УДК 004.925.84

П. В. БЕЗДІТКО, А. В. КРАСНЮК, А. Д. МАЛИЙ, Н. П. БОЧАРОВА (ДІІТ)

КОМП'ЮТЕРНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТВЕРДОТІЛЬНИХ ПРАВИЛЬНИХ МНОГОГРАННИКІВ (ТІЛ ПЛАТОНА) В СИСТЕМІ AutoCAD. ТЕТРАЕДР

В статті викладено технології перетворення правильного многогранника (тетраедра) в напівправильний, зірчасті та неправильні многогранники методами комп'ютерної графіки. Автори дійшли висновку, що такі перетворення твердотільних моделей правильних многогранників найдоцільніші з відомих у нарисній геометрії та інженерній графіці.

В статье изложены технологии преобразования правильного многогранника (тетраэдра) в полуправильный, звёздчатые и неправильные многогранники методами компьютерной графики. Авторы пришли к выводу, что такие преобразования твёрдотельных моделей правильных многогранников наиболее целесообразны из известных в начертательной геометрии и инженерной графике.

In the article the technologies of transformation of a perfect polyhedron (tetrahedron) into semi-perfect one, star-like and imperfect polyhedrons by the methods of computer graphics are presented. The authors have concluded that such transformations of solid models of зукаусе polyhedrons are most expedient from the known ones in descriptive geometry and engineering graphics.

Вступ

В попередній нашій роботі [1] ми запропонували досить прості комп'ютерні технології побудови твердотільних моделей правильних многогранників в системі AutoCAD.

Тепер ми хочемо продовжити цю тему, але вже в плані перетворення тіл Платона в тіла Архімеда (напівправильні многогранники) та в зірчасті форми і з'єднання правильних многогранників.

Оскільки тетраедр є першим в сім'ї тіл Платона, то з нього і почнемо.

1. Зрізаний тетраедр.

В нарисній геометрії зрізаним називають тіло, у якого зрізана верхівка, тобто всі його частини разом з вершиною [2]. Платонові тіла можна зрізати таким чином, що і одержані нові грані, і залишки старих будуть правильними многокутниками. Якщо ж у зрізаного многогранника всі многогранні кути рівні, а всі грані – правильні многокутники, то його відносять до *архімедових тіл* (відкриття яких приписують Архімеду [2]), або *напівправильних* многогранників.

Що ж стосується тетраедра, то його можна зрізати так, що чотири його трикутні грані перетворяться в чотири рівносторонні шестикутники і до них ще додадуться чотири правильні трикутні грані [2].

Для цього нам треба зрізати верхівки тетраедра на одну третину його висоти, але так, щоб січні площини були перпендикулярними до бісектрис тригранних кутів при його вершинах. При цьому можна скористатися чотирма окремими січними площинами, але ми вважаємо, що доцільніше застосувати ті ж технології, які ми запропонували в роботі [1].

Отже, спочатку побудуємо тетраедр, задавшись довжиною його ребра a. Тоді радіус кола, описаного навколо його основи буде дорівнювати [1]:

$$R = 0,5773\ a.$$

Висота тетраедра (траєкторія видавлювання)

$$h_т = 0,8167\ a,$$

а кут звуження

$$\beta = 19,42^o.$$

Технологію його побудови наведено у вищезгаданій роботі.

Далі побудуємо зрізану правильну шестигранну піраміду, перевернуту зрізом вниз так, щоб менша її основа вписувалась в основу тетраедра, а висота дорівнювала 2/3 висоти тетраедра. Оскільки ми зрізуємо верхівки тетраедра на третину, то сторона шестикутника, вписаного в основу тетраедра, також буде дорівнювати 1/3 ребра тетраедра. Відповідно радіус кола, описаного навколо шестикутника, буде дорівнювати довжині його сторони (рис. 1). Після цього, за допомогою команди «Видавити» (Extrude) з панелі інструментів «Тіла», будуємо вищезгадану піраміду.

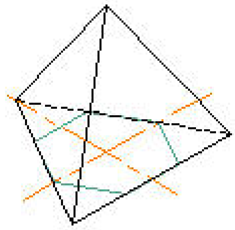

Рис. 1

Оскільки каркасна модель одержаної фігури досить невиразна, то розфарбуємо її за Гуро (рис. 2).

