

Й. Й. ЛУЧКО (ДІТ), Є. Г. ІВАНІК, В. М. СЕМЕРАК (Львівський національний аграрний університет)

## МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ПРОЦЕСУ ТЕПЛОУТВОРЕННЯ ПРИ ВЗАЄМОДІЇ КОЛЕСА ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТНОГО ЗАСОБУ І РЕЙКИ

В квазістаціонарному наближенні побудовано розв'язок двовимірної задачі теплопровідності для півпростору, який нагрівається по граничній поверхні швидкорухомою зоною тепла. При певних умовах дана задача моделює теплоутворення від тертя у залізничній трибосистемі «колесо-рейка».

*Ключові слова:* трибосистема «колесо-рейка», двовимірна задача теплопровідності для півпростору, квазістаціонарне наближення

В квазістаціонарному приближенні построено решение двумерной задачи теплопроводности для полупространства, нагреваемое по граничной поверхности быстро движущейся зоной нагрева. При определенных условиях рассматриваемая задача моделирует теплообразование от трения в железнодорожной системе «колесо-рельс».

*Ключевые слова:* трибосистема «колесо-рельс», двухмерная задача теплопроводности для полупространства, квазістаціонарне приближення

Temperature fields of components in relative sliding motion of the wheel-rail system can be analysed on the quasistationary approach.

*Keywords:* wheel-rail tribosystem, 2D heat conduction problem for half-space, quasistationary approach

### Постановка проблеми

Основою розрахунків на зносостійкість та зношування елементів тертя залізничних транспортних систем є розв'язання теплових задач тертя.

Теплоутворення від дії сил тертя внаслідок проковзування колеса по рейці призводить до нагрівання контактуючих тіл. Оскільки експериментальний замір температури в системі «колесо-рейка» є технічно складною проблемою, то виникає необхідність кількісної оцінки її величини на основі того чи іншого аналітичного методу.

### Аналіз досліджень і публікацій з даної проблематики

Традиційно дослідники проблеми розрахунку теплових процесів, що мають місце в елементах тертя залізничних транспортних засобів, використовують розв'язок двовимірної квазістаціонарної задачі теплопровідності для півпростору по поверхні якого рухається локально-розподілена зона нагріву [1, 2]. Але точний розв'язок такої задачі можливий лише у випадку рівномірно-розподіленого тиску в зоні контакту. Тому актуальною є задача розвитку чисельно-аналітичних схем розрахунку процесів теплоутворення в зоні контакту залізничне ко-

лесо-рейка. Відповідні підходи до вирішення даної проблеми представлено у працях [3, 4].

### Постановка завдання

Застосуємо кусково-лінійну апроксимацію [5] контактної тиску, а, отже, інтенсивності фрикційного теплового потоку, в моделюванні взаємодії колеса і рейки, для чого розглянемо круговий циліндр радіуса  $R$  (колесо), що котиться з сталюю швидкістю  $V$  по поверхні півпростору (рейка) і втискується в нього зі сталюю силою  $P$ . При цьому в ділянці співдотику колеса з рейкою відбувається мікропроковзування з швидкістю  $V_s$  [6]. Ковзання супроводжується тепловиділенням, яке у вигляді теплових потоків перерозподіляється між взаємодіючими елементами (колесом і рейкою).

Виходимо з того, що: 1) ділянка проковзування є смугою ширини  $2a$ , малою порівняно з радіусом колеса чого колеса; 2)  $V_s = sV$  ( $1\% < s < 2\%$ ); 3) інтенсивність фрикційного теплового потоку, направлено в рейку, визначається залежністю

$$q(x) = \lambda f V_s p(x), \quad (1)$$

де  $\lambda$  – коефіцієнт розподілу теплових потоків;  $f$  – коефіцієнт тертя;  $p(x)$  – розподіл контак-

тного тиску;  $x$  – декартова координата; на підставі експериментальних даних [3] можна вважати  $\lambda = 0,5$ ; 4) теплообміном з оточуючим середовищем на вільних поверхнях рейки знехтуємо; 5) фізико-механічні властивості матеріалу рейки не залежать від температури; 6) припускаємо, що взаємодія колеса і рейки відбувається в режимі високошвидкісного фрикційного нагріву.

### Виклад основного матеріалу досліджень

В квазістаціонарному режимі високошвидкісного фрикційного нагріву ( $V \geq 25$  м/с) задача зводиться до знаходження розв'язку рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{V_s}{k} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad |x| < \infty, \quad y > 0 \quad (2)$$

за граничних умов

$$K \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \begin{cases} -q(x), & 0 \leq x \leq 2a, \\ 0, & x \in ]-\infty; 0[ \cup ]2a; \infty[, \end{cases}$$

$$T \rightarrow 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty. \quad (3)$$

У співвідношеннях (2), (3)  $T(x, y)$  – температурне поле;  $K, k$  – коефіцієнти тепло- і температуропровідності відповідно.

