

РУХОМИЙ СКЛАД І ТЯГА ПОЇЗДІВ

**УДК 621. 822.6.031:621.891**Л. Н. БОНДАРЕНКО<sup>1</sup>, Н. А. БАБЯК<sup>2</sup>, С. А. ЯКОВЛЕВ<sup>3\*</sup>, С. А. ИСТИН<sup>4</sup>,  
Г. Ю. МОСКАЛЕВ<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Каф. «Прикладная механика», Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, Днепропетровск, Украина, 49010, тел. +38 (056) 793 19 19, эл. почта admin\_diit@inbox.ru, ORCID 0000-0001-6602-2745

<sup>2</sup>Каф. «Транспортные технологии», Львовский филиал, Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, ул. И. Блажкевич, 12а, Львов, Украина, 79052, тел. +38 (097) 907 50 72, эл. почта babjk@mail.ru, ORCID 0000-0001-5125-9133

<sup>3\*</sup>Каф. «Военная подготовка специалистов Государственной специальной службы транспорта», Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, Днепропетровск, Украина, 49010, тел. +38 (056) 793 19 19, эл. почта Sergei\_jak@mail.ru, ORCID 0000-0002-6431-4303

<sup>4</sup>Каф. «Военная подготовка специалистов Государственной специальной службы транспорта», Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, Днепропетровск, Украина, 49010, тел. +38 (056) 793 19 19, эл. почта admin\_diit@inbox.ru, ORCID 0000-0002-8114-8722

<sup>5</sup>Каф. «Военная подготовка специалистов Государственной специальной службы транспорта», Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, Днепропетровск, Украина, 49010, тел. +38 (056) 793 19 19, эл. почта admin\_diit@inbox.ru, ORCID 0000-0002-9335-7716

**СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ СОПРОТИВЛЕНИЯМИ КАЧЕНИЮ И СКОЛЬЖЕНИЮ В ПОДШИПНИКАХ КАЧЕНИЯ**

**Цель.** Об одной из причин скольжения при качении известно со второй половины XIX века, тогда считалось, что сопротивление скольжению появляется в месте контакта вследствие разных скоростей на дуге контакта. Только в середине XX столетия было доказано, что это сопротивление составляет незначительную величину в сопротивлении качению. Однако (по неизвестной причине) не учитывается то обстоятельство, что в подшипниках качения на практике почти в равных отношениях может вращаться как внутреннее кольцо при неподвижном наружном, так и наоборот. При этом не учитывалось обстоятельство, что шарик или ролик в подшипниках качения за один оборот проходит разный путь по дорожке катания наружной и внутренней обойм подшипника. Это обстоятельство не учитывается и при определении расчетной величины коэффициента трения подшипников качения, приведенного к валу. Поэтому целью работы является установление влияния длины пути по дорожке катания наружной и внутренней обойм подшипника на определение расчетной величины коэффициента трения подшипников качения, приведенного к валу. **Методика.** В основе методики решения – теория плоского движения твердого тела, теория контактных деформаций Герца и аналитические зависимости для определения коэффициента трения качения. **Результаты.** Полученные зависимости по определению сопротивления качению шариков или роликов по беговым дорожкам внутренней и наружной обойм, а также учет разности пути качения по ним позволяют аналитически получить сопротивление качению и скольжению для любого размера подшипников и различных устройств подшипниковых узлов. Также возможно на стадии проектирования узлов качения оперировать не только конструкцией, но и материалами узла. **Научная новизна.** С помощью аналитических зависимостей для определения сопротивления качению тел при точечном и линейном контактах, а также учета разности пути при качении шарика или ролика по внешней и внутренней обоймам подшипника можно более точно найти сопротивление качению в подшипниках. **Практическая значимость.** Полученные зависимости позволяют проектировать подшипниковые узлы с минимальной энергоемкостью.

*Ключевые слова:* подшипник; скольжение; качение; контакт; напряжение; сопротивление

**Введение**

Считается, что шариковые и роликовые подшипники позволяют заменить во вращательной паре трение скольжения трением качения, появляющимся при качении шариков или роликов по внутренней и наружной обоймам [4, 10, 13].

Однако, по неизвестной причине не учитывается то обстоятельство, что в подшипниках качения на практике почти в равных отношениях может вращаться как внутреннее кольцо при неподвижном наружном, так и наоборот.

