ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)

Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського
національного університету залізничного транспорту, 2016, № 3 (63)

УДК 514.181.2

А. Д. МАЛЫЙ[1], Т. В. УЛЬЧЕНКО[2], А. С. ЩЕРБАК[3*], Ю. Я. ПОПУДНЯК[4],
Т. В. СТАРОСОЛЬСКАЯ[5]

[1]Каф. «Графика», Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта им. В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, Днепропетровск, Украина, 49010, тел. +38 (056) 713 56 49, эл. почта malyjanatolij@gmail.com, ORCID 0000-0002-2710-7532
[2]Каф. «Графика», Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта им. В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, Днепропетровск, Украина, 49010, тел. +38 (067) 724 47 22, эл. почта ulchenkotv@ya.ru, ORCID 0000-0003-2354-7765
[3*]Каф. «Графика», Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта им. В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, 49010 Днепропетровск, Украина, тел. +38 (067) 586 45 74, эл. почта pro-f@ukr.net, ORCID 0000-0003-1340-0284
[4]Каф. «Графика», Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта им. В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, Днепропетровск, Украина, 49010, тел. +38 (067) 774 17 47, эл. почта 19brit18@ukr.net, ORCID 0000-0002-1383-9863
[5]Каф. «Графика», Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта им. В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, Днепропетровск, Украина, 49010, тел. +38 (066) 791 35 94, эл. почта simatn@rambler.ru, ORCID 0000-0002-3851-9612

ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА С ТОЖДЕСТВЕННОЙ ПЛОСКОСТЬЮ

Цель. Работа направлена на исследование геометрических преобразований. Мы будем рассматривать так называемые «точечные» преобразования пространства. **Методика**. Наиболее важными являются взаимно однозначные преобразования. Они позволяют по свойствам исходного объекта (линии, поверхности, фигуры) и свойствам преобразования исследовать и изучать свойства преобразованного объекта. Во множестве взаимно однозначных нелинейных преобразований особое место занимают Кремоновы преобразования. Конструирование однопараметрических (расслояемых) преобразований осуществляется как однопараметрическое множество плоских преобразований (линейных и нелинейных). Плоскость, в которой задано конкретное преобразование, перемещается (преобразуется) в пространстве по определенному закону, образуя однопараметрическое множество плоскостей. Совокупность таких плоских преобразований составляет пространственное преобразование. **Результаты**. Авторами сконструированы графические алгоритмы и выведены уравнения преобразования, позволяющие строить наглядные изображения преобразованных поверхностей и осуществлять их исследование методами аналитической геометрии. **Научная новизна.** Выполнив элементарные алгебраические преобразования этого уравнения, получим уравнение циссоиды. Если плоскость ϕ непрерывно перемещать параллельно самой себе, то образуется поверхность, каркасом которой будет множество циссоид и множество фронтально-проецирующих прямых. **Практическая значимость.** Рассмотренное множество расслояемых алгебраических преобразований дает эффективное средство изучения новых кривых и поверхностей, получаемых преобразованием известных алгебраических линий и поверхностей. Приведенные графические алгоритмы позволяют наглядно изобразить преобразованные линии и поверхности. Рассмотренная методика составления аналитических формул конкретных преобразований позволяет изучать преобразованные линии и поверхности методами аналитической геометрии. Исследованные преобразования могут быть как угодно высокого порядка, что особенно важно при конструировании сложных технических поверхностей типа агрегатов летательных аппаратов, деталей водяных и газовых турбин, опор сооружений, находящихся в сильном потоке жидкости, и др. Вопросы моделирования пространства, в том числе построение графических плоскостных моделей пространства, актуальны как в теоретическом плане, так и в плане применения исследованных на их основе нелинейных поверхностей для конструирования технических форм деталей и агрегатов рабочих органов строительных машин, срединных поверхностей оболочек, поверхностей турбулентных лопаток и др.

Ключевые слова: моделирование пространства; квазилинейные модели; преобразование пространства; нелинейные поверхности; графическая конструкция; аксиоматическая конструкция

doi 10.15802/stp2016/74768

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)

Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту, 2016, № 3 (63)

Чрезвычайно важную и характерную особенность нашего ума представляет собой процесс, заключающийся в том, что мы относим одну вещь к другой.
Р. Ю. Дедекинд

Введение

Идея соответствия двух объектов дает мощные средства для изучения новых объектов и их свойств, как только установлены правила – закон соответствия между этими двумя объектами. Относительно геометрии этот закон определяется заданием определенного геометрического преобразования, переводящего один объект в другой.

Геометрические преобразования очень разнообразны. Мы будем рассматривать так называемые точечные преобразования пространства. В этом случае каждой точке пространства ставится в соответствие другая определенная точка этого же пространства и наоборот. Такое преобразование называется взаимно однозначным.