Оскільки у режимі високошвидкісного нагрівання зміною градієнта в напрямку ковзання можна знехтувати, то гранична задача (2), (3) шляхом введення безрозмірних змінних  $\xi = \frac{x}{2a}$ ,  $\eta = \frac{y}{d}$  і параметрів  $p^*(\xi) = \frac{p(x)}{p_0}$ ,  $p_0 = \frac{P}{2a}$ ,  $\Lambda = \frac{\lambda f V_s p_0 d}{K}$ ,  $d = \sqrt{\frac{2ak}{V_s}}$  зводиться до вигляду

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} = \frac{\partial T}{\partial \xi}, \quad |\xi| < \infty, \quad \eta > 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \begin{cases} -\Lambda p^*(\xi), & 0 \leq \xi \leq 1, \\ 0, & \xi \in ]-\infty; 0[ \cup ]1; \infty[, \end{cases}$$

$$T \rightarrow 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \eta} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Розв'язок граничної задачі, отриманий з використанням інтегрального перетворення Фур'є по змінній  $\xi$ , можна подати так:

$$T(\xi, \eta) = \frac{\Lambda}{\sqrt{\pi}} \int_0^b G(\xi - \tau, \eta) p^*(\tau) d\tau, \quad (6)$$

де  $G(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{\xi}} e^{-\frac{\eta^2}{4\xi}}$  – функція Гріна задачі (4)-(5);  $b = \begin{cases} 0, & -\infty < \xi < 0, \\ \xi, & 0 \leq \xi \leq 1, \\ 1, & 1 < \xi < \infty. \end{cases}$

Проміжок інтегрування  $[0; b]$  у виразі для температури (6) покриємо рівномірною сіткою:  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{n-1} < \tau_n = b$ ,  $\tau_i = i\delta\tau$ ,  $\delta\tau = \frac{b}{n}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ . Поставимо у відповідність кожному вузлу  $\tau_i$  наступну функцію [5]:

$$\varphi_0(\tau) = \begin{cases} (\tau_1 - \tau) / \delta\tau, & \tau \in [\tau_0; \tau_1], \\ 0, & \tau \notin [\tau_0; \tau_1]; \end{cases}$$

$$\varphi_n(\tau) = \begin{cases} (\tau - \tau_{n-1}) / \delta\tau, & \tau \in [\tau_{n-1}; \tau_n], \\ 0, & \tau \notin [\tau_{n-1}; \tau_n]; \end{cases}$$

$$\varphi_i(\tau) = \begin{cases} (\tau - \tau_{i-1}) / \delta\tau, & \tau \in [\tau_{i-1}; \tau_i], \\ (\tau_{i+1} - \tau) / \delta\tau, & \tau \in [\tau_i; \tau_{i+1}], \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \\ 0, & \tau \notin [\tau_{i-1}; \tau_{i+1}]; \end{cases}$$

Введені функції  $\varphi_i(\tau)$  використаємо для наближення контактного тиску  $p^*(\tau)$  у такому поданні:

$$p^*(\tau) = \sum_{i=0}^n p_i^* \varphi_i(\tau). \quad (7)$$

У поданні (7)  $p_i^* = p^*(\tau_i)$ . Рівномірна похибка апроксимації виду (7) з використанням функцій класу  $C^2([0; b])$  має порядок  $O((\delta\tau)^2)$  [5].

Враховуючи подання (7) вираз (6) для температурного розподілу, як результат фрикційного тепловиділення, матиме вигляд

$$T(\xi, \eta) = \frac{\Lambda}{\delta\tau\sqrt{\pi}} \sum_{i=0}^n p_i^* G_i(\xi, \eta) H(\xi), \quad (8)$$

$$G_0(\xi, \eta) = \tau_1 G_1^{(0)}(\xi, \eta) - G_1^{(1)}(\xi, \eta),$$

$$G_i(\xi, \eta) = G_i^{(1)}(\xi, \eta) - \tau_{i-1} G_i^{(0)}(\xi, \eta) + \\ + \tau_{i+1} G_{i+1}^{(0)}(\xi, \eta) - G_{i+1}^{(1)}(\xi, \eta), \quad i = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$G_n(\xi, \eta) = G_n^{(1)}(\xi, \eta) - \tau_{n-1} G_n^{(0)}(\xi, \eta),$$