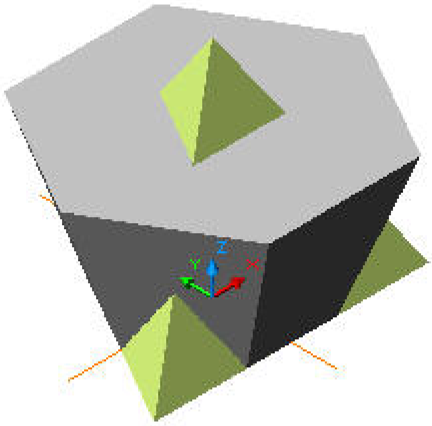

Рис. 2

Далі, скориставшись командою «Переріз» (Intersect) з панелі інструментів «Редагування тіл», одержуємо бажану модель зрізаного тетраедра. Її ізометричне зображення не дуже виразне (рис. 3*а*), тож, за бажанням, її можна за допомогою команди «3D орбіта» повернути на будь-який кут (рис. 3*б*).

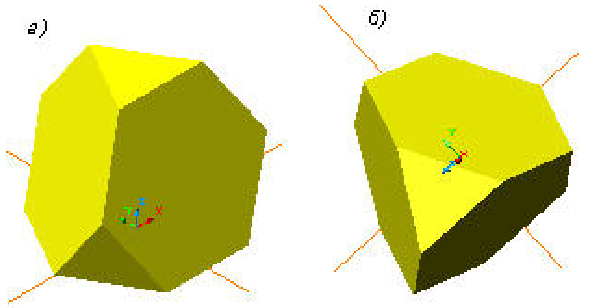

Рис. 3

2. Бітетраедр (біпіраміда).

Біпірамідою [2] називають многогранник, утворений з двох *n*-гранних пірамід, які складені рівними основами та знаходяться по різні боки від спільної основи. Це можуть бути будь-які піраміди, правильні чи неправильні. Але, оскільки мова йде про правильний тетраедр, ми вважаємо що біпіраміду, утворену з двох тетраедрів, доцільно назвати бітетраедром. Технологія його побудови дуже проста. Як і в попередньому випадку, спочатку будуємо твердотільну модель тетраедра, а потім за допомогою команди «3М дзеркало» (3D Mirror) випадного меню «Редагування» віддзеркалюємо його відносно площини *XY* (рис. 4).

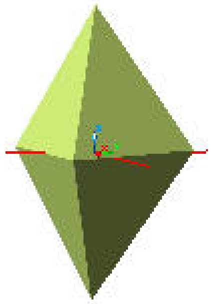

Рис. 4

Фактично ми одержали шестигранник, всі грані якого є правильними рівносторонніми трикутниками. Але його ні правильним, ні напівправильним назвати не можна, бо просторові кути при його вершинах різні. Тож його можна назвати хіба що неправильним гексаедром. Але поняття гексаедр, як правило, асоціюється з правильним шестигранником – кубом. Тому ми вважаємо за доцільне іменувати його бітетраедром.

Між іншим, якщо нижній тетраедр перемістити вгору на відстань, рівну його висоті, а потім за допомогою команди «Переріз» з панелі інструментів «Редагування» здійснити взаємний переріз цих тетраедрів, то знову одержимо модель бітетраедра, але висота його буде вдвічі меншою від висоти попереднього, тобто дорівнюватиме висоті тетраедра.

Мабуть через те, що фігура цього многогранника не дуже приваблива, він практично не зустрічається в архітектурі.

3. Зірчастий тетраедр.

Зірчастий тетраедр ми одержимо, якщо на кожній його грані побудуємо такі ж самі тетраедри. Така модель виглядає дещо привабливіше, але згадки про неї в літературі ми поки що не зустрічали

Для спрощення побудови цього многогранника ми скористаємося моделлю бітетраедра, оскільки там ми вже побудували один тетраедр на основі першого. Тепер, скориставшись тим, що тетраедри поки що не об’єднані між собою в єдине тіло, віддзеркалимо перший тетраедр відносно однієї з його бічних граней, наприклад відносно грані, основа якої перпендикулярна до осі *XY*, а потім за допомогою команди «3М масив» випадного меню «Редагування» розмножимо його як масив навколо осі Z. В результаті маємо зірчастий тетраедр (рис. 5).

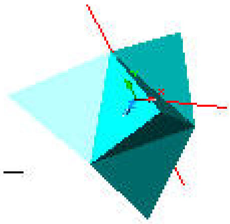

Рис. 5

Така модель вже привабливіша за попередню, але в такому вигляді в архітектурі та техніці практично не зустрічається. Тож спробуємо скомбінувати її зі зрізаним тетраедром, про який мова йшла в першому пункті цієї статті. Використаємо його як підставку до цього многогранника (рис. 6).

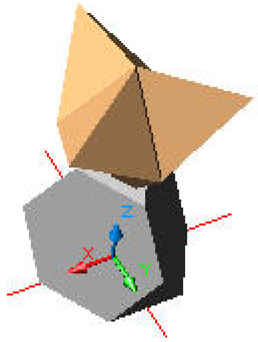

Рис. 6

Це вже більш цікава конфігурація і, можливо, надихне архітекторів на її застосування.