Аналитически точечное преобразование определяется формулами:

$$X = F_1\left(X', Y', Z'\right),$$

$$Y = F_2\left(X', Y', Z'\right),$$

$$Z = F_3\left(X', Y', Z'\right),$$

где (X, Y, Z) – координаты исходной точки прообраза, а (X', Y', Z') – координаты преобразованной точки-образа. Функции F_1, F_2, F_3 могут быть линейными или нелинейными. В первом случае преобразование будет взаимно однозначным, во втором − как правило, многозначным.

Методика

Наиболее важным, с нашей точки зрения, являются взаимно однозначные преобразования. Они позволяют по свойствам исходного объекта (линии, поверхности, фигуры) и свойствами преобразования исследовать и изучать свойства преобразованного объекта.

Во множестве взаимно однозначных нелинейных преобразований особое место занимают Кремоновы преобразования, названные так в честь Л. Кремоны, давшего связную теорию плоских нелинейных преобразований. Основная теорема Кремоновых преобразований плоскости о возможности разложения любого преобразования на произведение квадратичных была доказана еще в конце XIX века. Попытка доказать аналогичную теорему для пространственных Кремоновых преобразований до настоящего времени не увенчалась успехом. В связи с этим исследуются лишь некоторые группы преобразований и частные их виды. Не вникая глубоко в теорию Кремоновых преобразований, интересующихся отсылаем к источникам [6], [11], [12].

В настоящее время много внимания уделяется исследованию и конструированию так называемых расслояемых преобразований. [2], [4], [5], [13]. Конструирование однопараметрических (расслояемых) преобразований осуществляется, как однопараметрическое множество плоских преобразований как линейных, так и нелинейных. Плоскость, в которой задано конкретное преобразование, перемещается (преобразуется) в пространстве по определенному закону, образуя однопараметрическое множество плоскостей. Совокупность таких плоских преобразований составляет пространственное преобразование.

Проблема исследования таких преобразований актуальна как в теоретическом плане, так и в плане применения для конструирования технических форм поверхностей деталей и агрегатов, строительных машин, работающих в потоке жидкости или газа (опоры мостовых переходов, поверхности турбулентных лопаток водо- и газовых турбин, поверхности оболочек) и др.

Цель

Целью работы является конструирование и исследование пространственных преобразований на основе плоских преобразований, переводящих прямые линии в алгебраические кривые любого порядка, имеющих $(n-1)$ кратную особую точку и наоборот.

Прежде чем приступить к конструированию пространственных преобразований приведем некоторые сведения из теории алгебраических кривых [1], [10].

doi 10.15802/stp2016/74768

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)

Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту, 2016, № 3 (63)

1. Плоской алгебраической линией называется линия, задаваемая алгебраической функцией координат ее точек в виде:

$$F\left(X,Z\right)=0,\text{ или }\; Z=f\left(X\right). \qquad (1)$$

Другим способом задание кривой является параметрическое задание, при котором ее текущие координаты в отдельности, задаются как функция некоторого параметра:

$$X=X\left(t\right),\; Z=Z\left(t\right). \qquad (2)$$

Исключая из уравнений (2) параметр t, получим уравнение той же кривой в виде (1) и наоборот. Из уравнений (1) можно получить параметрическое задание кривой.

2. Наивысшая степень многочлена $F(X,Z)$ называется порядком кривой (1). Порядок кривой определяется числом точек пересечения кривой с произвольной прямой.

3. Алгебраическая кривая m-го порядка, в общем случае, определяется $n\left(n+3\right)/2$ точками.

4. Две алгебраические кривые d и h порядка m и n пересекаются в M,N точках соответственно.

5. Кратной (особой) точкой кривой называется точка, в которой пересекается несколько ветвей кривой, образуя двойные, тройные и т.д. точки в зависимости от порядка n кривой. Нераспадающаяся кривая порядка n не может иметь точек, кратности выше $n-1$ и больше чем $\left(n-1\right)\left(n-2\right)/2$ двойных точек.

Алгебраическая кривая может вообще не иметь кратных точек или иметь меньше указанных пределов.

Родом или жанром кривой является число p, которое является разностью между наибольшим числом двойных точек, которые может иметь кривая этого порядка, и их фактическим числом у данной кривой. Это определение справедливо и при наличии у кривой точек высшей кратности, если k считать за $k\left(k-1\right)/2$ двойных точек. Если кривая нулевого жанра, (т.е. она имеет максимально возможное число двойных точек), то она обладает важным свойством: координаты ее точек могут быть выражены рациональными функциями некоторого параметра.

Такие кривые называются уникурсальными. Всякая кривая, имеющая точку наивысшей возможной кратности $(n-1)$, является уникурсальной кривой. Любая прямая, проходящая через такую точку, пересекает кривую еще только в одной точке. Следовательно, между точками такой кривой и любой прямой можно установить взаимно однозначное соответствие центральным проецированием, если за центр проекций принять точку $(n-1)$ кратности.