$$G_i^{(0)}(\xi, \eta) = -2\sqrt{\xi - \tau_i} e^{-\frac{\eta^2}{4(\xi - \tau_i)}} + \\ + 2\sqrt{\xi - \tau_{i-1}} e^{-\frac{\eta^2}{4(\xi - \tau_{i-1})}} - \\ - \eta\sqrt{\pi} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\xi - \tau_i}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\xi - \tau_{i-1}}}\right) \right],$$

$$G_i^{(1)}(\xi, \eta) = \frac{2}{3}(\xi - \tau_i)^{3/2} e^{-\frac{\eta^2}{4(\xi - \tau_i)}} - \\ - \frac{2}{3}(\xi - \tau_{i-1})^{3/2} e^{-\frac{\eta^2}{4(\xi - \tau_{i-1})}} + \left( \frac{\eta^2}{6} + \xi \right) G_i^{(0)}(\xi, \eta),$$

$H(\xi)$  – функція Гевісайда [7];  $\operatorname{erf}(\cdot)$  – функція помилок Гаусса.

Для повного вирішення питання щодо знаходження поля температур, яке розвивається внаслідок взаємодії елементів залізничної пари, необхідно знати інтенсивність фрикційного теплового потоку (1), яка *a priori* невідома. Використаємо з цією метою розв'язок плоскої контактної задачі для півпростору, по поверхні якого рівномірно ковзає параболічний штамп [8]. Тоді, за умови повного проникнення тепла в нерухоме тіло, матимемо залежності

$$p^*(\tau) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha \beta} \tau^\alpha (1 - \tau)^\beta, \quad 0 \leq \tau \leq 1, \\ \beta = 1 - \alpha, \quad 0 < \alpha, \beta < 1, \quad (9)$$

$$\text{причому } \alpha = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{f|B-A|}\right);$$

$$B = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}; \quad A = \frac{2\delta_* k \mu}{1-\mu}; \quad \delta_* = \frac{\alpha_t(1+\nu)}{K};$$

$\alpha_t$  – коефіцієнт лінійного розширення;  $\mu$  – модуль зсуву;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

Тоді півширину ділянки контакту можна визначити на основі залежності  $a = \sqrt{\frac{PR(1-\nu)}{2\pi\alpha\beta}}$ .

Параметр  $A$ , який входить у вираз (9) для контактної тиску, характеризує вплив фрикційного нагрівання на розподіл контактної тиску. Як часткові випадки для різних значень  $A$ ,  $f$ , отримуються розв'язки відповідних задач: якщо  $A=0$ , то це відповідає плоскій задачі теорії пружності для півпростору, на граничній поверхні якого діють дотичні напруження, пов'язані з нормальними згідно закону Амонтона; у випадку  $f=0$  або  $A=B$  приходимо до еліптичного розподілу контактної тиску двовимірного аналога класичної задачі Герца [6].

Числовий розрахунок на основі алгоритму, визначеного залежностями (8)-(9), здійснювався виходячи з критерію, що кількість доданків  $n$  у формулі (9) вибирається з умови досягнення відносної похибки обчислень, що не перевищує 1 %.

Числові дослідження виконано для пари тертя «колесо-рейка» за таких параметрів, наведених в роботі [9]:  $R=0,5$  м;  $P=10$  МПа/м;  $V=75$  м/с;  $\mu=80,8$  ГПа;  $\nu=0,3$ ;  $K=41$  Вт/м·К;  $k=9,1 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с;  $\alpha_t=10^{-5}$  К<sup>-1</sup>.

На рис. 1 показано вплив коефіцієнта проковзування  $s$  на розподіл поверхневої температури (рівень температури на поверхні рейки). Розрахунки за формулою (9) при фіксованому значенні коефіцієнта тертя  $f=0,3$  дали такі результати:  $A=0,666$ ;  $a=5,3$  мм;  $p_0=0,95$  ГПа;  $\alpha=0,464$ ;  $\beta=0,536$ . Встановлено, що максимальна температура  $T_{\max}$  досягається всередині ділянки контакту в точці з координатою  $x_{\max}=7,69$  мм і рівна 70 °С; 221 °С; 313 °С для  $s=0,1\%$ ;  $s=1\%$ ;  $s=2\%$  відповідно.

