**УДК 517.9/62-50**

З. М. ГАСАНОВ (ДИИТ)

# МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Пропонується алгоритм моделювання істотно нелінійних процесів − «чорних ящиків» – за допомогою функціональних рядів. Алгоритм описаний на прикладі моделювання складних коливань, що зустрічаються в акустичній дефектоскопії.

*Ключові слова:* нелінійний процес, функціональний ряд, акустична дефектоскопія

Предлагается алгоритм моделирования существенно нелинейных процессов − «черных ящиков» – с помощью функциональных рядов. Алгоритм описан на примере моделирования сложных колебаний, встречаемых в акустической дефектоскопии.

*Ключевые слова:* нелинейный процесс, функциональный ряд, акустическая дефектоскопия

The algorithm of modeling the significantly nonlinear processes – «black boxes» – is offered. It uses functional series. The algorithm is described on the example of modeling of complex oscillations, which occur in acoustic flaw detection.

*Keywords:* nonlinear process, functional series, acoustic flaw detection

Многим функционирующим системам характерно свойство нелинейного преобразования входных воздействий. Линеаризация нелинейностей приводит обычно к удовлетворительным результатам только в узком диапазоне изменения входных сигналов, а линейная модель часто не отражает существенных свойств исследуемого объекта. При формализации закономерностей функционирования нелинейных систем можно использовать, как и в случае линейных систем, два основных типа математических моделей − модели «вход − выход» и модели в пространстве состояний. Напомним, что уравнения, показывающие взаимосвязь между значениями входных и выходных сигналов, образуют модель «вход − выход» − модель «черного ящика». Когда поведение системы описывается через обобщенные (фазовые) координаты в фазовом пространстве, то соответствующие уравнения представляют модель в пространстве состояний.

Многообразие видов нелинейностей и их структурных представлений (или отсутствие таких представлений) значительно затрудняет получение моделей нелинейных систем в пространстве состояний. Существует широкий класс объектов, для которых построение линеаризованной модели или модели в пространстве состояний не имеет смысла по причине отсутствия информации об их структуре. Такие объекты должны анализироваться как существенно нелинейные.

Для наглядности рассмотрим достаточно сложный и существенно нелинейный колебательный процесс, который возникает при дефектоскопии слоистых материалов с помощью акустического метода. Данный метод основан на возбуждении свободно затухающих упругих колебаний в контролируемом изделии. Следовательно, вся информация о состоянии контролируемой структуры заложена в импульсной переходной характеристике, рассматриваемой как реакция на однократный механический ударный импульс. Данная характеристика включает в себе комбинацию колебаний точки приложения импульса и окружающей среды (например, в условиях проведения экспериментов, описанных в работе [1]). Поэтому представляет собой характеристикой существенно нелинейного колебательного процесса с неизвестной структурой. Справедливость такого вывода подтвердили многочисленные апробации известных способов моделирования в пространстве состояний по результатам натурных экспериментов на образце «резина − сталь».

Для получения информации о качестве контролируемого изделия нужно анализировать экспериментально полученную импульсно переходную характеристику. Наиболее распространенным является метод частотного анализа [1], который дает примерно 60 % надежности.

В данной работе для получения дополнительной информации о качестве контролируемого изделия предлагается использовать метод математического моделирования. По выше приведенной причине, для этого наиболее подходящими являются модели типа «вход − выход» − модели «черного ящика». Эти модели описывают взаимосвязь между непосредственными значениями входных и выходных сигналов и не претендуют на раскрытие глубоких механизмов описываемых процессов. В нашем случае входным сигналом является удар, который приближенно можно считать импульсным сигналом. Так как однократный механический удар отличается от идеального импульсного сигнала, то реакцию объекта нельзя рассматривать как импульсную переходную функцию. В таком случае самой простой и в то же время достаточно общей является модель «черного ящика» в виде функционального ряда Вольтерра, которая часто применяется для моделирования достаточно сложных технологических процессов [2, 3].