6. Если $(n-1)$ кратную точку принять за начало координат, то уравнение кривой запишется в виде

$$f_n\left(X,Y\right)+f_{n-1}\left(X,Y\right)=0\,, \qquad (3)$$

где F_n и $F_{(n-1)}$ – однородные многочлены относительно X и Y в степени n и $n-1$ соответственно.

Сконструируем теперь расслояемое пространственное преобразование, порождаемое кривыми вида (3). В пространственно прямоугольной системе координат 0_{xyz} (рис. 1) зададим во фронтальной плоскости ϕ кривую s. В этой системе кривая s будет иметь уравнение

$$f_n\left(X',Z'\right)-f_{n-1}\left(X',Z'\right)=0\,. \qquad (4)$$

Разместим $(n-1)$ – кратную точку на оси Y в точке $0'$, а через точку ее пересечения с осью $X-A_1$ проведем горизонтально проецирующую прямую t.

Любая прямая d, проходящая через начало координат, пересечет кривую s в единственной точке A' (s-уникурсальная кривая), а прямую t в точке A. Таким образом, все точки кривой s могут быть спроектированы в точке прямой t и наоборот, то есть установлено взаимно однозначное преобразование. В этом преобразовании прямой t будет соответствовать кривая s и наоборот. Кривой s будет соответствовать прямая t.

Уравнение прямой d:

$$Z'=KX'\,, \qquad (5)$$

где K – угловой коэффициент прямой.

Решая совместно уравнение (4) и (5) получим координаты точки A'.

doi 10.15802/stp2016/74768

$$X' = \frac{f_{n-1}\left(1, K\right)}{f_n\left(1, K\right)},$$

$$Z' = \frac{K f_{n-1}\left(1, K\right)}{f_n\left(1, K\right)}.$$

Этим координатам будут соответствовать координаты точки $A(X, Y)$.

Поскольку координата X точки A на прямой t равна координате X' точки A' на кривой s, то первую из них можно определить как координату точки пересечения кривой s с осью X. Это приходится делать в каждом конкретном случае преобразования, имея определенно заданную кривую s.

Например, представителем множества кривых s (см. рис. 1) есть трисекритрисса Маклорена, кривая третьего порядка с двойной точкой $((n-1)$ кратный $)0'$:

$$a\left(Z^2 - 3X^2\right) + X\left(X^2 + Z^2\right) = 0.$$

Для определения точки пересечения этой кривой с осью X полагаем $Z = 0$, имеем:

$-3aX^2 + X^3 = 0,\ X^2 = 0$ – координата точки пересечения A_1 ее с осью X.

Таким образом, в каждом конкретном случае можно определить формулы преобразования в плоскости ϕ.

Перемещая прямую t вместе с точкой A_1 кривой s_1 вдоль оси X, получим множество горизонтально проецирующих прямых ∞^2 и соответствующий им пучок кривых s. Перемещая плоскость ϕ с установленным на ней преобразованием параллельно самой себе так, чтобы точка кратности $(n-1)$ кривой s перемещалась по оси Y, получим пространственное преобразование, в котором ∞^2 проецирующих прямых будет соответствовать ∞^2 кривых s.

Множество проецирующих прямых и кривых ϕ перспективны относительно горизонтальной плоскости проекции, поэтому эта плоскость в преобразовании остается неподвижной, тождественной.

Результаты

В каждой из плоскостей ϕ осуществляется одинаковое плоское преобразование, поэтому пространственное преобразование является расслояемым, а координаты Y соответственных точек остаются неизменными.

Любая кривая s описывает при перемещении цилиндр с поперечным сечением s. Этот цилиндр в пространственном преобразовании соответствует профильной плоскости β.

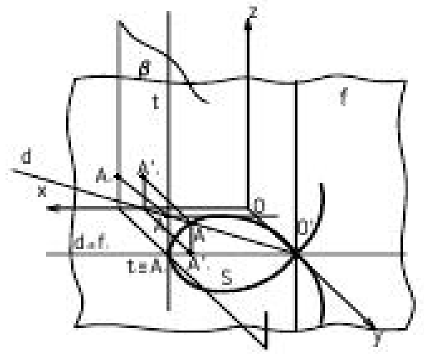

Рис. 1

Сконструируем, вначале геометрически, частный вид пространственного преобразования. В качестве уникурсальной кривой будет окружность. В пространственной прямоугольной системе координат 0_{xyz} (рис. 2) зададим произвольную точку $A(A_1, A_2)$. Координатные плоскости 0_{xy} и 0_{xz} примем за горизонтальную и фронтальную плоскости проекций соответственно. Через точку A проведем фронтальную плоскость $\varphi(\varphi_1, \varphi_3)$.

