
ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

УДК 519.81:004.94

Т. Н. ВАСЕЦКАЯ^{1*}

^{1*}Каф. «Компьютерные информационные технологии», Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, Днипро, Украина, 49010, тел./факс +38 (098) 237 05 21, эл. почта tetyana@vasetsky.com, ORCID 0000-0001-7008-2839

МОДЕЛИРОВАНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ СРЕДСТВАМИ КОНСТРУКТИВНО-ПРОДУКЦИОННЫХ СТРУКТУР

Цель. В исследовании предполагается: 1) расширить возможности классического метода анализа иерархий (МАИ) для большого количества альтернатив и критериев; 2) построить модель конструктивного процесса принятия решений с использованием модифицированного метода анализа иерархий с сортировкой (МАИС). **Методика.** Для достижения поставленной цели используется механизм конструктивно-продукционных структур (КПС). Выполнены уточняющие преобразования обобщенной конструктивно-продукционной структуры. **Результаты.** Разработанная модель конструктивного процесса представляет собой взаимодействие трех структур: 1) общей КПС МАИС, которая позволяет определить альтернативы и критерии, выполняя декомпозицию иерархической структуры задачи; 2) КПС группировки и сортировки, которая разбивает на группы альтернативы и критерии, реализуя для каждой из групп классический одноуровневый МАИ, а также рассчитывая оценки парных сравнений на основании введенных данных; 3) КПС одноуровневого классического МАИ, которая позволяет заполнить матрицу парных сравнений и рассчитать ранги альтернатив. Все три структуры взаимодействуют между собой на разных уровнях уточняющих преобразований: посредством согласования по данным на уровне конкретизации и использования реализаций. Представленная модель позволила перейти на более абстрактный уровень представления разрешения задач принятия решений для большого количества критериев и альтернатив. **Научная новизна.** По результатам работы предлагается использовать механизм КПС для формализации модификаций МАИ с сортировкой для разрешения задач принятия решений с большим количеством критериев и альтернатив. **Практическая значимость.** Формализация представления как самого метода анализа иерархий, так и его модификаций позволяет расширить круг применения данного метода; унифицировать описания различных модификаций МАИ. Такое представление обеспечивает возможность разработки программ для реализации гибридных модификаций данного метода. Использование разных интерпретаций представленных в статье КПС позволит использовать другие подходы при определении согласованности матриц парных сравнений, расчета оценок и весов альтернатив и критериев.

Ключевые слова: моделирование; конструктивно-продукционные структуры; конструктивный процесс; метод анализа иерархий; модификация

Введение

Метод анализа иерархий (МАИ) [4, 11], предложенный Саати, получил мировое распространение и применяется для решения задач принятия решений в разных сферах. Существует большое количество модификаций данного метода, которые учитывают специфику задач, позволяют уменьшить существующие ограничения на применение данного метода [1, 2, 3, 13, 14], или применяют МАИ в комбинации с другими методами принятия решений (математические методы многокритериального анализа, статистические методы и т.п.) [10, 12]. Разработано много программных средств, реализующих как сам метод, так и его модификации [2, 9, 14, 15].

В [14] представлена модификация МАИ с сортировкой (МАИС), которая может применяться при ранжировании большого количества альтернатив. Суть данного метода состоит в том, что все альтернативы разбиваются на группы по три (четыре) в группе и применяется классический МАИ для каждой из групп. Если положение альтернатив в группах изменяется, то выполняется перегруппировка. Часть оценок, которые еще не определены экспертом, рассчитывается на основании уже определенных на каждом шаге. Это существенно облегчает работу эксперта.

Цель

Целью данной работы является расширение возможностей классического МАИ для большого количества альтернатив и критериев. Для этого предлагается представить конструктивный процесс принятия решения с использованием МАИС средствами конструктивно-продукционных структур (КПС) [6]. В [8] средствами КПС формализован процесс ранжирования альтернатив с использованием классического МАИ.

Для представления МАИС разработана система из трех взаимодействующих КПС: непосредственно МАИС, КПС группировки и сортировки и КПС одноуровневого классического МАИ.

Методика

Для достижения поставленной цели используется механизм конструктивно-продукционных структур. КПС представляют собой мощный аппарат для формализации и моделирования процессов [5 - 8]. Выполняя разные уточняющие преобразования обобщенной конструктивно-продукционной структуры (ОКПС) [6]: специализацию, интерпретацию, конкретизацию и реализацию, разрабатываются разные модели [7]. ОКПС называется тройка [6]:

$$C_G = \langle M, \Sigma, \Lambda \rangle,$$

где M – неоднородный носитель структуры; Σ – сигнатура, состоящая из множеств операций связывания, подстановки и вывода, операций над атрибутами и отношения подстановки; Λ – конструктивная аксиоматика [6].

Назначение КПС состоит в формировании множеств конструкций с помощью операций связывания, подстановки, вывода и др. операций, задаваемых правилами аксиоматики.

Результаты

В данной работе представлена модель модифицированного МАИС [14] на основе КПС без ограничений на количество критериев и альтернатив.

Все три КПС взаимодействуют на уровне конкретизации: связь согласование по данным, и на уровне реализации: КПС МАИС использует реализацию КПС группировки и сортировки для критериев и для набора альтернатив по каждому критерию, КПС группировки и сортировки использует реализацию для каждой группы КПС одноуровневого МАИ.

Конструктивно-продукционная структура МАИС. Определим специализацию ОКПС [6] структуры для представления метода анализа иерархий с сортировкой:

$$C = \langle M, \Sigma, \Lambda \rangle_{s \mapsto} C_{AHPS} \langle M_{AHPS}, \Sigma_{AHPS}, \Lambda_{AHPS} \rangle$$

где C – ОКПС, M – неоднородный носитель, Σ – сигнатура, Λ – аксиоматика, $s \mapsto$ – операция специализации, $\Lambda_{AHPS} = \Lambda \cup \Lambda_1$, $\Lambda_1 = \{M_{AHPS} \supset T_1 \cup N_1, \Sigma_{AHPS} = \{\Xi, \Theta, \Phi, \Pi\}, \Theta = \{\Rightarrow, \mid \Rightarrow, \parallel \Rightarrow\}, \Pi = \{\rightarrow\}, \Phi = \{\div, *, :=, <, \nabla\}, \Xi = \{\cdot, \circ, \diamond\}, \Xi$ – операции связывания, Θ –

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

операції вивода, П – операції підстановки, Ф – операції над атрибутами.

Частична аксиоматика Λ_1 содержит следующие определения, дополнения и ограничения, которые уточняют алфавит, атрибуты носителя, отношения подстановки, задают особенности выполнения операций подстановки и вывода.

Терминальный алфавит содержит множество альтернатив $\{name, v, x_i\}$ и критериев $\{name, v, k_p\}$ с их атрибутами: x_i – идентификатор альтернативы, $name$ – семантика, v – глобальный приоритет (вес); k_p – идентификатор критерия.

Альтернативы и критерии, допустимые значения оценок содержатся в неоднородном носителе M_{AHPS} .

Вводятся следующие операции над атрибутами:

$\div (c; n; L)$ – условного выполнения n операций из списка L , если $c = true$, $L = (j_1, j_2, \dots, j_n)$, операции представлены в префиксной форме;

* – операция умножения вектора на число;

:= – операция присваивания;

< – сравнение на меньше;

∇ – операция установки значения атрибута, внешним исполнителем.

Правила подстановки имеют вид $\Psi_{r,i,j} : \langle s_{r,i,j}, g_{r,i,j} \rangle \in \Psi$, где $s_{r,i,j}$ – отношение подстановки, $g_{r,i,j}$ – набор операций над атрибутами, r – номер правила, i, j – номера первой и второй альтернативы пары. Трехуровневая индексация применяется для упорядочения правил подстановки.

Двухместная операция частичного вывода [6] $l^* = (\Rightarrow (\Psi, l))$ (здесь l, l^* – формы до и после выполнения операции подстановки), заключается в:

1) выборе одного из правил подстановки $\Psi_r : \langle s_{r,i,j}, g_{r,i,j} \rangle \in \Psi$, с отношениями подстановки $s_{r,i,j}$ и выполнении на его основе операций подстановки. Доступность отношения подстановки $s_{r,i,j}$ определяется значением атрибу-

та доступности $d_{r,i,j} \dashv s_{r,i,j}$: если $d_{r,i,j} \dashv s_{r,i,j} = 1$, то отношение доступно; если $d_{r,i,j} \dashv s_{r,i,j} = 0$ – не доступно; доступность правил регулируется операциями над атрибутами или задается аксиоматикой;

2) выполнении операций над атрибутами $g_{r,i,j}$.

Порядок применения операции над атрибутами в процессе выполнения операции частичного вывода задается атрибутом τ_j , где $\tau_j \in I$, $I = \{\tau_0, \tau_1\}$, $I \subset M_{AHPS}$, τ_0 – операция над атрибутом выполняется перед операцией подстановки, τ_1 – после операции подстановки.