Появляющиеся при этом сопротивления вращению имеют разные величины и при вра-

## РУХОМИЙ СКЛАД І ТЯГА ПОЇЗДІВ

щених зовнішнього кільця причини являються аналогом задачі, розглянутої давньогрецьким математиком Героном [3] при переміщенні двох циліндрів різного діаметра, маючих жорстку зв'язь. Однак, не маючи ще законів тертя ковзання, а тим більше качення, його висновки несуть філософський характер.

Не відвергаючи повністю вплив тертя ковзання на опір в підшипниках качення, відзначимо, що першу аналітичну залежність по його визначенню отримав О. Рейнольдс [15]. Однак його теорія була помилковою, оскільки він вважав, що причина опору каченню лежить в ковзанні в місці контакту. Якщо це так, в чому ніхто не сумнівався ввиду великого авторитету автора, то підшипники качення почали змащувати також, як і підшипники ковзання. Другу причину Рейнольдс і не міг передбачити, оскільки ще не існувало теорії контактних деформацій Герца. Тільки через 90 років Д. Табор [16] довів експериментально, що роль ковзання при каченні незначительна. Їм же належать і теоретичні залежності для визначення коефіцієнта тертя качення. При лінійному контакті коефіцієнт тертя качення

$$k = \frac{2b}{3\pi} \alpha, \quad (1)$$

при точковому контакті

$$k = \frac{3}{16} b \alpha, \quad (2)$$

де  $b$  – половина ширини плями контакту згідно Герца;  $\alpha$  – коефіцієнт гістерезисних втрат.

Оскільки експериментальне визначення коефіцієнта  $\alpha$  вимагає значущих витрат і часу, то в [1, 2, 6, 9] запропоновано експериментально – аналітичну залежність для визначення  $\alpha$ , що містить лише загальноприйнятні розміри і механічні контакти.

По аналогії з (1) і (2) формули отримані в наступному вигляді

$$k = 0,225 \cdot v \cdot \exp(-1,2r);$$

$$k = 0,16 \cdot b \cdot \exp(0,2r),$$

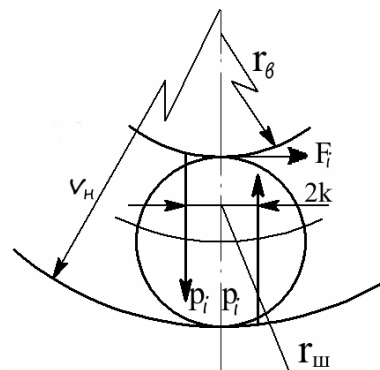
де  $r$  – радіус тіла качення в метрах.

К нерешеним частям проблеми необхідно віднести рішення наступних двох задач.

Одною з перших є задача, пов'язана з помилкою Рейнольдса. Оскільки основною причиною опору каченню є ковзання, то в [7, 10, 14] коефіцієнти тертя качення ролика по зовнішній і внутрішній ободам прийняті однаковими і дотична сила з реакції  $P_i$  ролика (рис. 1, а)

$$F_i = P_i(k/r_{ш}). \quad (3)$$

а



б

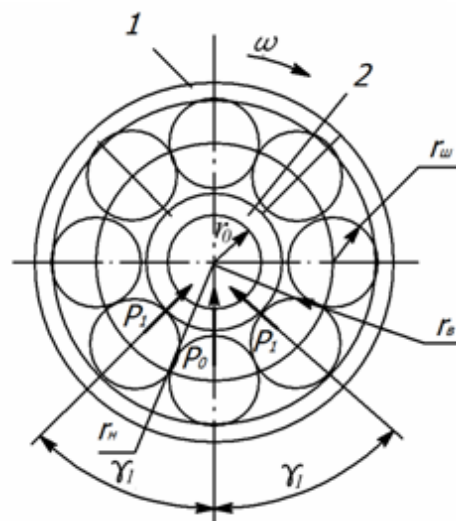


Рис. 1. К определению касательной силы при вращении внутренней обоймы [10] (а) и скоростей точек наружной обоймы и шарика (б)

Вторая задача, которую необходимо решить – учесть, какая обойма вращается. На практике в узлах качения может вращаться как внутренняя обойма при неподвижной наружной обойме, так и наоборот. В справочной же литературе это обстоятельство не учитывается и, на-

## РУХОМИЙ СКЛАД І ТЯГА ПОЇЗДІВ

приклад, КПД канатних блоків дається однаковим, хоча, особливо при неподвижних блоках, може вращатися люба обойма.

Особенностью работы подшипника является то, что шарики (ролики) проходят различные пути за один оборот внутренней или наружной обоймы.

