоставлено некоторое положительное число $\mu(\Delta)$ и выполняется условие полной аддитивности, т.е., если Δ есть объединение $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n, ...$ без общих точек, то

$$\mu(\Delta) = \sum_k \mu(\Delta_k).$$

В этом случае задана мера, аналогичная мере Стилтьеса. Заметим, что в случае, когда $\mu(\Delta)$ равна длине промежутка Δ, а если Δ – точка, то полагаем $\mu(\Delta) = 1$. Таким образом, получаем обобщение меры Лебега [4].

Определение 3. Пусть $f(x)$ определена на отрезке $[\alpha, \beta]$ и такая, что при любом c множество $\{f(x) \le c\}$ измеримо по только определенной мере, такие функции, следуя Лебегу, будем называть измеримыми.

Рассматривая конструкцию интеграла по Лебегу и данной мере, получаем, что всегда существует интеграл от измеримой функции, который будем обозначать в виде

$$\int_A f(x)\,\mu(dx),$$

где $A \subseteq [a, b]$.

Пример. Пусть $A = \{x_i \in [a, b];\ i = \overline{1, n}\}$, а функция $f(x)$ равна $f(x_i) = z_i$ и равна нулю вне точек из A, тогда интеграл от данной функции будет равен

$$\int_A f(x)\,\mu(dx) = \sum_{i=1}^{n} z_i \cdot \mu(\{x_i\}).$$

Учитывая, что $\mu(\{x_i\}) = 1$, получим

$$\int_A f(x)\mu(dx) = \sum_{i=1}^{n} z_i.$$

Если обозначить через $m(\Delta)$ меру Лебега Δ, то интеграл от данной функции по мере Лебега будет равен нулю.

Определение 4. Пусть A и $B \in \mathfrak{A}(X)$, тогда множество $A \vartriangle B$ будем называть вариацией множества A с помощью множества B, где $\vartriangle$ – симметрическая разность.

Определение 5. Множество B будем называть пределом последовательности $\{B_n\}$, $n = 1, 2, ...$, если имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \mu(B_n \vartriangle B) = 0. \qquad (3)$$

Пусть B_* является пределом по Борелю последовательности $\{B_n\}$, $n = 1, 2, ...$, тогда имеет место

Теорема 1 **[5].** Если у последовательности $\{B_n\}$ существуют пределы B_* и B, то они совпадают и из существования одного из них следует существование другого.

Определение 6. Если на любой последовательности $\{B_n\}$, сходящейся к B, имеет место

$$\lim_{n\to\infty} F(B_n) = F(B),$$

то такую функцию будем называть непрерывной.

Определение 7. Предел последовательности чисел

$$a_n = \frac{F(A \vartriangle B_n) - F(A)}{\mu(A \vartriangle B_n) - \mu(A)},\ n = 1,\ 2,\ ...$$

будем называть производной функции множества $F(A)$ на последовательности $\{B_n\}$ и записывать в виде

$$\left.\frac{dF(A)}{d\mu}\right|_{\{B_n\}} \triangleq \lim_{n\to\infty} a_n. \qquad (4)$$

Теорема 2 **[5].** Если $F(E) \le F(A)$, $\forall A \in \mathfrak{A}(X)$, то с необходимостью для непрерывной функции имеет место

$$\left.\frac{dF(E)}{d\mu}\right|_{\{B_n\} \to B \subset C} \le 0.$$

Заметим, что в случае, когда $F(A)$ – аддитивная функция, то определение (4) совпадает с определением Коши [4].

Рассмотрим задачу векторной оптимизации

$$\begin{pmatrix} F_1(A) \\ F_2(A) \end{pmatrix} \to \min$$

при условии, что функции определены и непрерывны на $\mathfrak{A}(X)$.

Определение 8. Множество $A \in \mathfrak{A}(X)$ называется эффективным, если любая его вариация одну из функций уменьшает, а другую увеличивает.