4. *Зірчастий бітетраедр.*

Якщо ми вже побудували зірчастий тетраедр, то перетворити його в зірчастий бітетраедр дуже просто. Для цього достатньо три тетраедри, побудовані на бічних гранях основного, віддзеркалити відносно площини XY і будемо мати бажаний результат (рис. 7).

Цей зірчастий многогранник цікавіший за попередній, але його опису в літературі ми також поки що не зустрічали.

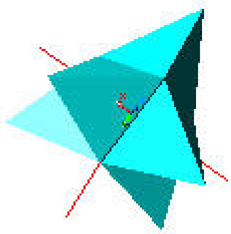

Рис. 7

5. *Зірчастий октаедр (stella octangula Кеплера).*

Зірчастий октаедр відкрив у 1619 році Й. Кеплер [2]. Він назвав його *stella octangula,* тобто восьмикутна зірка. Й. Кеплер виходив з того, що вісім площин – продовження граней октаедра – відділяють від простору нові частини, «відсіки», зовнішні по відношенню до октаедра, які є нічим іншим, як малими тетраедрами, основи яких співпадають із гранями октаедра. М. Веннінджер [2], досліджуючи многогранники, дійшов висновку, що цей многогранник не є єдиним тілом, це поєднання двох тетраедрів, які взаємно перерізаються. Центри цих тетраедрів співпадають із центром вихідного октаедра, причому ця точка є центром симетрії всього тіла.

Тож, спираючись на висновки Веннінджера, побудуємо зірчастий октаедр за допомогою двох тетраедрів. Для цього спочатку будуємо бітетраедр так, як це ми описали у п. 2 даної роботи (рис. 4). Потім, не об’єднуючи тетраедри в єдине тіло, повернемо нижній навколо осі Z на 60 або 180 градусів (щоб вершини основ тетраедрів зайняли протилежне положення). Далі перемістимо нижній тетраедр вгору на половину його висоти, тобто так, щоб центр його основи розташувався в точці з координатами (0; 0; 0,40835a). От і все, модель готова (рис. 8).

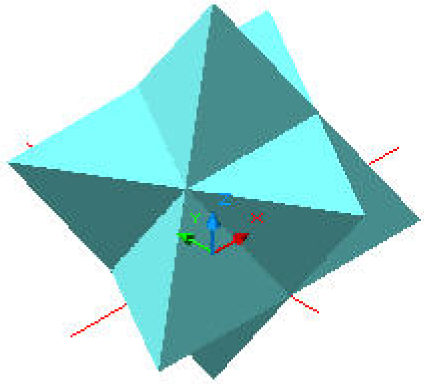

Рис. 8

А далі – цікавий факт. Якщо ми скористаємося командою «Переріз» (Intersect) із панелі інструментів «Редагування тіл», то в результаті одержимо звичайнісінький правильний октаедр. Правда, він лежатиме на бічній грані (рис. 9*а*). Для більшої певності повернемо його так, щоб вісь зайняла звичне вертикальне положення (рис. 9*б*).

На нашу думку, цей результат можна вважати експериментальним підтвердженням геніальної далекоглядності Й. Кеплера, який визначив цей зірчастий многогранник октаедром, та правильності висновку М. Венніджера про те, що він є результатом взаємного перерізу двох тетраедрів.

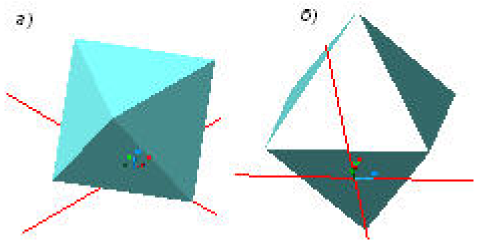

Рис. 9

Висновки

В результаті виконаної роботи можна зробити такі висновки:

- комп’ютерні технології побудови твердотільних многогранників, запропоновані нами в попередній роботі [1], доцільно застосовувати і для їх перетворень та модифікацій;
- завдяки цим технологіям вперше створено твердотільні моделі бітетраедра та зірчастих тетраедра, бітетраедра і октаедра;
- одержано експериментальне підтвердження ідеї Й. Кеплера про те, що в основі восьмикутної зірки лежить октаедр, та твердження М. Венніджера, що зірчатий октаедр є результатом взаємного перерізу двох тетраедрів.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Просторове моделювання твердотільних многогранників (тіл Платона) в системі AutoCAD [Текст] / П. В. Бездітко [та ін.] // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2009. – Вип. 27. – Д.: Вид-во ДНУЗТ, 2009. – С. 167-170.
2. Веннинджер, М. Модели многогранников [Текст] / М. Веннинджер. – М.: Мир, 1974. – С. 12-45.

Надійшла до редколегії 25.02.2010.
Прийнята до друку 03.03.2010.