При упрощенной схеме подшипника задача решается следующим образом. Если наружная обойма вращается с угловой скоростью  $w_n$  (рис. 1, б), то скорость точки 1 как точки, принадлежащей наружной обойме

$$v_n = (r_b + 2r_{ш})w_n = 2\pi n(2r_{ш} + r_b), \quad (4)$$

где буквы  $v$ ,  $n$ ,  $ш$  – принадлежность размеров и скоростей к внутренней, наружной обоймам и шарика;  $n$  – частота вращения как внутренней, так и наружной обоймы.

Естественно, что мгновенный центр скоростей этой обоймы будет находиться в точке 2 соприкосновения с шариком. Если предположить, что проскальзывание между наружной обоймой и шариком отсутствует, то  $\vec{V}_1 = \vec{V}_2$ .

Длина дорожки катания ролика по наружной обойме  $l_n = 2\pi r_n$ , а по внутренней –  $l_b = 2\pi r_b$  и разница в пути составит  $\Delta l_n = 2\pi(r_n - r_b)$ , то есть на этом пути будет происходить скольжение ролика по внутренней обойме.

В случае вращения внутренней обоймы при неподвижной наружной обойме разница  $\Delta l$  говорит о том, что по наружной обойме ролик пройдет путь, равный пути по внутренней обойме.

### Цель

Найти аналитически приведенный коэффициент трения шариковых и роликовых подшипников с учетом разной величины коэффициента трения качения по внешней и внутренней обоймам и учесть разность пути качения по ним.

### Методика

Методика решения основана на теории плоского движения твердого тела, теории контактных деформаций Герца и аналитических

зависимостях для определения коэффициента трения качения.

### Результаты

1. Шариковый подшипник (рис. 1).

Число шариков в подшипнике [8] из условия сборки

$$z = 2,9 \frac{D + d}{D - d}. \quad (5)$$

Сила, действующая на наиболее нагруженный шарик

$$P_0 = \frac{5Q}{z}. \quad (6)$$

Радиус шарика

$$r_{ш} \approx 0,3(D - d). \quad (7)$$

Радиус желоба беговых дорожек

$$r_{ж} = 1,03r_{ш}.$$

При числе шариков  $z \geq 10$  нагрузка на подшипник  $Q$  (например, при  $z = 10$ )

$$Q = P_0 \left( 1 + 2 \cos^{5/2} \gamma + 2 \cos^{5/2} 2\gamma \right),$$

где  $\gamma$  – угол между шариками (здесь  $\gamma = 36^\circ$ ).

Исходя из этого, нагрузка на боковые шарик

$$P_1 = P_0 \cos^{5/2} \gamma; \quad P_2 = P_0 \cos^{5/2} 2\gamma.$$

Величина полуширин пятен контакта в формулах (3) и (4) определяются из выражений:

$$b_b = 1,397n_b \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{1}{\frac{1}{r_{ш}} - \frac{1}{r_{ж}} - \frac{1}{r_b}}},$$

где  $n_b$  – коэффициент, зависящий от уравнения эллипса касания

$$\frac{A}{B} = \left( \frac{1}{r_{ш}} - \frac{1}{r_{ж}} \right) / \left( \frac{1}{r_{ш}} + \frac{1}{r_b} \right).$$

В формулах (4)–(7)  $D$  – наружный диаметр подшипника;  $d$  – внутренний диаметр подшипника;  $r_b \approx (d/2) + r_{ш}$  – радиус беговой дорожки

## РУХОМИЙ СКЛАД І ТЯГА ПОЇЗДІВ

внутреннего кольца. При  $b_b$  для наиболее загруженного шарика необходимо подставлять величину  $P_0$ , а для бокового шарика  $P_1$  или  $P_2$  в зависимости от количества шариков.

При качении шарика по наружному кольцу

$$b_n = 1,397 n_n \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{1}{\frac{1}{r_{ш}} - \frac{1}{r_{ж}} - \frac{1}{r_n}}},$$

где  $n_n$  определяется как функция

$$\frac{A}{B} = \left( \frac{1}{r_{ш}} - \frac{1}{r_{ж}} \right) / \left( \frac{1}{r_{ш}} - \frac{1}{r_n} \right);$$

где  $r_n \approx (d/2) + 3r_{ш}$  – радиус беговой дорожки наружного кольца.

Для учета влияния размера подшипника на КПД канатного блока и коэффициента сопротивления движению крановых колес рассмотрим два подшипника качения одной серии, но существенно разных размеров.