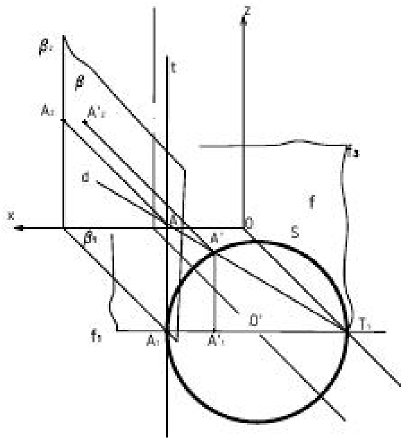

Рис. 2

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)

Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту, 2016, № 3 (63)

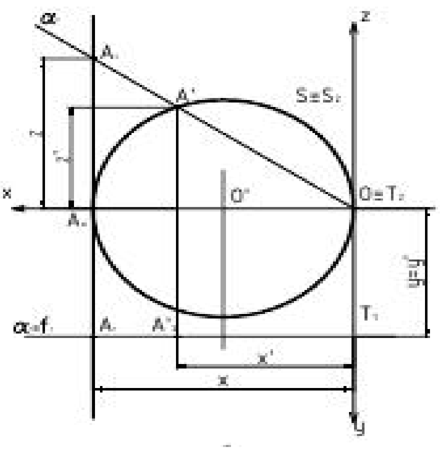

Рис. 3

В этой плоскости, на отрезке A_1T_2, как на диаметре, проведем окружность f. Она будет касательная к прямым t и φ_3. Через точку $T_1 \subset s$ проведем луч T_1A_1. Он пересечет окружность f в точке A'. Другими словами, мы построили центральную проекцию точки A из центра T_1 на окружность f. Таким образом, установлено взаимно однозначное преобразование между точками t и окружностью s. Каждой точке A прямой t соответствует на окружности f единственная точка A'_i и наоборот. Бесконечно удаленной точке A_i^∞ соответствует точка T_1. Прямой t соответствует вся окружность f. В каждой фронтальной плоскости устанавливается аналогичное соответствие, а их множество составит пространственное точечное преобразование, в котором окружности s_i образуют цилиндр, проецирующие прямые t_i отображаются на нормальные сечения s_i этого цилиндра f_i. Фронтально проецирующие прямые AA_1 преобразуются в образующие цилиндра.

Алгоритм построения соответственных точек на комплексном чертеже:

1. Через данную точку $A(A_1, A_2)$ проводим фронтальную плоскость ϕ (рис. 3).

2. На координатах x этой точки, как на диаметре, строим окружность.

3. Через точку $T(T_1, T_2)$, принадлежащей ϕ, проводим в плоскости ϕ прямую $d(d_1, d_2)$.

4. Прямая d проходит через точку A и пересекает окружность s в точке A'.

5. Точки A и A' соответствуют друг другу в рассматриваемом преобразовании [8].

Теперь составим уравнения этого преобразования. Окружность $f(f_1, f_2)$ записывается уравнением $X^2 + Z^2 = r^2$, $r = 0'0 \equiv T_2$.

Перенесем начало координат в точку T.

$$\left(X - r\right)^2 + Z^2 = r^2$$

Преобразуем это выражение

$$X^2 - 2rX + r^2 + Z^2 = r^2,$$

$$X^2 - 2rX + Z^2 = 0\,. \quad (6)$$

Уравнение (6) есть уравнение окружности $S(S_1, S_2)$ относительно точки $S(S_1, S_2)$ как начала координат.

Уравнение прямой d относительно этого же начала

$$Z = KX, \text{ где } K = \frac{Z}{X} = \frac{Z'}{X'} \text{ или } \frac{Z}{Z'} = \frac{X}{X'} \quad (7)$$

Решаем совместно уравнения (6), (7), получаем:

$$X'^2 - 2rX' + K^2X'^2 = 0;$$

$$X'\left(X' - 2r + K^2X'\right) = 0;$$

$X' = 0$ – точка $0 \equiv T_2$; $X' - 2r + K^2X' = 0$;

$$X'\left(1 + K^2\right) = 2r;$$

$$X' = \frac{2r}{1 + K^2} = \frac{2r}{1 + Z^2/X^2} = \frac{2rX^2}{X^2 + Z^2},$$

но поскольку $2r = X$ (рис. 2), имеем:

$$X' = X^3/X^2 + Z^2\,.$$

Эта формула позволяет по координатам X, Z исходной точки A определить координату X' преобразованной точки A'.

Подставляя в уравнение (6) вместо переменной X ее значение из (7) и производя преобразования, аналогичные вышеприведенным, получим:

$$Z' = \frac{X^2 Z}{X^2 + Z^2}\,.$$

doi 10.15802/stp2016/74768

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)

Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту, 2016, № 3 (63)

Запишем формулы прямого преобразования пространства:

$$X' = \frac{X^3}{X^2 + Z^2};$$

$$Y' = Y; \qquad (8)$$

$$Z' = \frac{X^2 Z}{X^2 + Z^2}.$$

Аналогично выводятся формулы обратного преобразования:

$$X = \frac{X'^2 + Z'^2}{X'};$$

$$Y = Y'; \qquad (9)$$

$$Z = \frac{Z'\left(X'^2 + Z'^2\right)}{X'^2}.$$

Научная новизна и практическая значимость

Формулы преобразования (8) и (9) показывают, что преобразование третьего порядка (кубическое) преобразует профильную плоскость $X = 2r$ во фронтально проецирующий цилиндр. В этом легко убедиться, подставив в ее уравнение вместо x ее выражение из первой формулы преобразования (9):

$$\frac{X'^2 + Z'^2}{X'} = 2r, \quad X'^2 - 2rX' + Z'^2 = 0 .$$

Множество фронтально-проецирующих прямых этой плоскости преобразуется во множество образующих цилиндра, а множество горизонтально-проецирующих прямых во множество окружностей цилиндра.