Операция полного вывода (или просто вывода) заключается в последовательном выполнении операции частичного вывода, начиная с начального нетерминала, и заканчивая конструкцией, удовлетворяющей условию окончания вывода. Результатом операции полного вывода является конструкция, содержащая упорядоченную последовательность альтернатив.

Условием окончания вывода является отсутствие нетерминалов в форме.

Пусть имеется следующая базовая алгоритмическая структура (БАС) [6], которая содержит операции выполнения действий по условию, операций с матрицами, а также запуска МАИС для критериев и альтернатив:

$$C_{A,AHPS} = \langle M_{A,AHPS}, \Sigma_{A,AHPS}, \Lambda_{A,AHPS} \rangle,$$

где $M_{A,AHPS}$ – неоднородный носитель, который содержит $V_{A,AHPS}$, $\Sigma_{A,AHPS}$ – сигнатура и

$\Lambda_{A,AHPS}$ – аксиоматика, $V_{A,AHPS} \supset \{A_1^0 |_{A_i, A_j}^{A_i, A_j}, A_{22}^0 |_{a,b}^{a \circ b}, A_{23}^0 |_{a,b}^{a \circ b}\}$ – множество образующих алгоритмов для некоторого исполнителя и $\{A_2 |_{h,q,f_i}^{f_j}, A_3 |_{f_i, \Psi}^{f_j}, A_4 |_{f_i, \Psi}^{f_j}\} \cup V_w$ – множество сконструированных алгоритмов, $\{A_5 |_{c,n,L}^L, A_6^0 |_{a,b}^P, A_7^0 |_{a,b}^a, A_8^0 |_{a,b}^c, A_9^0 |_{a,b}^b, A_{18}^0 |_{a,b}^c, A_{10}^0 |_{a,b}^c, A_{11}^0 |_{a,b}^c, A_{12}^0 |_{a,b}^c, A_{13}^0 |_{a,b}^a, A_{14}^0 |_{a,b}^c, A_{15}^0 |_{N, \gamma}^{is}, A_{16}^0 |_{N, \gamma}^{\bar{r}}, A_{17}^0 |_{a,b}^c, A_{18}^0 |_{a,b}^c, A_{19}^0 |_{a,b}^c, A_{20}^0 |_{a,b}^c, A_{21}^0 |_{x_i, x_j, k_p}^{a,h}\} \in V_w$ – алгоритмы, реализующие операции Ф над атрибутами.

Указанные выше алгоритмы реализуют следующие операции:

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

- $A_1^0 |_{A_i, A_j}^{A_i, A_j}$ – конкатенации алгоритмов (последовательное выполнение алгоритма A_i после A_j);
- $A_2 |_{l_h, l_q, f_i}^{f_j}$ – подстановки;
- $A_3 |_{f_i, \Psi}^{f_j}, A_4 |_{\sigma, \Psi}^{\bar{\Omega}}$ – частичного и полного вывода. Здесь f_i, f_j – формы, σ – начальный нетерминал, $\bar{\Omega}$ – множество сформированных конструкций;
- $A_5 |_{c, n, L}^L$ – выполнения n алгоритмов из списка L , если $c = true$;
- $A_6^0 |_{a, b}^c$ – вычисления произведения $a * b$, a и b могут быть матрицами или числами;
- $A_7^0 |_{a, b}^a$ – присваивания значения переменной $a = b$;
- $A_9 |_a^b$ – определения значения a внешним экспертом;
- $A_{10}^0 |_{a, b}^c$ – вычисления частного от деления a на b ;
- $A_{11}^0 |_{a, b}^c$ – вычисления остатка от деления a на b ;
- $A_8^0 |_{a, b}^c, A_{12}^0 |_{a, b}^c, A_{13}^0 |_{a, b}^c, A_{19}^0 |_{a, b}^c, A_{20}^0 |_{a, b}^c$ – сравнения чисел a и b , если условие выполняется ($a \leq b, a \neq b, a = b, a > b, a < b$), то $c = true$, в противном случае $c = false$;
- $A_{13}^0 |_{a, b}^a$ – присвоения переменной a значения b , a и b могут быть векторами, матрицами или числами;
- $A_{14}^0 |_{a, b}^c$ – логического «и» двух условий a и b , истина, если оба условия являются истинными;
- $A_{15}^0 |_{N \mathcal{Y}}^{is}$ – вычисления отношения согласованности матрицы парных сравнений (МПС) $\bar{N} \mathcal{Y}$;
- $A_{16}^0 |_{N \mathcal{Y}}^{\bar{r}}$ – вычисления вектора приоритетов альтернатив по МПС $\bar{N} \mathcal{Y}$;
- $A_{17} |_a^c$ – вычисления целой части от действительного числа a ;

- $A_{18}^0 |_{a, b}^c$ – вычисления суммы $a + b$, a и b могут быть матрицами или числами;
- $A_{21}^0 |_{x_i, x_j, k_p}^{a, h}$ – определения значения веса связи i и j альтернатив по критерию k_p внешним исполнителем ($h = 1$);
- $A_{22}^0 |_{a, b}^{a \circ b}$ – связывания альтернатив и критериев, где a, b – идентификаторы альтернатив или критериев, или связь между ними;
- $A_{23}^0 |_{\alpha, b}^{\alpha \circ b}$ – связывания результата реализации b с нетерминалом использования реализации КПС α .

Интерпретация основной КПС для модифицированного метода анализа иерархий:

$$\langle C_{AHPS} = \langle M_{AHPS}, \Sigma_{AHPS}, \Lambda_{AHPS} \rangle,$$

$$C_{A, AHPS} = \langle M_{A, AHPS}, \Sigma_{A, AHPS}, \Lambda_{A, AHPS} \rangle \rangle_{I \mapsto}$$

$$I \mapsto_I C_{AHPS} = \langle M_{AHPS}, \Sigma_{AHPS}, \Lambda_{I, AHPS}, Z \rangle,$$

где $I \mapsto$ – операция интерпретации; Z – множество исполнителей, способных использовать все алгоритмы БАС; $C_{A, AHPS} \quad \Lambda_{I, AHPS} = \Lambda_{AHPS} \cup \Lambda_3$,
 $\Lambda_3 = \{(A_1^0 |_{A_i, A_j}^{A_i, A_j} \dashv \cdot), (A_2 |_{l_h, l_q, f_i}^{f_j} \dashv \Rightarrow), (A_3 |_{f_i, \Psi}^{f_j} \dashv \Rightarrow),$
 $A_4 |_{\sigma, \Psi}^{\bar{\Omega}} \dashv \Rightarrow), (A_6^0 |_{a, b}^c \dashv *), (A_7^0 |_{a, b}^a \dashv :=),$
 $(A_8^0 |_{a, b}^c \dashv <), (A_5^0 |_{c, n, L}^L \dashv \div), (A_{23}^0 |_{\alpha, b}^{\alpha \circ b} \dashv \diamond)\}$.

Представим конкретизацию КПС для метода анализа иерархий с сортировкой:

$$I C_{AHPS} = \langle M_{AHPS}, \Sigma_{AHPS}, \Lambda_{I, AHPS}, Z \rangle \quad K \mapsto$$

$$K \mapsto C_{K, AHPS} = \langle M_{AHPS}, \Sigma_{K, AHPS}, \Lambda_{I, AHPS} \cup \Lambda_4 \cup \cup \Lambda_5, Z \rangle,$$

где $\Lambda_4 = \{T_1 = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N, k_1, \dots, k_p\},$

$N_1 = \{p, N \sigma, q \bar{\lambda}, \alpha_1, \dots, \alpha_{p, q} \bar{\phi}_1, \dots, \bar{\phi}_p, \chi\},$

$U = \{p, N \sigma\}, \quad \Psi_K = \{\psi_r : \langle s_{r, i, j}, g_{r, i, j} \rangle\}, \quad r = \bar{1}, \bar{6}\},$

r – номер правила; i – номер первой альтернативы, j – номер второй альтернативы пары; x_i – терминал для обозначения идентификатора i -ой альтернативы; k_l – терминал для обозначения идентификатора l -ого критерия; U – множество начальных нетерминалов; α_l – нетерминал для обработки альтернатив по l -ому критерию; χ – нетерминал использования ре-

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

лизації КПС групування і сортировки для критеріїв; ${}_{\mathcal{Q}}\bar{\lambda}$ – нетерминал МПС критеріїв (где $\mathcal{Q} = \{\bar{r}, is, N\}$ – множество атрибутів: \bar{r} – вектор пріоритетів МПС, is – отношение согласованности матрицы, N – размерность матрицы), ${}_{\mathcal{Q}}\bar{\phi}_l$ – МПС альтернатив по l -ому критерию.

Частичная аксиоматика Λ_5 заключается в следующем.

Количество критеріев P и количество альтернатив N , а также семантика альтернатив и критеріев задаются на этапе выполнения внешним исполнителем.