1. Подшипник № 304:  $d = 20$  мм,  $D = 52$  мм, статическая нагрузка  $Q = 7,94$  кН, средний диаметр  $D_{cp} = (D + d)/2 = 36$  мм,  $d_{ш} = 9,6$  мм, число шариков  $z = 7$  при  $\gamma_1 = 360/7 = 51,4^\circ$ ,  $r_b = 14,8$ ;  $r_n = 24,4$  мм;  $r_{ж} = 4,944$  мм.

Полуширины пятен контакта шарика, загруженного силой  $P_0 = 3150$  Н: с внутренней обоймой  $b_{b0} = 0,23$  мм при  $n_b = 0,38$ ; с наружным кольцом  $b_{n0} = 0,3$  мм при  $n_n = 0,42$ . Соответственно загруженного силой  $P_1 = 1740$  Н боковых шариков:  $b_{b1} = 0,155$  мм;  $b_{n1} = 0,202$  мм. Сопротивление качению наиболее загруженного шарика: по внутреннему кольцу  $W_{b0} = 44,45$  Н при коэффициенте трения качения  $k_{b0} = 0,0434$  мм, по наружному кольцу  $W_{n0} = 57,77$  Н при  $k_{n0} = 0,0564$  мм; двух боковых шариков по внутреннему кольцу  $W_{b1} = 18,30$  Н при  $k_{b1} = 0,029$  мм и  $W_{n1} = 23,9$  Н при  $k_{n1} = 0,038$  мм.

Найдем работу сил трения качения за один оборот внутреннего и наружного колец:

– при вращении внутреннего кольца

$$A_b = 2\pi r_b (W_{b0} + W_{b1} + W_{n0} + W_{n1}) = 13,4 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

– при вращении наружного кольца

$$A_n = 2\pi [r_n (W_{n0} + W_{n1}) + r_b (W_{b0} + W_{b1})] + 2\pi f (P_0 + 2P_1)(r_n - r_b) = 58,24 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Суммарная работа сил трения качения шариков по внутреннему и наружному кольцам без учета трения скольжения шариков  $A_{кач} = 26,5$  Н·м, с учетом скольжения

$$\bar{A} = A_{кач} + A_{ск} = 26,5 + 55,2 = 81,7 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

то есть на скольжение в этом шарикоподшипнике при вращении наружного кольца приходится половина от сопротивления качению при  $f = 0,1$  (густая смазка).

По этому подшипнику трудно определить величины коэффициентов сопротивления движению и трения подшипника, приведенного к цапфе, применяемых при расчете сопротивлений в ходовых частях кранов и канатных блоках ввиду малой величины  $Q$ .

2. Подшипник № 312:  $d = 20$  мм,  $D = 130$  мм,  $Q = 49,4$  кН,  $D_{cp} = 95$  мм,  $d_{ш} = 21$  мм,  $z = 8$  шт.,  $\gamma = 45^\circ$ ,  $r_b = 40,5$  мм;  $r_n = 61,5$  мм;  $r_{ж} = 10,815$  мм.

По аналогии с предыдущим подшипником запишем:  $b_{b0} = 0,413$  м ( $n_b = 0,39$ ),  $b_{n0} = 0,68$  мм (при  $n_n = 0,42$ ),  $b_{b1} = 0,413$  мм;  $b_{n1} = 0,51$  мм,  $W_{b0} = 264,8$  Н при  $k_{b0} = 0,1036$  мм,  $W_{n0} = 326,3$  Н ( $k_{n0} = 0,128$  мм);  $W_{b1} = 166,5$  Н (при  $k_{b1} = 0,0775$  мм),  $W_{n1} = 205,4$  Н (при  $k_{n1} = 0,0956$  мм).

Работа сил трения качению: при вращении кольца, Н·м

$$A_b = 2\pi r_b (W_{b0} + W_{b1} + W_{n0} + W_{n1}) = 2\pi 0,0405 \times (264,8 + 166,5 + 326,3 + 205,4) = 244,9;$$

наружного кольца с учетом трения скольжения шариков вследствие разных диаметров внутреннего и наружного колец, Н·м

$$A_n = 2\pi [r_n (W_{n0} + W_{n1}) + r_b (W_{b0} + W_{b1})] + 2\pi f \times (P_0 + 2P_1)(r_n - r_b) = 2\pi [0,0615(326,3 + 205,4) +$$

## РУХОМИЙ СКЛАД І ТЯГА ПОЇЗДІВ

$$+0,0405(264,8 + 166,5)] + 2\pi f(30\,875 + 25\,960) \times \\ \times (0,0615 - 0,0405) = 315,25 + 749,5 = \\ = 1\,064,75. \quad (9)$$

В этом подшипнике сопротивление скольжению более, чем в 3 раза превышает сопротивление качению.