Горизонтальная плоскость преобразуется в поверхность третьего порядка. На комплексном рисунке (рис. 4) задана горизонтальная плоскость γ. Рассмотрим преобразование в плоскости $\phi(\phi_1) \parallel \Pi_2$. Возьмем на плоскости γ в плоскости ϕ произвольную точку $A(A_1, A_2)$. И по известному алгоритму графически построим ее образ $A'(A'_1, A'_2)$. Для этого проведем через начало координат прямую $O'A(O'A_1, O'A_2)$. Фронтальная проекция $O'_2 A_2$ пройдет через начало координат $O \equiv O'_2$. На отрезке OA_x, как на диаметре, построим окружность $S'(S'_1, S'_2)$. Точка $A'(A'_1, A'_2)$ пересечения этой окружности с прямой $O'A$ будет соответствовать точке $A(A_1, A_2)$ в преобразовании. Множество точек A' составит кривую третьего порядка – циссоиду Диоклеса.

Пользуясь формулами (4) преобразования запишем ее уравнение, как образ прямой $Z = 2a$. Вместо координаты Z подставим в уравнение прямой ее значение из третьей формулы (4):

$$\frac{Z'\left(X'^2 + Z'^2\right)}{X'^2} = 2a$$

Выполнив элементарные алгебраические преобразования этого уравнения, получим уравнение циссоиды в виде:

$$X'^2 = \frac{Z'^3}{2a - Z'}$$

Это уравнение показывает, что циссоида является алгебраической кривой 3-го порядка. Она симметрична относительно оси Z, а прямая $Z = 2a$ является ее ассимптомой, а начало координат есть точка возврата 1-го рода [3].

Если плоскость ϕ непрерывно перемещать параллельно самой себе, то образуется поверхность, каркасом которой будет множество циссоид и множество фронтально-проецирующих прямых (рис. 5) [9], [7].

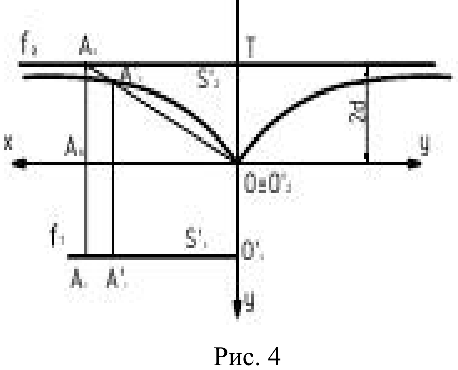

Рис. 4

doi 10.15802/stp2016/74768

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)

Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту, 2016, № 3 (63)

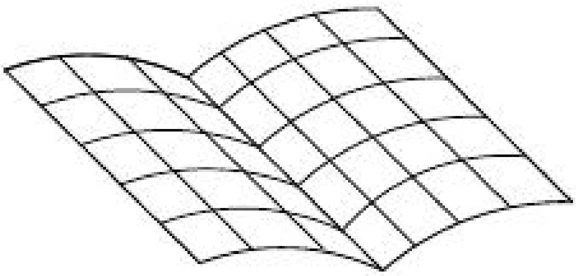

Рис. 5

Выводы

1. Рассмотренное множество расслояемых алгебраических преобразований дает эффективное средство изучения новых кривых и поверхностей, получаемых преобразованием известных алгебраических линий и поверхностей.

2. Приведенные графические алгоритмы позволяют наглядно изобразить преобразованные линии и поверхности.

3. Рассмотренная методика составления аналитических формул конкретных преобразований позволяет изучать преобразованные линии и поверхности методами аналитической геометрии.