Теорема 3. Для того, чтобы множество A было эффективным, необходимо и достаточно

$$\frac{dF_1(A)}{d\mu} + t\frac{dF_2(A)}{d\mu} = 0\,, \tag{5}$$

где $t \geq 0$, а производные берутся на последовательности $\{B_n\}$, сходящейся к $B \subset A$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть A – эффективное множество, тогда

$$\Delta F_1 = F_1(A \vartriangle B_n) - F_1(A)$$

и
$$\Delta F_2 = F_2(A \vartriangle B_n) - F_2(A)$$

имеют разные знаки и получаем

$$\frac{\Delta F_1}{|\Delta F_1|} + \frac{\Delta F_2}{|\Delta F_2|} = 0\,,$$

или
$$\frac{\Delta F_1}{\Delta\mu} + \frac{\left|\dfrac{\Delta F_1}{\Delta\mu}\right|}{\left|\dfrac{\Delta F_2}{\Delta\mu}\right|}\cdot\frac{\Delta F_2}{|\Delta\mu|} = 0\,, \tag{6}$$

где

$$\Delta\mu = \mu(A \vartriangle B_n) - \mu(A)\,.$$

В силу непрерывности F_1, F_2 и μ, взяв предел в (6) на последовательности $\{B_n\}$, сходящейся к B, получаем

$$\frac{dF_1(A)}{d\mu} + t\frac{dF_2(A)}{d\mu} = 0\,, \tag{*}$$

где $t = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\Delta F_1}{\Delta\mu}\right| \Big/ \left|\dfrac{\Delta F_2}{\Delta\mu}\right|$.

Достаточность. Пусть имеет место (5), которое запишем в виде

$$\lim_{x\to\infty}\left.\left(\frac{\Delta F_1}{\Delta\mu} + \frac{\left|\dfrac{\Delta F_1}{\Delta\mu}\right|}{\left|\dfrac{\Delta F_2}{\Delta\mu}\right|}\cdot\frac{\Delta F_2}{|\Delta\mu|}\right)\right|_{\{B_n\}\to B\subset A} = 0\,,$$

или
$$\lim_{x\to\infty}\left.\left(\frac{\Delta F_1}{|\Delta F_1|} + \frac{\Delta F_2}{|\Delta F_2|}\right)\right|_{\{B_n\}\to B\subset A} = 0\,.$$

Выражение, стоящее в скобках, может быть равным –2 или 0, или 2.

Следовательно, для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно указать номер $n(\varepsilon)$, начиная с которого

$$\left|\frac{\Delta F_1}{|\Delta F_1|} + \frac{\Delta F_2}{|\Delta F_2|}\right| < \varepsilon\,.$$

Последнее означает, что, начиная с номера $n(\varepsilon)$, имеем

$$\frac{\Delta F_1}{|\Delta F_1|} + \frac{\Delta F_2}{|\Delta F_2|} = 0\,,$$

а в силу произвольности последовательности $\{B_n\}$ данное соотношение будет иметь место и для $n = 1, 2, \ldots$, что и доказывает достаточность (5).

Пример 1. Пусть

$$F_1(A) = \int_A f_1(x)\,\mu(dx)\,;$$

$$F_2(A) = 1 - \int_A f_2(x)\,\mu(dx)\,,$$

тогда

$$\left.\frac{dF_1}{d\mu}\right|_{\{B_n\}\to\{x\}\in A} = f_1(x)\,;$$

$$\left.\frac{dF_2}{d\mu}\right|_{\{B_n\}\to\{x\}\in A} = -f_2(x)$$

Из условия (*) для $\forall x \in A$ имеем

$$f_1(x) + t\cdot f_2(x) = 0\,,\ \ t \geq 0\,.$$

Решая данное уравнение относительно x, получаем $x(t)$ и, перебирая $t \geq 0$, получаем эффективные множества в параметрической форме.

Если $f_1 = x^2$, $f_2 = x$, то имеем $A = \{x : 0 \leq x \leq t\}$.

$$F_1(A) = \int_A x^2\,\mu(dx),\quad F_2(A) = 1 - \int_A x\,\mu(dx)\,.$$

Графики этих интегралов представлены на рис. 1.

Пример 2. Пусть $F_1(A)$, $F_2(A)$ такие как в примере 1, а $f_1 = x^2$ и $f_2 = (x-1)^2$, то решение уравнения (**) представляет собой

$$x_1(t) = (t - \sqrt{t})/(t-1);\ x_2(t) = (t + \sqrt{t})/(t-1);$$

тогда $A = \{x : x_1(t) \le x \le x_2(t),\ t \ge 0\}$, а поведение F_1, F_2 представлено на рис. 2.