Значения в формулах (8) и (9) с учетом коэффициента, учитывающего трение реборд  $k_p = 1,2$  (опорные краны, привод центральный, конический обод колеса)  $A_{вп} = k_p A_v = 293,9$  Н·м;  $A_{нр} = k_p A = 1\,277,7$  Н·м.

При двух подшипниках № 312 с общей статической нагрузкой  $P = 2Q = 98,8$  кН возможно передвижение кранового колеса диаметром  $D_k = 400$  мм по рельсу КР-70 с радиусом закругления  $R_p = 400$  мм [12].

Сопротивление качению при этом диаметре ( $D > 50$  мм) необходимо определять с учетом коэффициента гистерезисных потерь [2, 6, 7, 8]

$$k = 0,16be^{0,2R_k},$$

где  $R_k$  – в метрах.

Сравнение формул (4) и (8) показывает, что для данного класса задач коэффициент  $\alpha$  довольно точно определяется экспонентой.

Полуширина пятна контакта при схеме касания «цилиндры со взаимно перпендикулярными осями» [11] равна

$$b = 1,397n_b \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{R_r R_p}{R_k + R_p}},$$

где  $n_b$  – коэффициент, зависящий от отношения  $R_k/R_p$  и равен  $n_b = 0,8$ ; при этом  $b = 4,44$  мм,  $k = 0,74$  мм при рекомендуемой в [8] величине  $k = 0,6$  мм для диаметров 400, 500, 560 и 630 мм.

Сопротивление качению колеса

$$W_k = \frac{k_k P}{R_k}$$

равно 365,3 Н и работа силы трения качению за один оборот колеса составит  $A_k = 458,8$  Нм, а с учетом трения реборд  $A_{кр} = 550,6$  Н.

Таким образом, работа сил трения за один оборот внутренней обоймы подшипника составит  $A_{вс} = 2 \cdot 293,9 + 550,6 = 1\,138,4$  Нм, а при вращении наружной обоймы подшипника  $A_{нс} = 2 \cdot 1\,277,7 + 550,6 = 3\,106$  Нм, то есть примерно в 2,7 раз больше.

Исходя из этих данных коэффициент сопротивления движения  $w_b = A_{вс}/P = 0,0115$ , а  $w_n = A_{нс}/P = 0,0314$  при рекомендуемой величине  $w = 0,015$  при подшипниках качения и диаметрах колес от 200 до 400 мм [11].

Данные, полученные для подшипника № 304, используем для нахождения КПД подвижных и неподвижных блоков с вращением внутренних (рис. 2, а, б, в) и наружных (общепринятая конструкция) колес.

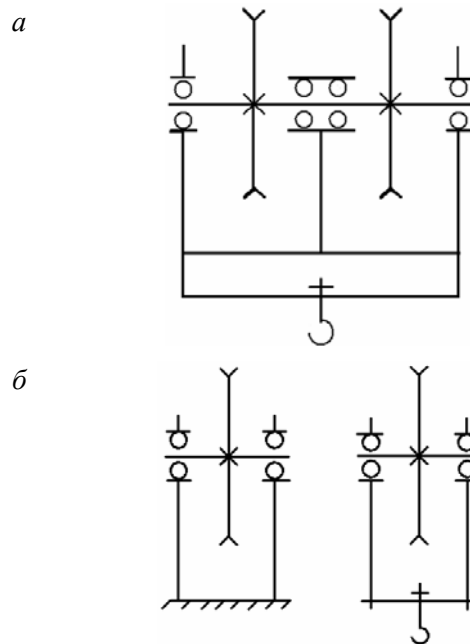


Рис. 2. Рекомендуемые опоры блоков с вращением внутреннего кольца подшипников

Исходя из статической грузоподъемности одного подшипника  $Q = 7,94$  кН для схемы «а» примем  $S_{\max}$  равное этой величине. Разрывное усилие каната примем

$$S_p = n_k S_{\max} = 5,5 \cdot 7,94 = 43,67 \text{ кН},$$

чему соответствует канат диаметром  $d_k = 9,7$  мм, диаметр блока  $D_б = d_k e = 9,7 \cdot 25 = 242$  мм.