Запись последовательной конкатенации нескольких терминалов, нетерминалов и последовательное выполнение операций над атрибутами будем обозначать следующим образом:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = \prod_{i=1}^n x_i. \text{ Запись } \prod_{i=1}^N \prod_{j=i+1}^N (\alpha_{d_{r,i,j}} \rightarrow \beta)$$

означает, что правило состоит из последовательности отношений подстановок с заданным атрибутом доступности. Если отношение подстановки доступно, то оно выполняется и определяется доступность следующего отношения в последовательности, в противном случае это отношение пропускается и определяется доступность следующего в последовательности.

Правила, которые не изменяют текущую конструкцию, имеют пустое отношение подстановки.

Принимается, что $d_{r,i,j} \downarrow s_{r,i,j} = 1$, для всех $r = \overline{1,5}$, поэтому этот атрибут в этих правилах опущен. Ниже приведены правила и их краткое описание.

Отношение подстановки $s_{1,0,0}$ применяется для ввода последовательности обработки критеріев и альтернатив по критеріям. Операциями над атрибутами выполняется определение количества и семантики критеріев и альтернатив:

$$s_{1,0,0} = \langle {}_{P,N}\sigma \rightarrow \chi |_{P,k,0,P,k}^{\mathcal{Q}\bar{\lambda}} \diamond \mathcal{Q}\bar{\lambda} \cdot \prod_{p=1}^P (\alpha_p) \rangle,$$

$$\tau_0 g_{1,0,0} = \langle N := \nabla(N), P := \nabla(P), \prod_{i=1}^P (k_i := \nabla(k_i));$$

$$\prod_{i=1}^N (x_i := \nabla(x_i)) \rangle.$$

Отношение $s_{2,0,0}$ использует реализацию КПС сортировки и группировки для альтернатив по каждому критерию, и $s_{3,0,0}$ – применяется для получения результата реализации КПС сортировки и группировки для критеріев:

$$s_{2,0,0} = \langle \prod_{p=1}^P (\alpha_p \rightarrow \chi |_{N,x,p,p,k}^{\mathcal{Q}\bar{\phi}_p} \diamond \mathcal{Q}\bar{\phi}_p) \rangle.$$

$$s_{3,0,0} = \langle \chi |_{P,k,0,\varepsilon}^{\mathcal{Q}\bar{\lambda}} \diamond \mathcal{Q}\bar{\lambda} \rightarrow \mathcal{Q}\bar{\lambda} \rangle.$$

Отношение $s_{4,0,0}$ используется для получения результата реализации КПС группировки и сортировки для альтернатив:

$$s_{4,0,0} = \langle \prod_{p=1}^P (\chi |_{N,x,p,p,k}^{\mathcal{Q}\bar{\phi}_p} \diamond \mathcal{Q}\bar{\phi}_p \rightarrow \mathcal{Q}\bar{\phi}_p) \rangle.$$

Следующее отношение подстановки служит для ввода в конструкцию набора альтернатив. Операции над атрибутами содержат расчет глобальных пріоритетов альтернатив:

$$s_{5,0,0} = \langle \mathcal{Q}\bar{\lambda} \cdot \prod_{p=1}^P (\mathcal{Q}\bar{\phi}_p) \rightarrow \prod_{i=1}^N ({}_v x_i) \rangle,$$

$$\tau_0 g_{5,0,0} = \langle \prod_{i=1}^N ({}_v \downarrow x_i := (\bar{r}_p \downarrow \lambda) * r_i \downarrow \phi_p) \rangle.$$

Набор отношений подстановок $s_{6,0,0}$ позволяет упорядочить альтернативы в конструкции согласно их рангам:

$$s_{6,0,0} = \langle \prod_{i=1}^{N-1} \prod_{j=i+1}^N ({}_v x_i \cdot {}_v x_j \downarrow d_{6,i,j} \rightarrow {}_v x_j \cdot {}_v x_i) \rangle,$$

$$\tau_0 g_{6,0,0} = \langle \prod_{i=1}^{N-1} \prod_{j=i+1}^N (\div ({}_v \downarrow x_i < {}_v \downarrow x_j ; !; d_{6,i,j} := 1)) \rangle.$$

Реализацией данной КПС является упорядоченная в соответствии с рассчитанными рангами последовательность альтернатив.

Конструктивно-продукционная структура группировки и сортировки альтернатив (КПС ГСА). Определим специализацию ОКПС для представления подсистемы группировки и сортировки для МАИС:

$$C = \langle M, \Sigma, \Lambda \rangle_S \mapsto C_{GSA} \langle M_{GSA}, \Sigma_{GSA}, \Lambda_{GSA} \rangle$$

где $\Lambda_{GSA} = \Lambda \cup \Lambda_6$, $\Lambda_6 = \{M_{GSA} \supset T_2 \cup N_2$, $\Sigma_{GSA} = \{\Xi, \Theta, \Phi, \Pi\}$, $\Pi = \{\rightarrow\}$, $\Theta = \{\Rightarrow, \vdash, \|\Rightarrow\}$, $\Xi = \{\cdot, \circ, \diamond\}$, $\Phi = \{\div, *, :=, >, \leq, \%, +, \downarrow, \neq, \&, \hbar$,

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

$\lambda, \{\}, \Xi$ – операції зв'язування, Θ – операції вивода, Φ – операції над атрибутами, Π – операції підстановки.

Частична аксиоматика Λ_6 представлена нижче.

Термінальний алфавит містить множество альтернатив і критеріїв з їх атрибутами.

Правила підстановки складаються з відношення підстановки і набору операцій над атрибутами. Відношення підстановки містить атрибут доступності d_r , де r – номер правила, який приймає значення 1 – відношення доступно і 0 – не доступно. Для правил з постійним атрибутом доступності ($d_r=1$) цей атрибут опускається для спрощення запису.

Для інтерпретації КПС групування і сортування альтернатив воспользуємося БАС $C_{A,AHPS}$, описаною вище:

$$\langle C_{GSA} = \langle M_{GSA}, \Sigma_{GSA}, \Lambda_{GSA} \rangle, \\ C_{A,AHPS} = \langle M_{A,AHPS}, \Sigma_{A,AHPS}, \Lambda_{A,AHPS} \rangle \Big|_{I \mapsto} \\ I \mapsto I \quad C_{GSA} = \langle M_{GSA}, \Sigma_{GSA}, \Lambda_{I,GSA}, Z_{GSA} \rangle,$$

де $\Lambda_{I,GSA} = \Lambda_{GSA} \cup \Lambda_7$, $\Lambda_3 = \{(A_1^0 |_{A_i, A_j}^{A_i, A_j} \dashv \cdot),$

$(A_2^0 |_{f_i, f_j}^{f_i, f_j} \dashv \Rightarrow), (A_3^0 |_{f_i, \Psi}^{f_i, \Psi} \dashv \Rightarrow), A_4^0 |_{\sigma, \Psi}^{\bar{\sigma}} \dashv \Rightarrow),$

$(A_6^0 |_{a,b}^c \dashv *), (A_7^0 |_{a,b}^a \dashv :=), (A_8^0 |_{a,b}^c \dashv \leq),$

$(A_5^0 |_{c,n,L}^L \dashv \div), (A_{10}^0 |_{a,b}^c \dashv /), (A_{11}^0 |_{a,b}^c \dashv \%),$

$(A_{12}^0 |_{a,b}^c \dashv \neq), (A_{13}^0 |_{a,b}^c \dashv =), (A_{14}^0 |_{a,b}^c \dashv \&),$

$(A_{15}^0 |_{N\gamma}^{is} \dashv \bar{h}), (A_{16}^0 |_{N\gamma}^{\bar{r}} \dashv \bar{\lambda}), (A_{17}^0 |_{a,b}^c \dashv \square),$

$(A_{18}^0 |_{a,b}^c \dashv +), (A_{19}^0 |_{a,b}^c \dashv >), (A_{23}^0 |_{a,b}^{\alpha\beta} \dashv \diamond)\}.$

Конкретизуємо КПС групування і сортування альтернатив:

$$I C_{GSA} = \langle M_{GSA}, \Sigma_{GSA}, \Lambda_{I,GSA}, Z_{GSA} \rangle \quad K \mapsto \\ K \mapsto C_{K,GSA} = \langle M_{GSA}, \Sigma_{K,GSA}, \Lambda_{I,GSA} \cup \Lambda_7 \cup \\ \cup \Lambda_8, Z_{GSA} \rangle,$$

де $\Lambda_7 = \{T_2 = T_1 \cup \{-y_{m,j}\} \cup \{-y'_{m,j}\} \cup \{-z_{m,j}\},$

$m = \overline{1, M}$ і $j = \overline{1, 4}$, $N_2 = \{_{P,N} \chi, _{N,p} \gamma, _{p,n} \beta, _Q \lambda,$