Пусть $u(t)$ − входной сигнал (функция, описывающая удар), а $x(t)$ − выходной сигнал (реакция исследуемого образца на удар). Тогда процесс колебания можно описать функциональным рядом Вольтерра (модель Вольтерра)

$$x(t)=\omega_0+\int_0^\infty \omega_1(\tau_1)u(t-\tau_1)d\tau_1+$$
$$+\int_0^\infty\int_0^\infty \omega_2(\tau_1,\tau_2)u(t-\tau_1)u(t-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2+\ldots+$$
$$+\int_0^\infty\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty \omega_k(\tau_1\ldots\tau_k)\prod_{i=1}^{k}u(t-\tau_i)\prod_{j=1}^{k}d\tau_j\ldots, \qquad (1)$$

где $\omega_0$ − составляющая выходного сигнала, не обусловленного входным воздействием; $\omega_1(\tau_1), \omega_2(\tau_1,\tau_2), \ldots, \omega_k(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_к)$ − обобщенные весовые функции, которые обладают свойствами весовой функции $\omega(t)$ в линейной модели

$$x(t)=\int_0^\infty \omega(\tau)u(t-\tau)d\tau\,. \qquad (2)$$

Именно:

*а*) $\omega_k(\tau_1\ldots\tau_k)=0$, если $\tau_j<0,\ j\in\{1,\ldots,i\}$, $i=1,\ldots,k,\ldots;$

*б*) $\lim\limits_{\tau_j\to\infty}\omega_i(\tau_1\ldots\tau_i)=0$, где $j\in\{1,\ldots,i\}$, $i=1,\ldots,k,\ldots$ .

Таким образом, модель (1) можно рассмотреть как обобщение модели (2) линейного объекта. Начиная с третьего все последующие слагаемые в формуле (1) несут информацию о нелинейности объекта. В прикладных задачах обычно используются первые три члена ряда (1) [2, 4], т.е. нелинейная составляющая объекта выражается весовой функцией $\omega_2(\tau_1,\tau_2)$:

$$x(t)=\omega_0+\int_0^\infty \omega_1(\tau_1)u(t-\tau_1)d\tau_1+$$
$$+\int_0^\infty\int_0^\infty \omega_2(\tau_1,\tau_2)u(t-\tau_1)u(t-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2. \qquad (3)$$

Требуется по результатам измерений входного и выходного сигналов ($u^э(t)$, $x^э(t)$) определить (идентифицировать) параметр $\omega_0$ и весовые функции $\omega_1(\tau_1)$, $\omega_2(\tau_1,\tau_2)$.

Отметим, что непосредственное решение этой задачи с точки зрения математических методов является громоздким и как следствие, приводит к относительно не точным результатам. Поэтому предлагается параметризовать функции $\omega_1(\tau_1)$, $\omega_2(\tau_1,\tau_2)$. Для этого достаточно их представить в виде разложения по заданной системе опорных весовых функций. Учитывая свойства *а)*, *б)* функций $\omega_1(\tau_1)$, $\omega_2(\tau_1,\tau_2)$, систему опорных весовых функций можно составить из функций, обладающих такими же свойствами.

Обозначим через $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ систему опорных весовых функций. Тогда функции $\omega_1(\tau_1)$, $\omega_2(\tau_1,\tau_2)$ можно представить в виде:

$$\omega(\tau_1)=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_1(\tau_1),$$
$$\omega(\tau_1,\tau_2)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\varphi_i(\tau_1)\varphi_j(\tau_2). \qquad (4)$$

Тогда модель (3) получает вид:

$$x(t)=\omega_0+\sum_{i=1}^{n}c_i y_i(t)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}y_i(t)y_j(t), \qquad (5)$$

где

$$y_i(t)=\int_0^\infty \varphi_i(t)u(t-\tau)d\tau \qquad (6)$$

− реакция линейного составляющего объекта с весовой функцией $\varphi_i(t)$ на входной сигнал $u(t)$. Отметим, что из-за симметрии в двойных суммах (см. формулы (4), (5)) можно взять $i\ge j=1,\ldots,n.$ Это существенно уменьшит число идентифицируемых параметров $\omega_0$, $c_i$, $c_{ij}$, которое теперь равно

$$1+n+\frac{1}{2}n(n+1).$$

Таким образом, задача определения функций $\omega_1(\tau_1)$, $\omega_2(\tau_1,\tau_2)$ сводится к задаче параметрической идентификации.

В качестве критерия идентификации можно взять интегральную невязку

$$V(\omega_0,c_i,c_{ij})=\int_o^T[x(t)-x^э(t)]^2\,dt=$$

$$\int_o^T[\omega_0+\sum_{i=1}^n c_i y^э{}_i(t)+\sum_{i\ge j=1}^n c_{ij}y^э{}_i(t)y^э{}_j(t)-x^э(t)]^2\,dt,$$

где (см. (6))

$$y^э{}_i(t)=\int_0^T\varphi_i(t)u^э(t-\tau)d\tau\,,$$

а $T$ − время наблюдения за процессом колебания.