## РУХОМИЙ СКЛАД І ТЯГА ПОЇЗДІВ

Полезная работа при повороте блока на один оборот  $A_n = \pi Q D_0 = \pi \cdot 7\,940 \cdot 0,242 = 6\,045$  Нм.

Работа сил трения в подшипнике при вращении внутреннего кольца

$$A_{2b} = A_b \cdot 2 = 13,42 \cdot 2 = 26,84 \text{ Нм.}$$

КПД блока схемы «а»

$$\eta_b = \frac{1}{1 + (A_{2b}/A_n)} = \frac{1}{1 + (26,84/6\,045)} = 0,995.$$

При вращении наружного кольца  $A_n = 84,55$  Н·м и

$$\eta_n = \frac{1}{1 + (136,48/6\,045)} = 0,9779,$$

то есть разница в величине КПД блока составляет 1,8 %.

При схеме «б» (подвижный блок) величина  $Q$  при тех же подшипниках составляет 15,88 кН и работа полезной силы за один оборот блока составит ту же величину, что и в предыдущей схеме, по этому величина КПД будет та же.

Отметим, что рекомендуемая величина КПД блока на подшипник качения 0,97–0,98, что близко к полученной величине  $\eta_n = 0,9956$ .

Несмотря на незначительное различие в величинах КПД при вращении внутреннего и наружного кольца подшипники (1,8 %) отметим, что уже при пяти подшипниках эта разница составляет около 9,6 %, что, очевидно, необходимо учитывать при расчетах и конструировании.

Здесь при вычислении работ трения не учтена работа на изгиб каната на блоке. Однако, как доказано в [12], уменьшение угла охвата канатом блока не приводит к уменьшению его КПД, что, очевидно, связано с уменьшением давления на шарики, и, естественно, уменьшение в той же степени сил трения.

Отметим еще, что при диаметре приработавшейся втулки подшипника скольжения равном внутреннему диаметру подшипника качения № 312 с  $d = 60$  мм и  $Q = 49,4$  кН получим момент на цапфе  $M = 1,27Q\mu \frac{\alpha}{2} = 1882\mu$ , где  $\mu$  – коэффициент трения скольжения.

При известной работе за один оборот сил трения при вращении наружного кольца необ-

ходимая величина коэффициента  $\mu = \frac{A_n}{2\pi} 1,27Q$

и на порядок меньше его значения при жидкой смазке.

2. Роликовый подшипник. Рассмотрим подшипник средней узкой серии № 2306 со следующими размерами:  $d = 30$  мм,  $D = 72$  мм,  $Q = 20,6$  кН, диаметр ролика  $d_p = 0,25(D - d) = 10,5$  мм, число роликов  $z = 5(D + d)/(D - d) = 12$ ;  $\gamma = 30^\circ$ , радиус беговой дорожки внутреннего кольца  $r_b = \frac{d}{2} + \frac{d_p}{2} = 20,25$  мм, то же наружного  $r_n = \frac{d}{2} + \frac{3}{2}d_p = 30,75$  мм.

Сила, действующая на наиболее нагруженный ролик [10]

$$P_0 = \frac{Q}{1 + 2 \cos^2 \gamma + 2 \cos^2 2\gamma},$$

на боковые ролики

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= P_0 \cos \gamma, \\ P_2 &= P_0 \cos 2\gamma \end{aligned} \right\}$$

В [5, 6] доказано, что если к группе тел приложена нагрузка по закону косинуса, то для определения сопротивления их качению всю нагрузку можно приложить к одному телу, то есть сопротивление качению всех пяти роликов по внутреннему кольцу при линейном контакте определится из выражения:

$$b_b = 1,522 \sqrt{\frac{Q}{BE} \frac{r_b r_p}{r_b + r_p}};$$

по наружному кольцу

$$b_n = 1,522 \sqrt{\frac{Q}{BE} \frac{r_n r_p}{r_n + r_p}}.$$

Коэффициент трения качения определяется из формулы (1) при  $\alpha = 1$  и составит соответственно  $k_b = 0,0636$  мм,  $k_n = 0,0876$  мм.

Сопротивление качению роликов: по наружной обойме  $W_n = 343,7$  Н, по внутренней  $W_b = 249,6$  Н.

## РУХОМИЙ СКЛАД І ТЯГА ПОЇЗДІВ

Работа сил трения качения и скольжения  
По внутренней и наружной обоймам

$$A_{\text{вн}} = 2\pi r_{\text{в}} (W_{\text{в}} + W_{\text{н}}) = 75,4 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$A_{\text{н}} = 2\pi (r_{\text{в}} W_{\text{в}} + r_{\text{н}} W_{\text{н}}) + 2\pi Q + (r_{\text{н}} - r_{\text{в}}) = \\ = 98,1 + 135,8 = 233,9 \text{ Н}\cdot\text{м}$$

при коэффициенте трения скольжения роликов  
по внутренней обойме  $f = 0,1$ .