$\nu |_{_{p,n} \beta_m, \prod_{i=1}^n ({}_{q^y_{m,i}}), p, k_p}^{-n L', Q \lambda}, k_3, k_4, M \alpha, \{\chi_m\}\} \cup \{_{ch,n} \Psi_m, _{ch,n} \Psi'_m\}$

$m = \overline{1, M}$, $U = \{_{P,N} \chi\}$, $\Psi_K = \{\psi_r : \langle s_r, g_r \rangle\},$

$r = \overline{1, 14}$, r – номер правила, $k_3, k_4, M \alpha$ – відповідає за визначення кількості груп з чотирма і трьома альтернативами (k_3, k_4 – кількість груп з трьома і чотирма альтернативами в групі відповідно, M – загальна кількість груп); $_{ch,n} \Psi_m, _{ch,n} \Psi'_m$ – нетермінальні m -ї групи альтернатив, з атрибутами ch – флаг, що відповідає за зміну положень альтернатив в групі (1 – альтернатива змінила своє положення після ранжування в групі, 0 – не змінила); $_{N,p} \gamma$ – МПС для N альтернатив за критерієм p , елементи матриці нетермінальні $_{a,h} \gamma_{i,j}$ з атрибутами: a – оцінка порівняння i і j альтернатив, h – спосіб отримання оцінки ($h=1$ – заповнено згідно з оцінками зовнішнім виконавцем експертом, $h=0$ – без участі зовнішнього експерта на основі правил підстановки); $_{p,n} \beta_m$ – МПС за критерієм p для групи m , що містить n – альтернатив, елементи цієї матриці нетермінальні $_{p,a,h} \beta_{m,i,j}$, де атрибути a і h такі ж як для $_{a,h} \gamma_{i,j}$; $\nu |_{_{p,n} \beta_m, \prod_{i=1}^n ({}_{q^y_{m,i}}), p, k_p}^{-n L', Q \lambda}$ – нетермінальний ілюстратор реалізації КПС одноуровневого класифікаційного МАІ для альтернатив групи: $\prod_{i=1}^n {}_{q^y_{m,i}}$ – набір альтернатив для ранжування за МАІ, p – номер критерію за яким виконується ранжування, $_{p,k}$ – вектор критеріїв, $_{Q \lambda}$ – МПС альтернатив групи з визначеними рангами і відношенням узгодженості, $_{n L'}$ – упорядкований відповідно до рангів список альтернатив, $_{p,n} \beta_m$ – МПС порівнянь альтернатив в групі; χ_m – нетермінальний ілюстратор для підготовки до ранжування альтернатив m -ї групи; $_{all} \eta$ – нетермінальний ілюстратор розрахунку параметрів загальної МПС альтернатив (недостатніх оцінок парних порівнянь, відношення узгодженості і контролю заповненості матриці); $\{-y_{m,i}\}, \{-y'_{m,i}\}, \{-z_{m,i}\}$ –

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

множества альтернатив в групі m , y , y' , z – ідентифікатор альтернативи, $\bar{q} = [name, v, u, \bar{r}, l]$ – набір атрибутів, де $name$ – семантика альтернативи, v – глобальний пріоритет (вес) альтернативи, u – глобальний номер альтернативи, \bar{r} – вектор весів альтернативи по критеріям, l – номер критерія.

Первое правило с отношением подстановки, которое вводит в конструкцию последовательность альтернатив, МПС по p -ому критерию и нетерминал с атрибутами для работы с группами. С помощью операций над атрибутами рассчитывается количество групп из 3-х и 4-х альтернатив и общее количество групп. Заполняются оценки парных сравнений альтернатив значениями по умолчанию:

$$s_1 = \left\langle \chi \left| \frac{\bar{q}}{N \cdot x, p, p \cdot k} \rightarrow \prod_{u=1}^N (name, v, x_u) \cdot \prod_{p, N} \gamma \cdot k_3, k_4, M \alpha \right. \right\rangle,$$

$$\tau_0 g_1 = \langle flag := 0, \div (N \% 4 = 0; 3; (k_4 \downarrow \alpha := N / 4), (k_3 \downarrow \alpha := 0), (flag := 1)), \div (N = 3; 3; (k_4 \downarrow \alpha := 0), (k_3 \downarrow \alpha := 1), (flag := 1)), \div (N = 5; 3; (k_4 \downarrow \alpha := 0), (k_3 \downarrow \alpha := 2), (flag := 1)), \div (flag = 0; 2; (k_4 \downarrow \alpha := N / 4 - (3 - N \% 4)), (k_3 \downarrow \alpha := (N - k_4 \downarrow \alpha * 4) / 3)), M \downarrow \alpha := k_3 \downarrow \alpha + k_4 \downarrow \alpha; \prod_{i=1}^N (\prod_{j=i+1}^N (a \downarrow_p \gamma_{i,j} := 0; a \downarrow_p \gamma_{j,i} := 0; h \downarrow_p \gamma_{i,i} := 0; h \downarrow_p \gamma_{j,j} := 0; a \downarrow_p \gamma_{i,i} := 1; h \downarrow_p \gamma_{i,i} := 0;)) \rangle.$$

Следующее отношение применяется для разбивки альтернатив на группы. В операциях над атрибутами вводится соответствие между общим списком альтернатив и альтернативами в группах:

$$s_2 = \left\langle \prod_{u=1}^N (\bar{q} x_u) \cdot k_3, k_4, M \alpha \rightarrow \prod_{m=1}^{M \downarrow \alpha} (ch, n \psi \cdot \prod_{i=1}^{n \downarrow \psi_m} \bar{q} y_{m,i}) \right\rangle.$$

$$\tau_0 g_2 = \left\langle \prod_{i=1}^{k_3} (n \downarrow \psi_m = 3; \prod_{j=1}^{n \downarrow \psi_m} (name \downarrow y_{i,j} := name \downarrow x_{i^*j}); u \downarrow y_{i,j} := u \downarrow x_{i^*j}); \prod_{i=k_3+1}^M (n \downarrow \psi_m = 4; \prod_{j=1}^{n \downarrow \psi_m} (name \downarrow y_{i,j} := name \downarrow x_{i^*j}; u \downarrow y_{i,j} := u \downarrow x_{i^*j})) \right\rangle.$$

Операции над атрибутами отношения s_3 устанавливают значения атрибутов элементов МПС альтернатив:

$$s_3 = \left\langle \prod_{m=1}^{M \downarrow \alpha} (ch, n \psi \cdot \prod_{i=1}^{n \downarrow \psi_m} \bar{q} y_{m,i}) \cdot \prod_{p, N} \gamma \right\rangle \rightarrow \prod_{d_3}^{M \downarrow \alpha} (ch, n \psi \cdot \prod_{i=1}^{n \downarrow \psi_m} \bar{q} y_{m,i} \cdot \prod_{p, n \downarrow \psi_m} \beta_m \cdot \rho_m) \cdot \prod_{p, N} \gamma \rangle,$$

$$\tau_0 g_3 = \left\langle \prod_{m=1}^M (\prod_{i=1}^{n \downarrow \psi_m} (\prod_{j=1}^{n \downarrow \psi_m} (a \downarrow \beta_{m,i,j} := a \downarrow \gamma_{u \downarrow y_{m,i}, u \downarrow y_{m,j}}; h \downarrow \beta_{m,i,j} := h \downarrow \gamma_{u \downarrow y_{m,i}, u \downarrow y_{m,j}}))) \right\rangle.$$

Следующее отношение подстановки применяется для использования реализации КПС классического одноуровневого МАИ для каждой группы альтернатив:

$$s_4 = \left\langle \prod_{m=1}^{M \downarrow \alpha} (ch, n \psi \cdot \prod_{i=1}^{n \downarrow \psi_m} \bar{q} y_{m,i} \cdot \prod_{p, n \downarrow \psi_m} \beta_m \cdot \rho_m) \rightarrow \prod_{m=1}^M (ch, n \psi \cdot \prod_{i=1}^{n \downarrow \psi_m} \bar{q} y_{m,i}) \cdot \nu \left| \prod_{i=1}^{n \downarrow \psi_m} (z_{m,i}) \cdot \rho_m \right. \right\rangle.$$

С помощью операций над атрибутами следующего правила общая МПС дополняется новыми оценками:

$$s_5 = \left\langle \prod_{m=1}^M (\nu \left| \prod_{i=1}^{n \downarrow \psi_m} (z_{m,i}) \cdot \rho_m \right. \right\rangle \rightarrow \prod_{m=1}^M (\prod_{i=1}^{n \downarrow \psi_m} \bar{q} z_{m,i} \cdot \rho_m) \cdot \prod_{p, N} \gamma \rightarrow \prod_{m=1}^M (\prod_{i=1}^{n \downarrow \psi_m} \bar{q} z_{m,i} \cdot \rho_m) \cdot \prod_{p, N} \gamma \cdot all \eta \rangle,$$

$$\tau_1 g_5 = \left\langle \prod_{m=1}^M (\prod_{i=1}^{n \downarrow \psi_m} (\prod_{j=1}^{n \downarrow \psi_m} (a \downarrow \gamma_{u \downarrow z_{m,i}, u \downarrow z_{m,j}} := a \downarrow \beta_{m,i,j}; h \downarrow \gamma_{u \downarrow z_{m,i}, u \downarrow z_{m,j}} := h \downarrow \beta_{m,i,j}))) \right\rangle.$$