Для определения параметров $\omega_0$, $c_i$, $c_{ij}$ нужно решить задачу безусловной оптимизации

$$V(\omega_0,c_i,c_{ij})\to\min\,.$$

Т.к. функция $V(\omega_0,c_i,c_{ij})$ квадратичная, минимальное значение она достигает в стационарной точке, определяемой из условий

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\omega_0}V(\omega_0,c_i,c_{ij})=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial c_i}V(\omega_0,c_i,c_{ij})=0, i=1,...,n,\\ \dfrac{\partial}{\partial c_{ij}}V(\omega_0,c_i,c_{ij})=0, i\ge j=1,...,n.\end{cases}$$

Отсюда, для определения параметров $\omega_0$, $c_i$, $c_{ij}$ получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}\omega_0T+\sum\limits_{i=1}^n r_ic_i+\sum\limits_{i\ge j=1}^n r_{ij}c_{ij}=d_0,\\ \omega_0r_{km}+\sum\limits_{i=1}^n r_{ikm}c_i+\sum\limits_{i\ge j=1}^n r_{ijkm}c_{ij}=d_{km},\\ k\ge m=1,...,n,\\ \omega_0r_m+\sum\limits_{i=1}^n r_{im}c_i+\sum\limits_{i\ge j=1}^n r_{ijm}c_{ij}=d_m, m=1,...,n,\end{cases}\qquad(7)$$

где

$$r_i=\int_0^T y^э{}_i(t)dt, i=1,...,n,$$

$$r_{ij}=\int_0^T y^э{}_i(t)y^э{}_j(t)dt, i\ge j=1,...,n,$$

$$r_{ijk}=\int_0^T y_i(t)y_j(t)y_k(t)dt,$$

$$i\ge j=1,...,n, k=1,...,n,$$

$$r_{ijkm}=\int_0^T y_i(t)y_j(t)y_k(t)y_m(t)dt,$$

$$i\ge j=1,...,n, k\ge m=1,...,n,$$

$$d_0=\int_0^T x^э(t)dt, d_k=\int_0^T y_k(t)x^э(t)dt, k=1,...,n,$$

$$d_{km}=\int_0^T y_k(t)y_m(t)x^э(t)dt, k\ge m=1,...,n.$$

Если $\omega_0^0$, $c_i^0$, $c_{ij}^0$ − решение системы (7), то

$$V_{\min}=(\omega_0^0)^2T+\sum_{i\ge j=1}^n c_i^0c_j^0r_{ij}+\int_0^T(x^э(t))^2dt+$$

$$+\sum_{i\ge j=1}^n\sum_{k\ge m=1}^n c_{ij}^0c_{km}^0r_{ijkm}+2\omega_0^0\sum_{i\ge j=1}^n c_i^0r_i+$$

$$+2(\omega_0^0)^2\sum_{i\ge j=1}^n c_{ij}^0r_{ij}-2\omega_0^0d_0+$$

$$+2\sum_{i\ge j=1}^n\sum_{m=1}^n c_{ij}^0c_m^0r_{ijm}-2\sum_{i=1}^n c_i^0d_i-2\sum_{i\ge j=1}^n c_{ij}^0d_{ij}.$$

При практической реализации приведенной процедуры моделирования точность конечного результата существенно зависит от нескольких факторов:

- Во-первых, это удачная аппроксимация входного импульсного сигнала (удара)

$$u(t)=N\delta(t),$$

где $\delta(t)$ – функция Дирака, $N$ – интенсивность сигнала. Тогда

$$y^э{}_i(t)=\varphi_i(t), i=1,...,n.$$

На практике часто используются другие способы аппроксимации импульсного сигнала. Приведем некоторые из них:

а) $$u(t)=\frac{N\alpha}{\sqrt{\pi}}e^{-\alpha^2t^2}.\qquad(8)$$

где $\alpha$ – достаточно большое число. Тогда

$$y^{э}{}_i(t) = \frac{N\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_0^T \varphi_i(t) e^{-\alpha^2 (t-\tau)^2} d\tau, i = 1,...,n;$$