4. Рассмотренные преобразования могут быть, как угодно высокого порядка, что особенно важно при конструировании сложных технических поверхностей типа агрегатов летательных аппаратов, деталей водяных и газовых турбин, опор сооружений, находящихся в сильном потоке жидкости и др.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Бюшгенс, С. С. Дифференциальная геометрия / С. С. Бюшгенс. – Москва ; Ленинград : Гос. изд-во технико-теоретич. лит-ры, 1940. – 300 с.
2. Джапаридзе, И. С. Преобразование пространства на базе однопараметрических семейств плоскостных преобразований / И. С. Джапаридзе, Г. С. Саакян // Начертательная геометрия : науч. тр. / Грузин. политехн. ин-т. – Тбилиси, 1974. – № 6. – С. 12–15.
3. Ермаков, А. В. Расслаиваемые кубические инволюции пространства с инвариантной квадрикой / А. В. Ермаков // Взаимно однозначные соответствия в проектировании машин лесной промышленности : науч. тр. / Моск. лесотехн. ин-т. – Москва, 1973. – № 54. – С. 51–57.
4. Иванов, Г. С. К вопросу моделирования алгебраических поверхностей центральными кремоновыми преобразованиями / Г. С. Иванов // Взаимно однозначные соответствия в проектировании машин лесной промышленности : науч. тр. / Моск. лесотехн. ин-т. – Москва, 1973. – № 54. – С. 80–92.
5. Иванов, Г. С. Кремоновы преобразования плоскости и пространства / Г. С. Иванов // Кремоновы преобразования и их приложения : науч. тр. / Моск. лесотехн. ин-т. – Москва, 1971. – № 39. – С. 85–119.
6. Квазилинейные графические модели пространства / А. Д. Малый, Ю. Я. Попудняк, Т. В. Ульченко, Т. В. Старосольская // Мости та тунелі: теорія, дослідження, практика. – 2014. – Вип. 5. – С. 51–56.
7. Плоский, В. А. Разработка инвариантной подсистемы геометрического моделирования объектов сложной формы / В. А. Плоский, В. М. Гурак // Автометрия. – 1990. – № 4. – С. 47–50.
8. Плоский, В. О. Апроксимація алгоритмів геометричного моделювання в задачах перезадання поверхонь / В. О. Плоский // Інженерна геодезія. – 1998. – № 40. – С. 161–164.
9. Попудняк, Ю. Я. Наближені розгортки сфери / Ю. Я. Попудняк, Т. В. Ульченко, А. С. Щербак // Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Дніпропетровськ, 2011. – Вип. 38. − С. 162–164.
10. Савелов, А. А. Плоские кривые : справ. рук-во / А. А. Савелов. – Москва : Гос. изд-во физико-матем. лит-ры, 1960. – 293 с.
11. Hadson, H. P. Cremona Transformations in Plane and Space. – Cambridge : Cambridge University Press, 1927. – 454 p.
12. Hassanzadeh, F. F. An Axiomatic Approach to Constructing Distances for Rank Comparison and Aggregation / F. F. Hassanzadeh, O. Milenkovic // IEEE Transactions on Information Theory. – 2014. – Vol. 60. – Iss. 10. – P. 6417–6439. doi: 10.1109/TIT.2014.2345760.
13. Xu, X. A spatial autoregressive model with a nonlinear transformation of the dependent variable / X. Xu, L. Lee // J. of Econometrics. – 2015. – Vol. 186. – Iss. 1. – P. 1–18. doi:10.1016/j. jeconom. 2014.12.005.

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)

Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського
національного університету залізничного транспорту, 2016, № 3 (63)

А. Д. МАЛИЙ[1], Т. В. УЛЬЧЕНКО[2], А. С. ЩЕРБАК[3*], Ю. Я. ПОПУДНЯК[4],
Т. В. СТАРОСОЛЬСЬКА[5]

[1]Каф. «Графіка», Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту ім. В. Лазаряна,
вул. Лазаряна, 2, Дніпропетровськ, Україна, 49010, тел. +38 (056) 713 56 49, ел. пошта malyjanatolij@gmail.com,
ORCID 0000-0002-2710-7532
[2]Каф. «Графіка», Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту ім. В. Лазаряна,
вул. Лазаряна, 2, Дніпропетровськ, Україна, 49010, тел. +38 (067) 724 47 22, ел. пошта ulchenkotv@ya.ru,
ORCID 0000-0003-2354-7765
[3*]Каф. «Графіка», Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту ім. В. Лазаряна,
вул. Лазаряна, 2, Дніпропетровськ, Україна, 49010, тел. +38 (067) 586 45 74, ел. пошта pro-f@ukr.net,
ORCID 0000-0003-1340- 0284
[4]Каф. «Графіка», Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту ім. В. Лазаряна,
вул. Лазаряна, 2, Дніпропетровськ, Україна, 49010, тел. +38 (067) 774 17 47, ел. пошта 19brit18@ukr.net,
ORCID 0000-0002-1383-9863
[5]Каф. «Графіка», Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту ім. В. Лазаряна,
вул. Лазаряна, 2, Дніпропетровськ, Україна, 49010, тел. +38 (066) 791 35 94, ел. пошта simatn@rambler.ru,
ORCID 0000-0002-3851-9612