Коэффициент сопротивления движению составит:

– при вращении внутренней обоймы  
 $w_{\text{в}} = W_{\text{в}}/Q = 0,012$ ;

– при вращении наружной обоймы  
 $w_{\text{н}} = W_{\text{н}}/Q = 0,017$  при рекомендуемой величине [12] для колес диаметром до 700 мм  
 $w = 0,020$ .

#### Научная новизна и практическая значимость

Получены аналитические зависимости для определения приведенного коэффициента трения для стальных колес и КПД канатных блоков.

Эти формулы позволят конструктору на стадии проектирования узлов качения оперировать не только конструкцией, но и материалами узла.

#### Выводы

Анализ полученных формул и результатов расчетов позволяют сделать следующие выводы и рекомендации:

– вследствие разных диаметров беговых дорожек внутреннего и наружного колец подшипников качения и, следовательно, разного пути прохождения шариками или роликами при вращении наружного кольца (при неподвижном внутреннем) возникает скольжение шариков или роликов по внутреннему кольцу;

– величина трения скольжения в подшипниках качения составляет около 50 % от общей в шариковых подшипниках и около 30 % в роликовых подшипниках (в следствие разных диаметров шариков и роликов); вследствие этого КПД канатного блока понижается примерно на 2 %, а коэффициент сопротивления крановых колес – примерно на 15 %;

– при конструировании узлов качения с подшипниками качения предпочтение необходимо отдавать вращению внутренней обоймы, особенно машинам с последовательным их соединением (железнодорожные поезда, ленточные конвейеры и т. п.).

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Астахов, В. Н. Оценка режимов трения и смазки в подшипниках осевого подвешивания локомотивов / В. Н. Астахов, Е. Н. Лысыков, П. Е. Коновалов // Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Дніпропетровськ, 2012. – Вип. 40. – С. 55–61.
2. Бондаренко, Л. М. Деформаційні опори в машинах / Л. М. Бондаренко, М. П. Довбня, В. С. Ловейкін. – Дніпропетровськ : ДніпроVAL, 2003. – 200 с.
3. Бондаренко, Л. Н. Соотношения между работами сил трения качения и скольжения в парадоксе Герона / Л. Н. Бондаренко, Т. В. Матвиец, В. Д. Бондаренко // Efektivní nástroje moderních věd–2011 : materiály VI mezinárodní vědecko-praktická konference (27.05–05.06.2011). – Praha, 2011. – P. 27–79.
4. Волков, Н. Н. Подшипники качения колесных пар вагонов и локомотивов. Исследование, расчет и конструирование / Н. Н. Волков, Н. В. Родзевич. – Москва : Машиностроение, 1972. – 167 с.
5. Гура, Г. С. Качение тел с трением. Фреттинг : монография / Г. С. Гура. – Сочи : Дория, 2009. – 295 с.
6. Джонсон, К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – Москва : Мир, 1989. – 510 с.
7. Дяченко, П. В. Моделювання впливу підшипників качення на демпфування коливань у зачепленні зубчастих коліс / П. В. Дяченко // Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Дніпропетровськ, 2011. – Вип. 36. – С. 16–24.
8. Иванов, М. Н. Детали машин / М. Н. Иванов. – Москва : Высш. шк., 1975. – 551 с.
9. Карпенко, В. А. Взаимозаменяемость, стандартизация и технические измерения : учеб. пособие для вузов / В. А. Карпенко. – Севастополь : Изд-во СевНТУ, 2007. – 372 с.
10. Кожевников, С. Н. Теория механизмов и машин / С. Н. Кожевников. – Москва : Машиностроение, 1969. – 584 с.
11. Писаренко, Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яков-