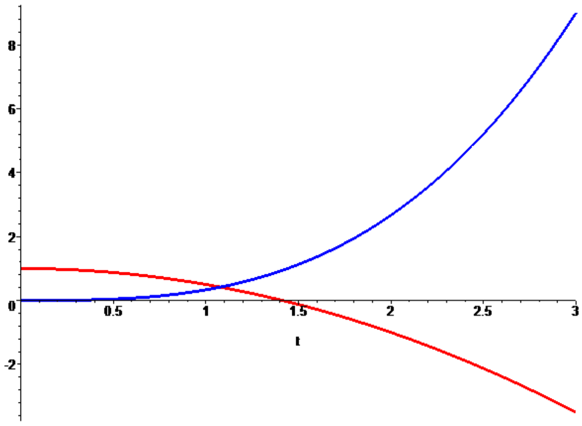

Рис. 1

$$\left.\frac{dF_1}{d\mu}\right|_{\{B_n\}\to\{x\}\in A} = f_1(x),$$

$$\left.\frac{dF_2}{d\mu}\right|_{\{B_n\}\to\{x\}\in A} = -f_2(x).$$

Из условия (*) для $\forall x \in A$ имеем

$$f_1(x) - t f_2(x) = 0,\ \ t \ge 0. \qquad (**)$$

Решая данное уравнение относительно x, получаем $x(t)$ и, перебирая $t \ge 0$, получаем эффективные множества в параметрической форме.

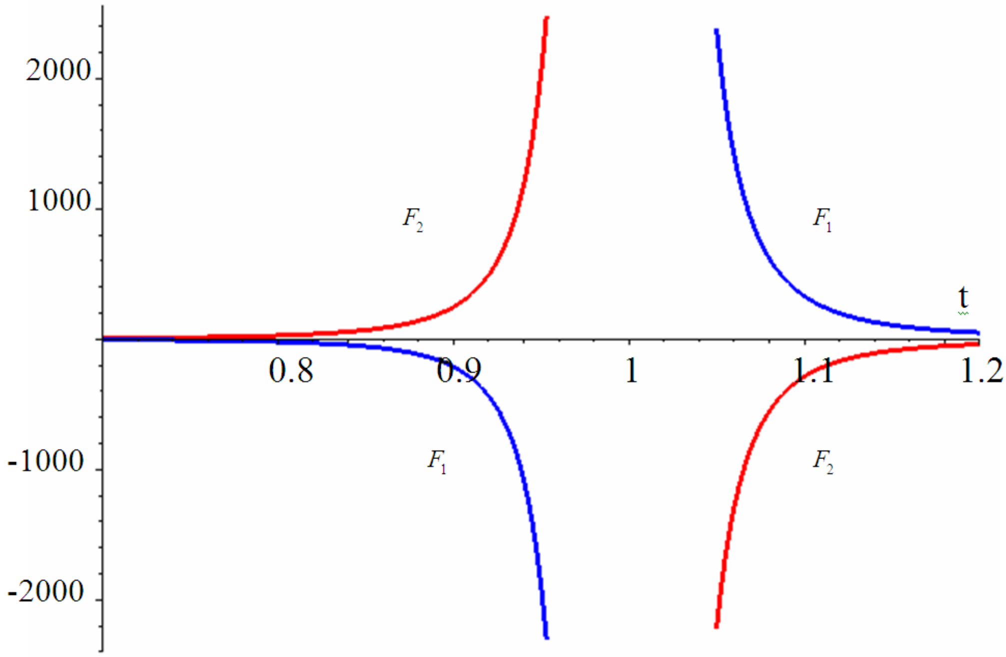

Рис. 2. График изменения F_1, F_2 в зависимости от t

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Натансон, И. П. Теория функций вещественной переменной [Текст] / И. П. Натансон. – М.: Гос. изд-во технико-теорет. лит-ры., 1957. – 552 с.
2. Ван дер Варден, Б. Л. Алгебра [Текст] / Б. Л. Ван дер Варден. – М.: Наука, 1976. – 388 с.
3. Шилов, Г. Е. Математический анализ. Специальный курс [Текст] / Г. Е. Шилов. – М.: Физматгиз, 1960. – 388 с.
4. Лебег, А. Интегрирование и отыскание примитивных функций [Текст] / А. Лебег. – М.: ГТТИ, 1934. – 324 с.
5. Босов, А. А. Функции множества и их применение [Текст] / А. А. Босов. – Днепродзержинск: Изд. дом «Андрей», 2007. – 182 с.

Поступила в редколлегию 14.06.2010.
Принята к печати 23.06.2010.