ВЗАЄМНО ОДНОЗНАЧНІ НЕЛІНІЙНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРОСТОРУ З ТОТОЖНОЮ ПЛОЩИНОЮ

Мета. Робота спрямована на дослідження геометричних перетворень. Ми будемо розглядати так звані «точкові» перетворення простору. **Методика.** Найбільш важливим є взаємно однозначні перетворення. Вони дозволяють за властивостями вихідного об'єкта (лінії, поверхні, фігури) і властивостями перетворення досліджувати та вивчати властивості перетвореного об'єкта. У безлічі взаємно однозначних нелінійних перетворень особливе місце займають Кремонови перетворення. Конструювання однопараметричних (розшарованих) перетворень здійснюється як безліч однопараметричних плоских перетворень (лінійних і нелінійних). Площина, в якій задано конкретне перетворення, переміщується в просторі по визначеному закону, утворюючи безліч однопараметричних площин. Сукупність таких плоских перетворень становить просторове перетворення. **Результати**. Авторами сконструйовані графічні алгоритми і виведені рівняння перетворення, що дозволяють будувати наочні зображення перетворених поверхонь та здійснювати їх дослідження методами аналітичної геометрії. **Наукова новизна.** Виконавши елементарні алгебраїчні перетворення цього рівняння, отримаємо рівняння цисоїд. Якщо площину ϕ безперервно переміщувати паралельно самій собі, то утворюється поверхня, каркасом якої буде безліч цисоїд і безліч фронтально-проекційних прямих. **Практична значимість**. Розглянута безліч розшарованих алгебраїчних перетворень дає ефективний засіб вивчення нових кривих і поверхонь, одержуваних перетворенням відомих алгебраїчних ліній та поверхонь. Наведені графічні алгоритми дозволяють наочно зобразити перетворені лінії та поверхні. Досліджена методика складання аналітичних формул конкретних перетворень дозволяє вивчати перетворені лінії та поверхні методами аналітичної геометрії. Розглянуті перетворення можуть бути як завгодно високого порядку, що особливо важливо при конструюванні складних технічних поверхонь типу агрегатів літальних апаратів, деталей водяних і газових турбін, опор споруд, що знаходяться в сильному потоці рідини, та ін. Питання моделювання простору, в тому числі побудова графічних площинних моделей простору, актуальні як у теоретичному плані, так і в плані застосування досліджених на їх основі нелінійних поверхонь для конструювання технічних форм деталей та агрегатів робочих органів будівельних машин, серединних поверхонь оболонок, поверхонь турбулентних лопаток та ін.

Ключові слова: моделювання простору; квазілінійні моделі; перетворення простору; нелінійні поверхні; графічна конструкція; аксіоматична конструкція

A. D. MALYI[1], T. V. ULCHENKO[2], A. S. SHCHERBAK[3*], YU. YA. POPUDNIAK[4],
T. V. STAROSOLSKAYA[5]

[1]Dep. «Grafics», Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan,
Lazaryan St., 2, Dnipropetrovsk, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 713 56 49, e-mail malyjanatolij@gmail.com,
ORCID 0000-0002-2710-7532

doi 10.15802/stp2016/74768

[2]Dep. «Grafics», Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan, Lazaryan St., 2, Dnipropetrovsk, Ukraine, 49010, tel.+38 (067) 724 47 22, e-mail ulchenkotv@ya.ru, ORCID 0000-0003-2354-7765
[3*]Dep. «Grafics», Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan, Lazaryan St., 2, Dnipropetrovsk, Ukraine, 49010, tel. +38 (067) 586 45 74, e-mail pro-f@ukr.net, ORCID 0000-0003-1340-0284
[4]Dep. «Grafics», Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan, Lazaryan St., 2, Dnipropetrovsk, Ukraine, 49010, tel. +38 (067) 774 17 47, e-mail 19brit18@ukr.net, ORCID 0000-0002-1383-9863
[5]Dep. «Grafics», Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan, Lazaryan St., 2, Dnipropetrovsk, Ukraine, 49010, tel.+38 (066) 791 35 94,e-mail simatn@rambler.ru, ORCID 0000-0002-3851-9612

ONE-TO-ONE NONLINEAR TRANSFORMATION OF THE SPACE WITH IDENTITY PLANE

Purpose. Study of geometric transformations. We will consider the so-called point transformations of space. **Methodology.** The most important are one-to-one transformations. They allow exploring and studying the properties of the transformed object using the properties of the original object (line, surface and figure) and the properties of the transformation. Cremona transformations occupy a special place in the set of one-to-one nonlinear transformations. Construction of one-parameter (stratifiable) transformations is carried out as one-parameter set of plane transformations, both linear and non-linear ones. The plane, in which the specific transformation is prescribed, moves in space by a certain law forming a one-parameter set of planes. The set of such plane transformations makes up the space transformation. **Findings.** The designed graphics algorithms and the established transformation equations allow building the visual images of transformed surfaces and conducting their research by analytical geometry methods. **Originality.** By completing elementary algebraic transformations of this equation, we obtain the cissoids equation. If the plane ϕ is continuously moved parallel to itself, it results in occurrence of surface, whose carcass will be the set of cissoids and the set of front-projecting lines. **Practical value.** The considered set of stratifiable algebraic transformations gives an effective means for exploring new curves and surfaces obtained by transforming the known algebraic lines and surfaces. These graphic algorithms allow graphically depicting the transformed lines and surfaces. The considered procedure of drawing up analytical formulas of specific transformations allows us to study the transformed surfaces and lines using the methods of analytic geometry. The above transformations can be of arbitrary high order, which is especially important during the design of complex technical surfaces such as aircraft components, parts of water and gas turbines, supports of the structures subject to strong flow of liquid, etc. Space modelling issues, including the building of graphic plane models of space, are relevant both in theoretical terms and in terms of application of the non-linear surfaces investigated on their basis for constructing the technical forms of parts and aggregates of construction machine movable elements, the middle surfaces of shells, the surfaces of turbulent blade, etc.