Отношение подстановки применяется для расчета оценок элементов общей МПС по транзитивности и подсчета незаполненных элементов:

$$s_6 = \langle \rangle, \tau_1 g_6 = \langle all \downarrow \eta := 0; \prod_{i=1}^N \prod_{j=i+1}^N (\prod_{c=1}^N (\div (h \downarrow \gamma_{i,j} = 0; 4; (\div ((a \downarrow \gamma_{c,j} \neq 0) \& (a \downarrow \gamma_{i,c} \neq 0); 2; (sum := sum + a \downarrow \gamma_{i,c} * a \downarrow \gamma_{c,j}; q := q + 1))); a \downarrow \gamma_{i,j} := sum / q; h \downarrow \gamma_{i,j} := 0; h \downarrow \gamma_{j,i} := 0; a \downarrow \gamma_{j,i} := \frac{1}{a \downarrow \gamma_{i,j}}); \div (a \downarrow \gamma_{i,j} = 0; 1; all \downarrow \eta := all \downarrow \eta + 1)) \rangle.$$

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

s_7 – отношение подстановки для сравнения альтернатив в группах после применения МАИ. Если порядок альтернатив в группе изменился, то соответствующий атрибут устанавливается в единицу:

$$s_7 = \left\langle \prod_{m=1}^M (ch_n \psi \cdot \prod_{i=1}^{n \downarrow \psi_m} (-y_{m,i}) \cdot \prod_{i=1}^{n \downarrow \psi_m} (-z_{m,i}) \cdot \bar{\lambda}_m) \rightarrow \right. \\ \left. \rightarrow \prod_{m=1}^M (ch_n \psi \cdot \prod_{i=1}^{n \downarrow \psi_m} (-y_{m,i}) \cdot \prod_{i=1}^{n \downarrow \psi_m} (-z_{m,i}) \cdot \bar{\lambda}_m); \right. \\ \left. \tau_0 g_7 = \left\langle \prod_{m=1}^M (ch \downarrow \psi_m := 0; \prod_{i=1}^{n \downarrow \psi_m} (\div (name \downarrow y_{m,i} = name \downarrow z_{m,i}; \right. \right. \\ \left. \left. 3; (v \downarrow y_{m,i} := v \downarrow z_{m,i}; name \downarrow y_{m,i} = name \downarrow z_{m,i}; \right. \right. \\ \left. \left. u \downarrow y_{m,i} = u \downarrow z_{m,i}); \div (name \downarrow y_{m,i} \neq name \downarrow z_{m,i}; \right. \right. \\ \left. \left. 1; ch \downarrow \psi_m := 1) \right\rangle . \right.$$

Отношение s_8 используется для расчета вектора приоритетов и отношения согласованности для общей матрицы, если положение альтернатив в группах не изменилось:

$$s_8 = \left\langle \prod_{m=1}^M (ch_n \psi \cdot \prod_{i=1}^{n \downarrow \psi_m} (-y_{m,i}) \cdot \prod_{i=1}^{n \downarrow \psi_m} (-z_{m,i}) \cdot \bar{\lambda}_m) \cdot \right. \\ \left. \cdot \bar{\lambda}_m \rightarrow \bar{\lambda}_m \right\rangle, \\ \tau_0 g_8 = \left\langle f := 0; \prod_{m=1}^M (\div (ch \downarrow \psi_m = 1; 1; f := 1)); \right. \\ \left. \div (f = 1; 1; d_9 := 1); \div ((f = 0) \& (all \downarrow \eta = 0); 1; d_8 := 1); \right\rangle \\ \tau_1 g_8 = \left\langle is \downarrow \bar{\lambda} := \bar{h}(\bar{\lambda}); \bar{r} \downarrow \bar{\lambda} := \bar{\lambda}(\bar{\lambda}) \right\rangle.$$

Отношение подстановки s_9 применяется для перегруппировки альтернатив. Операции над атрибутами позволяют установить атрибуты альтернатив в новых группах:

$$s_9 = \left\langle \prod_{m=1}^M (ch_n \psi \cdot \prod_{i=1}^{n \downarrow \psi_m} (-y_{m,i}) \cdot \prod_{i=1}^{n \downarrow \psi_m} (-z_{m,i}) \cdot \bar{\lambda}_m) \cdot \right. \\ \left. \cdot all \eta \rightarrow \prod_{m=1}^{M-1} (ch_n \psi'_m \cdot \prod_{i=1}^{n \downarrow \psi'_m} (-y_{m,i}) \cdot \prod_{i=1}^{n \downarrow \psi'_m} (-z_{m,i}) \cdot \bar{\lambda}_m) \cdot \right. \\ \left. \tau_0 g_9 = \left\langle \prod_{m=1}^{M-1} (l := \lfloor \frac{n \downarrow \psi'_m}{2} \rfloor; n \downarrow \psi'_m := l + 2; \right. \right. \\ \left. \prod_{i=1}^l (name \downarrow y'_{m,i} := name \downarrow z_{m,l+i}; \right. \\ \left. p \downarrow y'_{m,i} := p \downarrow z_{m,l+i}; v \downarrow y'_{m,i} := v \downarrow z_{m,l+i}; \right. \\ \left. \div (name \downarrow y'_{m,i} = name \downarrow z_{m,i}; 1; v \downarrow y'_{m,i} := v \downarrow z_{m,i}); \right. \\ \left. \div (name \downarrow y'_{m,i} \neq name \downarrow z_{m,i}; 1; ch \downarrow \psi'_m := 1) \right\rangle .$$

$$u \downarrow y'_{m,i} := u \downarrow z_{m,l+i}; \prod_{i=1}^2 (name \downarrow y'_{m,i+l} := name \downarrow z_{m+1,i}; \\ p \downarrow y'_{m,i+l} := p \downarrow z_{m+1,i}; v \downarrow y'_{m,i+l} := v \downarrow z_{m+1,i}; \\ u \downarrow y'_{m,i+l} := u \downarrow z_{m+1,i}); \\ \tau_1 g_9 = \left\langle \prod_{m=1}^{M-1} (\prod_{i=1}^{n \downarrow \psi'_m} (\prod_{j=1}^{n \downarrow \psi'_m} (a \downarrow \beta_{m,i,j} := a \downarrow \gamma_{u \downarrow y_{m,i}, u \downarrow y_{m,j}; \right. \\ \left. h \downarrow \beta_{m,i,j} := h \downarrow \gamma_{u \downarrow y_{m,i}, u \downarrow y_{m,j}}))) \right\rangle .$$

Отношение подстановки s_{10} для использования реализации классического МАИ для новых групп альтернатив:

$$s_{10} = \left\langle \prod_{m=1}^{M-1} (ch_n \psi'_m \cdot \prod_{i=1}^{n \downarrow \psi'_m} (-y'_{m,i}) \cdot \bar{\beta}_m \cdot \rho_m) \rightarrow \right. \\ \left. \rightarrow \prod_{m=1}^{M-1} (ch_n \psi'_m \cdot \prod_{i=1}^{n \downarrow \psi'_m} (-y'_{m,i}) \cdot v \downarrow \prod_{i=1}^{n \downarrow \psi'_m} (-z_{m,i}) \cdot \bar{\lambda}_m \cdot \right. \\ \left. \cdot \bar{\beta}_m \cdot \rho_m \cdot \prod_{i=1}^{n \downarrow \psi'_m} (-y'_{m,i}) \cdot p, k_p \right\rangle .$$

Следующее правило содержит отношение подстановки для получения результата ранжирования по МАИ в каждой группе и сохранения в общей МПС введенных экспертом оценок:

$$s_{11} = \left\langle \prod_{m=1}^{M-1} (v \downarrow \prod_{i=1}^{n \downarrow \psi'_m} (-z_{m,i}) \cdot \bar{\lambda}_m) \cdot \bar{\beta}_m \cdot \rho_m \cdot \right. \\ \left. \rightarrow \prod_{m=1}^{M-1} (\prod_{i=1}^{n \downarrow \psi'_m} (-z_{m,i}) \cdot \bar{\lambda}_m) \cdot \bar{\beta}_m \cdot \rho_m \cdot \right. \\ \left. \tau_1 g_{11} = \left\langle \prod_{m=1}^{M-1} (\prod_{i=1}^{n \downarrow \psi'_m} (\prod_{j=1}^{n \downarrow \psi'_m} (a \downarrow \gamma_{u \downarrow z_{m,i}, u \downarrow z_{m,j}} := a \downarrow \beta_{m,i,j}; \right. \\ \left. h \downarrow \gamma_{u \downarrow z_{m,i}, u \downarrow z_{m,j}} := h \downarrow \beta_{m,i,j}))) \cdot d_6 := 1; d_{12} := 1 \right\rangle .$$