б) $$u(t) = \frac{N\alpha}{\pi(\alpha^2 t^2 + 1)},$$

где $\alpha$ – достаточно большое число. Тогда

$$y^{э}{}_i(t) = \frac{N\alpha}{\pi} \int_0^T \varphi_i(t) \frac{1}{\alpha^2 (t-\tau)^2 + 1} d\tau, \; i = 1, ..., n;$$

в) $$u(t) = \begin{cases} \frac{4Nt}{h^2} & \text{при } 0 \le t \le \frac{h}{2}, \\ \frac{4N(h-t)}{h^2} & \text{при } \frac{h}{2} \le t \le h, \end{cases}$$

где $h$ – достаточно малое число. Тогда

$$y^{э}{}_i(t,h) = \int_{t-\frac{h}{2}}^{t} \varphi_i(\tau) \frac{4N(t-\tau)}{h^2} d\tau +$$

$$+ \int_{t-h}^{t-\frac{h}{2}} \varphi_i(\tau) \frac{4N(h-t+\tau)}{h^2} d\tau, i = 1,...,n.$$

- Во-вторых, это удачный выбор системы опорных весовых функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)$. Их можно выбрать в зависимости от природы и свойств моделируемых процессов.

Для численных расчетов были использованы результаты экспериментов на образце «резина − сталь», представленные одним из авторов работы [1] и аппроксимация (8). Опорные весовые функции выбирались двумя способами. Сначала, при $n = 5$ в качестве функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ выбирались экспериментально полученные реакции заведомо бездефектных участков на входной импульсный сигнал. В этом случае были получены следующие результаты:

$0{,}23 \cdot 10^{-4} \le V_{\min} \le 0{,}84 \cdot 10^{-4}$ − для бездефектных участков;

$0{,}42 \cdot 10^{-3} \le V_{\min} \le 0{,}45 \cdot 10^{-3}$ − для дефектных участков.

Как видно из этих результатов, значения невязки моделирования $V_{\min}$ для бездефектных участков существенно (примерно на порядок меньше) отличается от ее значений для дефектных участков.

Примерно такой же результат получен в случае, когда в качестве опорных весовых функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ были применены импульсные переходные характеристики колебательного процесса второго порядка при различных значениях коэффициента затухания

$$\xi_1 = 0{,}01; \xi_2 = 0{,}02; \xi_3 = 0{,}03; \xi_4 = 0{,}04;$$
$$\xi_5 = 0{,}05;$$

$$\varphi_i(t) = \frac{N\omega}{\sqrt{1-\xi_i^2}} e^{\xi_i \omega t} \sin(\omega t \sqrt{1-\xi_i^2}),$$

где $\omega$ − частота собственного колебания. В этом случае были получены следующие результаты:

$V_{\min} \cong 0{,}35 \cdot 10^{-4}$ − для бездефектных участков;

$V_{\min} \cong 0{,}46 \cdot 10^{-3}$ − для дефектных участков.

Результаты численных расчетов в обоих случаях получены при аппроксимации (8). Таким образом, модель (3) достаточно точно описывает процесс акустического колебания в композитном изделии в смысле малости невязки $V_{\min}$.

Кроме того, невязка $V_{\min}$ может быть использована как информативный параметр при дефектоскопии узлов промышленных объектов акустическим методом. На железнодорожном транспорте данный метод дефектоскопии применяется, например, при диагностике рельсов для обнаружения трещин.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мозговой, А. Г. Фазочастотный акустический метод дефектоскопии слоистых изделий из полимерного материала [Текст] / А. Г. Мозговой, А. М. Ахметшин, Д. А. Рапопорт // Дефектоскопия. – 1988. – № 4.
2. Каминскас, В. Идентификация динамических систем по дискретным наблюдениям [Текст] / В. Каминскас. − Вильнюс: Мокслас, 1985. − 152 с.
3. Растригин, Л. А. Введение в идентификацию объектов управления [Текст] / Л. А. Растригин, Н. Е. Маджаров. − М.: Энергия, 1977. − С. 214.
4. Александровский, Н. М. Адаптивные системы автоматического управления сложными технологическими процессами [Текст] / Н. М. Александровский, С. В. Егоров, Р. Е. Кузин. − М.: Энергия, 1973. − 272 с.

Поступила в редколлегию 11.03.2010.
Принята к печати 23.03.2010.