Keywords: space modelling; quasi-linear model; space transformation; non-linear surface; graphic design; axiomatic design

REFERENCES

1. Byushgens S.S. *Differentsialnaya geometriya* [Differential geometry]. Moskow; Leningrad, Gosudarstvennoye izdatelstvovo tekhniko-teoreticheskoy literatury Publ., 1940. 300 p.
2. Dzhaparidze I.S., Saakyan G.S. Preobrazovaniye prostranstva na baze odnoparametricheskikh semeystv ploskostnykh preobrazovaniy [Transformation of the space on the basis of one-parameter families of the plane transformations]. *Nachertatelnaya geometriya – Descriptive Geometry*, 1974, no. 6, pp. 12-15.
3. Yermakov A.V. Rasslaivayemyye kubicheskiye involyutsii prostranstva s invariantnoy kvadrikoy [Stratified cubic involutions of the space with invariant quadric]. *Vzaimnoodnoznachnyye sootvetstviya v proyektirovanii mashin lesnoy promyshlennosti* [One-to-one correspondence in the design of machines for wood industry], 1973, issue 54, pp. 51-57.
4. Ivanov G.S. K voprosu modelirovaniya algebraicheskikh poverkhnostey tsentralnymi kremonovymi preobrazovaniyami [On the issue of modeling of algebraic surfaces using the central Cremona transformations]. *Vzaimnoodnoznachnyye sootvetstviya v proyektirovanii mashin lesnoy promyshlennosti* [One-to-one correspondence in the design of machines for wood industry], 1973, issue 54, pp. 80-92.

doi 10.15802/stp2016/74768

5. Ivanov G.S. Kremonovy preobrazovaniya ploskosti i prostranstva [Cremona transformations of the plane and space]. *Kremonovy preobrazovaniya i ikh prilozheniya* [Cremona transformations and their applications], 1971, issue 39, pp. 85-119.
6. Malyy A.D., Popudnyak Yu.Ya., Ulchenko T.V., Starosolskaya T.V. Kvazilineynyye graficheskiye modeli prostranstva [Quasi-linear graphical model of space]. *Mosty ta tuneli: teoriia, doslidzhennia, praktyka* [Bridges and Tunnels: Theory, Research, Practice], 2014, issue 5, pp. 51-56.
7. Ploskiy V.A., Gurak V.M. Razrabotka invariantnoy podsistemy geometricheskogo modelirovaniya obyektov slozhnoy formy [Development of invariant subsystem for geometric modeling of complex form objects]. *Avtometriya – Autometering*, 1990, no. 4, pp. 47-50.
8. Ploskyi V.O. Aproksymatsiia alhorytmiv heometrychnoho modeliuvannia v zadachakh perezadannia poverkhon [Approximation of algorithms for geometric modeling in problems of surfaces resetting]. *Inzhenerna heodeziia – Engineering Geodesy*, 1998, no. 40, pp. 161-164.
9. Popudniak Yu.Ya., Ulchenko T.V., Shcherbak A.S. Nablyzheni rozghortky sfery [Reamers of sphere are closed]. *Visnyk Dnipropetrovskoho natsionalnoho universytetu zaliznychnoho transportu imeni akademika V. Lazariana* [Bulletin of Dnipropetrovsk National Univesity of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan], 2011, issue 38, pp. 162-164.
10. Savelov A.A. *Ploskiye krivyye* [Plane curves]. Moskow, Gosudarstvennoye izdatelstvo fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 1960, 293 p.
11. Hadson H.P. Cremone transformations in plane and space. Cambridge University Press Publ., 1927. 454 p.
12. Hassanzadeh F.F., Milenkovic O. An Axiomatic Approach to Constructing Distances for Rank Comparison and Aggregation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2014, vol. 60, issue 10, pp. 6417-6439. doi: 10.1109/TIT.2014.2345760.
13. Xu X., Lee L. A spatial autoregressive model with a nonlinear transformation of the dependent variable. Journal of Econometrics, 2015, vol. 186, issue 1, pp. 1-18. doi:10.1016/j. jeconom. 2014.12.005.

Статья рекомендована к публикации д.т.н., проф. С. С. Тищенком (Украина); д.т.н., проф. В. Д. Петренком (Украина)

Поступила в редколегию: 02.02.2016
Принята к печати: 11.05.2016

doi 10.15802/stp2016/74768