Операции над атрибутами следующего правила позволяют определить изменения позиций альтернатив в группах после применения МАИ:

$$s_{12} = \left\langle \right\rangle, \tau_0 g_{12} = \left\langle \prod_{m=1}^{M-1} (ch \downarrow \psi'_m := 0; \right. \\ \left. \prod_{i=1}^{n \downarrow \psi'_m} (\div (name \downarrow y'_{m,i} = name \downarrow z_{m,i}; 1; v \downarrow y'_{m,i} := v \downarrow z_{m,i}); \right. \\ \left. \div (name \downarrow y'_{m,i} \neq name \downarrow z_{m,i}; 1; ch \downarrow \psi'_m := 1) \right\rangle .$$

Отношение подстановки s_{13} для расчета вектора приоритетов и отношения согласованности для общей матрицы, если положение альтернатив в группах не изменилось:

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

r – номер правила, i і j – номер першої і другої альтернативи пари, U – множество початкових нетерминалів, ${}_N \xi$ – нетерминал для позначення зв'язей альтернатив, ${}_p \rho$ – нетерминал для позначення зв'язей між критеріями, $\beta_{p,i,j}$ – нетерминали для позначення зв'язей між альтернативами i, j по p -ому критерію (для спрощення запису позначаються як матриця ${}_{p,N} \bar{\beta}$), ${}_{Q} \bar{\lambda}$ – матриця парних порівнянь для альтернатив (де $Q = [\bar{v}, is, N]$ – вектор атрибутів: \bar{v} – вектор пріоритетів МПС, is – відношення узгодженості матриці, N – кількість альтернатив).

Відношення підстановки $s_{1,0,0}$ служить для заміни заповнення МПС і ранжування альтернатив x_i по критерію k_p . Всі входні параметри аксиоми додаються в носитель

$$s_{1,0,0} = \left\langle \nu \left| \begin{array}{c} {}_{p,N} \bar{\beta} \cdot \prod_{i=1}^N ({}_q x_i) \\ {}_{p,N} \bar{\beta} \cdot {}_{N \times p,p} \bar{k} \end{array} \rightarrow {}_{p,N} \bar{\beta} \cdot \delta \cdot \mu \right. \right\rangle.$$

Слідуюче відношення підстановки застосовується, якщо вказано критерій ранжування:

$$s_{2,0,0} = \left\langle {}_{p,N} \bar{\beta} \cdot \delta \rightarrow \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^N ({}_p \beta_{i,j} \cdot k_p \rho) \right\rangle,$$

$$\tau_0 g_{2,0,0} = \left\langle \div ({}_p \bar{\beta} > 0; 1; d_{2,0,0} := 1), \right. \\ \left. \div ({}_p \bar{\beta} = 0; 1; d_{3,0,0} := 1) \right\rangle.$$

Відношення підстановки $s_{3,0,0}$ для формування МПС альтернатив, якщо не задано критерій:

$$s_{3,0,0} = \left\langle {}_{p,N} \bar{\beta} \cdot \delta \rightarrow \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^N ({}_p \beta_{i,j}) \right\rangle.$$

Слідуюче правило містить відношення підстановки для встановлення зв'язі між альтернативами. Операціями над атрибутами встановлюються оцінки зв'язей альтернатив:

$$s_{4,0,0} = \left\langle \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^N (\beta_{i,j} \rightarrow (x_i \circ x_j \circ \varepsilon) \cdot \beta_{i,j}) \right\rangle,$$

$$\tau_1 g_{4,0,0} = \left\langle a \downarrow (x_i \circ x_j \circ \varepsilon) := a \downarrow \beta_{i,j}, h \downarrow (x_i \circ x_j \circ \varepsilon) := h \downarrow \beta_{i,j} \right\rangle.$$

Правила для задання експертом значення парних порівнянь альтернатив, де $i = \overline{1, N}$ і $j = \overline{1+i, N}$:

$$s_{5,i,j} = \left\langle \right\rangle, \tau_1 g_{5,i,j} = \left\langle a \downarrow (x_i \circ x_j \circ \varepsilon) := \triangleright (x_i, x_j, \varepsilon), \right.$$

$$a \downarrow \beta_{i,j} := h \downarrow (x_i \circ x_j \circ \varepsilon); h \downarrow (x_j \circ x_i \circ \varepsilon) := 1,$$

$$a \downarrow (x_j \circ x_i \circ \varepsilon) := 1 / (a \downarrow (x_i \circ x_j \circ \varepsilon)),$$

$$\left. a \downarrow \beta_{j,i} := a \downarrow (x_j \circ x_i \circ \varepsilon); h \downarrow \beta_{i,j} := h \downarrow (x_j \circ x_i \circ \varepsilon) \right\rangle.$$

Відношення для перевірки заповненості МПС. Якщо матриця заповнена, то на основі операцій над атрибутами розраховується відношення узгодженості і заповнюється вектор пріоритетів для альтернатив:

$$s_{6,0,0} = \left\langle \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^N (x_i \circ x_j \circ \varepsilon)_{d_{6,0,0}} \rightarrow \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^N (x_i \circ x_j \circ \varepsilon) \cdot {}_{Q} \bar{\lambda} \right\rangle$$

$$\tau_0 g_{6,0,0} = \left\langle d_{6,0,0} := 1, full := 1, \right.$$

$$\prod_{i=1}^N \prod_{j=i+1}^N (\div (a \downarrow (x_i \circ x_j \circ \varepsilon) \leq 0; 1;$$

$$full := 0)), \div (full = 0; 1; d_{6,0,0} := 0) \left. \right\rangle,$$

$$\tau_1 g_{6,0,0} = \left\langle is \downarrow \bar{\lambda} := h({}_{p,N} \bar{\beta}); r \downarrow \bar{\lambda} := \lambda({}_{p,N} \bar{\beta}) \right\rangle.$$

Відношення $s_{7,0,0}$ вводить в конструкцію послідовність альтернатив з вагами, якщо відношення узгодженості МПС допустиме:

$$s_{7,0,0} = \left\langle \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^N (x_i \circ x_j \circ \varepsilon) \cdot {}_{Q} \bar{\lambda} \cdot \mu_{d_7} \rightarrow \prod_{i=1}^N ({}_q x_i) \cdot {}_{Q} \bar{\lambda} \right\rangle$$

$$\tau_0 g_{7,0,0} = \left\langle \div ((is \downarrow \bar{\lambda}) \leq 0, 01; 1; d_{7,0,0} := 1) \right\rangle,$$

$$\tau_1 g_{7,0,0} = \left\langle \prod_{i=1}^N (v \downarrow x_i := r_i \downarrow \bar{\lambda}); d_{7,0,0} := 0 \right\rangle.$$

Слідуюче множество правил ($i = \overline{1, N-1}$, $j = \overline{i+1, N}$) задає відношення для упорядкування альтернатив в відповідності з їх вагами по убиванню:

$$s_{8,i,j} = \left\langle (v \downarrow x_i \cdot v \downarrow x_j)_{d_{8,i,j}} \rightarrow (v \downarrow x_j \cdot v \downarrow x_i) \right\rangle,$$

$$\tau_0 g_{8,i,j} = \left\langle \div (v \downarrow x_j > v \downarrow x_i; 1; d_{8,i,j} := 1) \right\rangle.$$

Відношення підстановки $s_{9,0,0}$ використовується для встановлення зв'язі між альтернативами по заданому критерію:

$$s_{9,0,0} = \left\langle \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^N (\beta_{i,j} \cdot k_p \rho \rightarrow (x_i \circ x_j \circ k_p) \cdot \beta_{i,j}) \right\rangle,$$

$$\tau_1 g_{9,0,0} = \left\langle a \downarrow (x_i \circ x_j \circ k_p) := a \downarrow \beta_{i,j}, \right.$$

$$\left. h \downarrow (x_i \circ x_j \circ k_p) := h \downarrow \beta_{i,j} \right\rangle.$$

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Правила для задания экспертом значения парных сравнений альтернатив по p -ому критерию, где $i = \overline{1, N}$ и $j = \overline{1+i, N}$:

$$\begin{aligned} s_{10,i,j} &= \langle \rangle, \\ \tau_1 g_{10,i,j} &= \langle a_{\downarrow}(x_i \circ x_j \circ k_p) := \triangleright(x_i, x_j, k_p), \\ a_{\downarrow}\beta_{i,j} &:= a_{\downarrow}(x_i \circ x_j \circ k_p); h_{\downarrow}(x_i \circ x_j \circ k_p) := 1, \\ h_{\downarrow}\beta_{i,j} &:= h_{\downarrow}(x_i \circ x_j \circ k_p); a_{\downarrow}\beta_{j,i} := a_{\downarrow}(x_j \circ x_i \circ k_p); \\ a_{\downarrow}(x_j \circ x_i \circ k_p) &:= 1/a_{\downarrow}(x_i \circ x_j \circ k_p) \\ h_{\downarrow}(x_j \circ x_i \circ k_p) &:= 1; h_{\downarrow}\beta_{j,i} := h_{\downarrow}(x_j \circ x_i \circ k_p) \rangle. \end{aligned}$$