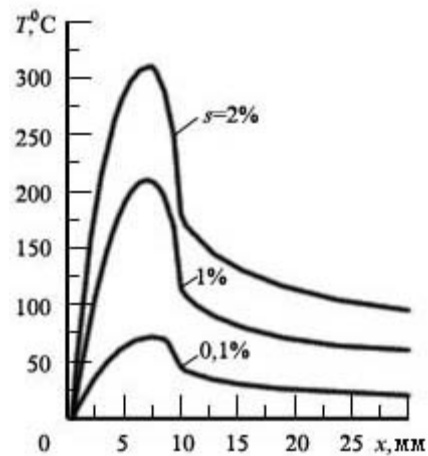


Рис. 1. Розподіл максимальної температури вздовж напрямку руху для різних значень коефіцієнта проковзування

В табл. 1 містяться результати чисельного розрахунку температури для трьох різних характерних значень коефіцієнта тертя (I –  $f = 0,1$ ; II –  $f = 0,3$ ; III –  $f = 0,6$ ).

Таблиця 1

Результати чисельного розрахунку температури для $s = 1\%$			
Параметри	I	II	III
$f$	0,1	0,3	0,6
$\alpha$	0,488	0,464	0,428
$\beta$	0,511	0,536	0,572
$a$ (мм)	5,25	5,27	5,31
$d$ (мм)	0,35	0,35	0,35
$x_{\max}$ (мм)	7,77	7,69	7,53
$T_{\max}$ (°C)	74	221	438

Зокрема, для  $f = 0,1$  (розподіл тиску, близький до еліптичного) максимальна температура  $T_{\max} = 74\text{ °C}$  досягається на відстані  $x = 7,77$  мм від точки входу колеса в контакт з рейкою; для  $f = 0,3$  (типове значення коефіцієнта тертя) температурний максимум складає  $T_{\max} = 221\text{ °C}$  і має місце в точці  $x = 7,69$  мм; для  $f = 0,6$  (сильне тертя, характерне для важко навантажених умов експлуатації) маємо  $T_{\max} = 438\text{ °C}$  в точці  $x = 7,53$  мм.

Можна також відзначити, що температурне поле, яке виникає в рейці в ході проходження рухомого складу, характеризується високими градієнтами не лише у поздовжньому (в напрямі руху), але і в поперечному напрямі. Високі температурні градієнти мають місце в тонкій приповерхневій смугі поблизу зони контакту колеса з рейкою. Вже на глибині 1 мм температура практично зникає.

Варто звернути увагу, що параметр  $d$  має фізичний зміст глибини теплового проникнення, яка є важливою величиною при постановці нестационарної задачі. В розглядуваному випадку  $d = 0,35$ , тобто температура в рейці є достатньо значною в межах  $y = 3d$  в околі ділянки нагрівання.

### Висновки

З використанням апроксимаційних властивостей кусково-лінійних функцій розроблено методику побудови розв'язку квазістационарної

теплової задачі тертя, яка моделює роботу трибопари «рейка-колесо» в експлуатаційних умовах. Вивчено вплив коефіцієнтів тертя і проковзування на максимальний рівень температури, що наводиться в рейці після проходження залізничного складу. Встановлено, що максимальні температури не перевищують рівня  $350\text{...}400\text{ °C}$ , що значно менше за температуру початку мартенситних перетворень, яка для типових матеріалів, з яких виготовлюються рейки, складає  $600\text{ °C}$ .

### БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Ling, F. F. Surface displacement of a convective elastic half-space under arbitrary distributed fast-moving heat source [Text] / F. F. Ling, V. C. Mow // Trans. ASME. J. Basic. Eng. – 1965. – V. 97. – P. 729-734.
2. Ling, F. F. Temperature distribution in semi-infinite solid under a fast-moving arbitrary heat source [Text] / F. F. Ling, C. C. Yang // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1971. – V. 14, No. 1. – P. 199-206.
3. Knothe, K. Direct covariance analysis for the calculation of creep-pages and creep-forces for various bodies on straight track with random irregularities [Text] / K. Knothe, S. Stichel // Vehicle System Dynamics. – 1993. – V. 22. – P. 237-251.
4. Knothe, K. Direct covariance analysis for the calculation of creep-pages and creep-forces for various bodies on straight track with random irregularities [Text] / K. Knothe, S. Liebelt // Wear. – 1995. – V. 189, No. 1-2. – P. 91-99.
5. Марчук, Г. И. Введение в проекционно-сеточные методы [Текст] / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
6. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия [Текст] / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 509 с.
7. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1975. – 831 с.
8. Hill, D. A. The state of stress induced by cylindrical sliding contact with frictional heating [Text] / D. A. Hill, D. Noveell, A. Sackfield // Int. J. Mech. Sci. – 1990. – V. 32. – P. 767-778.
9. Расчет, испытание и подбор фрикционных пар [Текст] / А. В. Чичинадзе [и др.]. – М.: Наука, 1979. – 267 с.

Надійшла до редколегії 12.05.2010.

Прийнята до друку 27.05.2010.