В операциях над атрибутами следующего правила проверяется заполненность МПС альтернатив по p -ому критерию. Если все заполнено, то рассчитывается отношение согласованности и заполняется вектор приоритетов для альтернатив, в противном случае правило не применяется:

$$\begin{aligned} s_{11,0,0} &= \langle \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^N (x_i \circ x_j \circ k_p) \quad d_{11,0,0} \rightarrow \\ &\rightarrow \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^N (x_i \circ x_j \circ k_p) \cdot \overline{\varrho \lambda} \rangle, \\ \tau_0 g_{11} &= \langle full := 1, d_{11,0,0} := 1, \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^N (\div(a_{\downarrow}(x_i \circ x_j \circ k_p) \leq 0; \\ &1; full := 0)), \div(full = 0; 1; d_{11,0,0} := 0) \rangle, \\ \tau_1 g_{11,0,0} &= \langle is_{\downarrow}\bar{\lambda} := \bar{h}_{(p,N)}(\bar{\beta}); \bar{r}_{\downarrow}\bar{\lambda} := \bar{\lambda}_{(p,N)}(\bar{\beta}) \rangle. \end{aligned}$$

Отношение $s_{12,0,0}$ применяется для формирования последовательности альтернатив, если МПС альтернатив имеет допустимый уровень согласованности. После подстановки на основании операций над атрибутами устанавливаются ранги альтернатив:

$$\begin{aligned} s_{12,0,0} &= \langle \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^N (x_i \circ x_j \circ k_p) \cdot \bar{\beta}_{p,N} \cdot \bar{\varrho} \cdot \bar{\lambda} \cdot \mu \quad d_{12,0,0} \rightarrow \\ &\rightarrow \bar{\beta}_{p,N} \cdot \prod_{i=1}^N (\bar{x}_i) \cdot \bar{\varrho} \bar{\lambda} \rangle, \\ \tau_0 g_{12,0,0} &= \langle \div((is_{\downarrow}\bar{\lambda}) \leq 0, 011; 1; d_{12,0,0} := 1) \rangle, \\ \tau_1 g_{12,0,0} &= \langle \prod_{i=1}^N (v_{\downarrow}x_i := r_{i,\downarrow}\bar{\lambda}); d_{12,0,0} := 0 \rangle. \end{aligned}$$

Реализацией КПС для одноуровневого МАИ является ранжированный список альтернатив,

заполненная МПС и вычисленные значения отношения согласованности для сформированной матрицы.

Научная новизна и практическая значимость

Разработанная модель конструктивного процесса ранжирования альтернатив модифицированным МАИС позволяет решать задачи с большим количеством критериев и альтернатив (больше десяти), а также может применяться в условиях неполных данных, так как часть оценок вводится экспертом, а часть рассчитывается на основании введенных. Данный метод позволяет улучшить согласованность экспертных суждений. Моделирование с применением КПС раскрывает широкие возможности для автоматизации гибридизации модификаций МАИ с учетом специфики задач.

Выводы

Построенная система моделей конструктивного процесса ранжирования альтернатив состоит из трех КПС, взаимодействующих на разных уровнях уточняющих преобразований. Выделение составляющих данного процесса позволяет независимо изменять отдельные модели, изменять их интерпретацию, что позволяет легко применять данный подход для решения более конкретных задач.

Формализация с помощью КПС позволяет перейти на более высокий уровень абстракции при описании метода решения задач принятия решений, что в свою очередь обеспечивает возможность для разработки программ, реализующих гибридные модификации методов принятия решений, в частности различных модификаций МАИ.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Колесникова, С. И. Модификация метода анализа иерархий для динамических наборов альтернатив / С. И. Колесникова // Прикладная дискретная математика. – 2009. – № 4 (6). – С. 102–109.
2. Миронова, Н. А. Интеграция модификаций метода анализа иерархий для систем поддержки принятия групповых решений / Н. А. Миро-

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

- нова // Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2011. – № 2 (25) – С. 47–54.
3. Саати, Т. Л. Об измерении неосязаемого. Подход к относительным измерениям на основе главного собственного вектора матрицы парных сравнений [Электронный ресурс] / Т. Л. Саати // Cloud of Science. – 2015. – Т. 2, № 1. – С. 5–40. Режим доступа: https://cloud-ofscience.ru/sites/default/files/pdf/CoS_2_1.pdf. – Загл. с экрана. – Проверено : 17.06.2016.
 4. Саати, Т. Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети / Т. Л. Саати. – Москва : Изд-во ЛКИ, 2008. – 360 с.
 5. Шинкаренко, В. И. Конструктивная модель адаптации структур данных в оперативной памяти: Часть I. Конструирование текстов программ / В. И. Шинкаренко, Г. В. Забула // Наука та прогрес транспорту. – 2016. – № 1 (61). – С. 109–121. doi: 10.15802/stp2016/60998.
 6. Шинкаренко, В. И. Конструктивно-продукционные структуры и их грамматические интерпретации. I. Обобщенная формальная конструктивно-продукционная структура / В. И. Шинкаренко, В. М. Ильман // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 5. – С. 8–16.
 7. Шинкаренко, В. И. Конструктивно-продукционные структуры и их грамматические интерпретации. II. Уточняющие преобразования / В. И. Шинкаренко, В. М. Ильман // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – № 6. – С. 15–28.
 8. Шинкаренко, В. И. Моделирование процессу ранжирования альтернатив методом анализа иерархий засобами конструкційно-продукційних структур / В. И. Шинкаренко, Т. М. Васецька // Математичні машини і системи. – 2016. – № 1. – С. 39–47.
 9. Expert Choice for Collaborative Decision Making [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://expertchoice.com/>. – Загл. с экрана. – Проверено : 17.06.2016.
 10. Saaty, T. L. Models, Methods, Concepts & Applications of the Analytic Hierarchy Process / T. L. Saaty, L. G. Vargas. – New York : Springer Science & Business Media, 2012. – 345 p.
 11. Saaty, T. L. Relative Measurement and Its Generalization in Decision Making Why Pairwise Comparisons are Central in Mathematics for the Measurement of Intangible Factors The Analytic Hierarchy/Network Process / T. L. Saaty // Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A: Matematicas. – 2008. – Vol. 102. – Iss. 2. – P. 251–318. doi: 10.1007/B-F03191825.
 12. Saaty, T. L. The possibility of group choice: pairwise comparisons and merging functions / T. L. Saaty, L. G. Vargas // Social Choice and Welfare. – 2012. – Vol. 38. – Iss. 3. – P. 481–496. doi: 10.1007/s00355-011-0541-6.
 13. The Group Decision Support System to Evaluate the ICT Project Performance Using the Hybrid Method of AHP, TOPSIS and Copeland Score / H. Setiawan, J. E. Istiyanto, R. Wardoyo, P. Santoso // Intern. J. of Advanced Computer Science and Applications. – 2016. – № 7 (4). – P. 334–341. doi: 10.14569/IJACSA.2016.070444.
 14. Shynkarenko, V. I. Reducing the number of expert judgments in analytic hierarchy process by sorting and survey management / V. I. Shynkarenko, T. M. Vasetska, E. Y. Boiko // Системні технології: регіон. міжвуз. зб. наук. пр. – Дніпропетровськ, 2016. – Вип. 2 (103). – С. 16–31.
 15. Super Decisions Software [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.superdecisions.com/>. – Загл. с экрана. – Проверено : 17.06.2016.

Т. М. ВАСЕЦЬКА^{1*}

^{1*}Каф. «Комп'ютерні інформаційні технології», Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, вул. Лазаряна, 2, Дніпро, Україна, 49010, тел./факс +38 (098) 237 05 21, ел. пошта tetyana@vasetsky.com, ORCID 0000-0001-7008-2839

МОДЕЛЮВАННЯ МОДИФІКОВАНОГО МЕТОДУ АНАЛІЗУ ІЄРАРХІЙ ЗАСОБАМИ КОНСТРУКТИВНО-ПРОДУКЦІЙНИХ СТРУКТУР

Мета. У дослідженні передбачається: 1) розширити можливості класичного методу аналізу ієрархій (МАІ) для великої кількості альтернатив та критеріїв; 2) побудувати модель конструктивного процесу прийняття рішень із використанням модифікованого методу аналізу ієрархій із сортуванням (МАІС). **Методика.**

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Для досягнення поставленої мети використовується механізм конструктивно-продукційних структур (КПС). Виконано уточнюючі перетворення узагальнюючої конструктивно-продукційної структури (УКПС). **Результати.** Розроблена модель конструктивного процесу представляє собою взаємодію трьох структур: 1) загальної структури КПС МАІС, яка дозволяє задати альтернативи та критерії, виконуючи декомпозицію ієрархічної структури задачі; 2) КПС групування та сортування, яка розбиває альтернативи (критерії) на групи та реалізує класичний однорівневий МАІ для кожної групи, а також розраховує оцінки парних порівнянь на основі введених даних; 3) КПС однорівневого класичного МАІ, яка дозволяє заповнити матрицю парних порівнянь та розрахувати ранги альтернатив. Всі три структури взаємодіють між собою на різних рівнях уточнюючих перетворень: через узгодження по даним на рівні конкретизації та використання реалізацій. Запропонована модель дозволила перейти на більш абстрактний рівень представлення розв'язку задач прийняття рішень для великої кількості критеріїв та альтернатив. **Наукова новизна.** За результатами роботи пропонується використовувати механізм КПС для формалізації модифікацій МАІ із сортуванням для розв'язку задач прийняття рішень із великою кількістю критеріїв та альтернатив. **Практична значимість.** Формалізація представлення як самого методу аналізу ієрархій, так і його модифікацій дозволяє розширити коло застосування даного методу, впорядкувати описи різних модифікацій МАІ. Таке представлення забезпечує можливість розробки програм для реалізації гібридних модифікацій методу. Використання різних інтерпретацій запропонованих в статті КПС дозволить використати інші підходи при визначенні узгодженості матриць парних порівнянь, розрахунку оцінок та рангів альтернатив і критеріїв.

Ключові слова: моделювання; конструктивно-продукційні структури; конструктивний процес; метод аналізу ієрархій; модифікація

T. M. VASETSKA^{1*}

^{1*}Dep. «Computer and Information Technologies», Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan, Lazaryan St., 2, Dnipro, Ukraine, 49010, tel. +38 (098) 237 05 21, e-mail tetyana@vasetsky.com, ORCID 0000-0001-7008-2839

MODELLING THE MODIFIED METHOD OF ANALYTIC HIERARCHY PROCESS BY MEANS OF CONSTRUCTIVE AND PRODUCTIVE STRUCTURES

Purpose. In the study it is supposed: 1) to extend the classical method of analytic hierarchy process (AHP) for a great number of alternatives and criteria; 2) to build a model of constructive decision making process using a modified method of analytic hierarchy process with sorting (AHPS). **Methodology.** To achieve this purpose the mechanism of constructive and productive structures (CPS) was used; the refining transformations of the generalized constructive-productive structure (GCPS) were fulfilled. **Findings.** The developed model of the constructive process is the interaction between the three structures: the general CPS of AHPS, which allows to set criteria and alternatives and performs the decomposition of task hierarchical structure; CPS of grouping and sorting, which divides alternatives (criteria) into groups and implements the classic single-level AHP for each group, as well as calculates estimates of paired comparisons based on the input data; CPS of single-level classic AHP, which allows to fill the matrix of paired comparisons and calculates the ranks of alternatives. All three structures interact at different levels of transformations: by data conformity at the level of concretization and using of implementations. The proposed model allowed moving to the more abstract level in presentation of decision making problem solving for a great number of criteria and alternatives. **Originality.** The paper proposes to use CPS mechanism for formalizing modifications of AHP with sorting for decision making problem solving with a great number of criteria and alternatives. **Practical value.** The formalization of the presentation of the analytic hierarchy process and its modifications allows extending the range of applications of this method, as well as unifying the description of various AHP modifications. Such presentation provides the possibility for developing the programs to implement the method hybrid modifications. Using different interpretations presented in the article of CPS will allow for other approaches in determining the coherence of pairwise comparison matrices, estimate calculation and ranks of alternatives and criteria.

Keywords: modelling; constructive and productive structure; constructive process; analytic hierarchy process; modification

REFERENCES

1. Kolesnikova S.I. Modifikatsiya metoda analiza ieyrarkhiy dlya dinamicheskikh naborov alternativ [Modification of hierarchies analysis method for dynamic set of alternatives]. *Prikladnaya diskretnaya matematika – Applied Discrete Mathematics*, 2009, no. 4 (6), pp. 102-109.
2. Mironova N.A. Integratsiya modifikatsiy metoda analiza iyerarkhiy dlya sistem podderzhki prinyatiya gruppovykh resheniy [Integration of modifications of hierarchy analysis method for support systems of group decision making]. *Radioelektronika, informatika, upravleniye – Electronics, Computer Science, Management*, 2011, no. 2 (25), pp. 47-54.
3. Saati T.L. Ob izmerenii neosyazayemogo. Podkhod k odnositelnym izmereniyam na osnove glavnogo sobstvennogo vektora matritsy parnykh sravneniy [On the measurement of the intangible. The approach to the relative measurements based on the main eigenvector of pairwise comparisons matrix]. *Cloud of Science*, 2015, volume 2, issue 1, pp. 5-40. Available at: https://cloudofscience.ru/sites/default/files/pdf/CoS_2_1.pdf (Accessed 17 June 2016).
4. Saati T.L. *Prinyatiye resheniy pri zavisimostyakh i obratnykh svyazyakh: Analiticheskiye seti* [Decision making at dependences and feedbacks: Analytic networks]. Moscow, LKI Publ., 2008. 360 p.
5. Shinkarenko V.I., Zabula H.V. Konstruktivnaya model adaptatsii struktur dannykh v operativnoy pamyati: Chast I. Konstruirovaniye tekstov programm. [Constructive model of data structures adaptation in ram: Part I. Program text constructing]. *Nauka ta prohres transportu – Science and Transport Progress*, 2016, no. 1 (61), pp. 109-121. doi 10.15802/stp2016/60998.
6. Shinkarenko V.I., Ilman V.M. Konstruktivno-produktsionnyye struktury i ikh grammaticheskiye interpretatsii. Obobshchennaya formalnaya konstruktivno-produktsionnaya struktura. [Constructive-synthesizing Structures and their Grammatical Interpretations. I. Generalized Formal Constructive-synthesizing Structure]. *Kibernetika i sistemnyy analiz – Cybernetics and Systems Analysis*, 2014, vol. 49, issue 5, pp. 1-15.
7. Shinkarenko V.I., Ilman V.M. Konstruktivno-produktsionnyye struktury i ikh grammaticheskiye interpretatsii. Obobshchennaya formalnaya konstruktivno-produktsionnaya struktura. [Constructive-synthesizing Structures and their Grammatical Interpretations. I. Generalized Formal Constructive-synthesizing Structure]. *Kibernetika i sistemnyy analiz – Cybernetics and Systems Analysis*, 2014, no. 6, pp. 15-28.
8. Shynkarenko V.I., Vasetska T.M. Modeliuvannia protsesu ranzhuvannia alternatyv metodom analizu iierarkhii zasobamy konstruktsiino-produktsiinykh struktur [Simulation of ranking process of alternatives using the method of analytic hierarchy by means of structurally-productive structures]. *Matematychni mashyny i systemy – Mathematical Machines and Systems*, 2016, issue 1, pp. 39-47.
9. Expert Choice for Collaborative Decision Making. Available at: <http://expertchoice.com/> (Accessed 17 June 2016).
10. Saati T.L., Vargas L.G. Models, Methods, Concepts & Applications of the Analytic Hierarchy Process. New York, Springer Science & Business Media Publ., 2012. 345 p.
11. Saaty T.L. Relative Measurement and Its Generalization in Decision Making Why Pairwise Comparisons are Central in Mathematics for the Measurement of Intangible Factors The Analytic Hierarchy/Network Process. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas*, 2008, vol. 102, issue 2, pp. 251-318. doi: 10.1007/BF03191825.
12. Saaty T.L., Vargas L.G. The possibility of group choice: pairwise comparisons and merging functions. *Social Choice and Welfare*, 2012, vol. 38, issue 3, pp. 481-496. doi: 10.1007/s00355-011-0541-6.
13. Setiawan H., Istiyanto J.E., Wardoyo R., Santoso P. The Group Decision Support System to Evaluate the ICT Project Performance Using the Hybrid Method of AHP, TOPSIS and Copeland Score. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, 2016, no. 7 (4), pp. 334-341. doi: 10.14569/IJACSA.2016.070444.

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

14. Shynkarenko V.I., Vasetska T.M., Boiko E.Y. Reducing the number of expert judgments in analytic hierarchy process by sorting and survey management. *Systemni tekhnologii. Rehionalnyi mizhvuzivskiyi zbirnyk naukovykh prats* [System technologies. Regional Interuniversity collection of scientific papers], 2016, vol. 2 (103), pp. 16-31.
15. Super Decisions Software. Available at: <http://www.superdecisions.com/> (Accessed 17 June 2016).

*Статья рекомендована к публикации д. физ.-мат.н., проф. В. Е. Белозеровым (Украина);
д.т.н., проф. В. И. Шинкаренко (Украина)*

Поступила в редколлегию: 22.03.2016

Принята к печати: 20.07.2016