## РУХОМИЙ СКЛАД І ТЯГА ПОЇЗДІВ

- лев, В. В. Матвеев. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев : Наук. думка, 1988. – 736 с.
12. Справочник по кранам. В 2 т. Т. 2 / М. П. Александров, М. М. Гохберг, А. А. Ковин [и др.]. – Ленинград : Машиностроение, 1988. – 559 с.
  13. Умови кочення без проковзування тіл при різних схемах дотику / Л. М. Бондаренко, С. О. Яковлев, І. Е. Крамар, О. І. Шаптала // Conduct of modern science–2014 (30.11–7.12.2014) : Materials of the X Intern. Sci. and Practical Conf. – Sheffield, 2014. – Т. 23. – Р. 12–17.
  14. Multi-scale finite element modeling to describe rolling contact fatigue in a wheel–rail test rig / M. Pletz, W. Daves, W. Yao [et al.] // Tribology International. – 2014. – Vol. 80. – P. 147–155. doi: 10.1016/j.triboint.2014.07.005.
  15. Reynolds, O. On rolling friction / O. Reynolds // Proc. of the Royal Society of London. – 1874. – Vol. 23. – Iss. 156-163. – P. 506–509. doi: 10.1098/rspl.1874.0080.
  16. Tabor, D. The mechanism of Rolling Friction. II. The Elastic Range / D. Tabor // Proc. of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 1955. – Vol. 229. – Iss. 1177. – P. 198–220. doi: 10.1098/rspa.1955.0082.

Л. М. БОНДАРЕНКО<sup>1</sup>, М. О. БАБЯК<sup>2</sup>, С. О. ЯКОВЛЄВ<sup>3\*</sup>, С. О. ІСТІН<sup>4</sup>,  
Г. Ю. МОСКАЛЬОВ<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Каф. «Прикладна механіка», Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, вул. Лазаряна, 2, Дніпропетровськ, Україна, 49010, тел. +38 (056) 793 19 19, ел. пошта admin\_diit@inbox.ru, ORCID 0000-0001-6602-2745

<sup>2</sup>Каф. «Транспортні технології», Львівська філія, Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, вул. І. Блажкевич, 12а, Львів, Україна, 79052, тел. +38 (097) 907 50 72, ел. пошта babjk@mail.ru, ORCID 0000-0001-5125-9133

<sup>3\*</sup>Каф. «Військова підготовка фахівців Державної спеціальної служби транспорту», Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, вул. Лазаряна, 2, Дніпропетровськ, Україна, 49010, тел. +38 (056) 793 19 19, ел. пошта Sergei\_jak@mail.ru, ORCID 0000-0002-6431-4303

<sup>4</sup>Каф «Військова підготовка фахівців Державної спеціальної служби транспорту», Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, вул. Лазаряна, 2, Дніпропетровськ, Україна, 49010, тел. +38 (056) 793 19 19, ел. пошта admin\_diit@inbox.ru, ORCID 0000-0002-8114-8722

<sup>5</sup>Каф. «Військова підготовка фахівців Державної спеціальної служби транспорту», Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, вул. Лазаряна, 2, Дніпропетровськ, Україна, 49010, тел. +38 (056) 793 19 19, ел. пошта admin\_diit@inbox.ru, ORCID 0000-0002-9335-7716

## СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ОПОРОМ КОЧЕННЮ ТА КОВЗАННЮ В ПІДШИПНИКАХ КОЧЕННЯ

**Мета.** Про одну з причин ковзання при коченні відомо з другої половини XIX століття, тоді вважалося, що опір ковзанню з'являється в місці контакту внаслідок різних швидкостей на дузі контакту. Лише в середині XX століття було доведено, що цей опір складає незначну величину опору коченню. Проте (з невідомої причини) не враховується та обставина, що в підшипниках кочення на практиці майже в рівних відносинах може обернутися як внутрішнє кільце при нерухомому зовнішньому, так і навпаки. При цьому не враховувалася та обставина, що кулька або ролик у підшипниках кочення за один оборот проходить різний шлях по доріжці катання зовнішньої та внутрішньої обійм підшипника. Ця обставина не враховується й при визначенні розрахункової величини коефіцієнта тертя підшипників кочення, приведенного до валу. Тому метою роботи є необхідність встановлення впливу довжини шляху по доріжці катання зовнішньої і внутрішньої обійм підшипника на визначення розрахункової величини коефіцієнта тертя підшипників кочення, приведенного до валу. **Методика.** В основі методики рішення – теорія плоского руху твердого тіла, теорія контактних деформацій Герца та аналітичні залежності для визначення коефіцієнта тертя кочення. **Результати.** Отримані залежності по визначенню опору коченню кульок або роликів біговими доріжками внутрішньої та зовнішньої обійм, а також облік різниці шляху кочення по них дозволяє аналітично отримати опір кочення та ковзання для будь-якого розміру підшипників і різних пристроїв підшипникових вузлів. Також можливо на стадії проектування вузлів кочення оперувати не тільки конструкцією, але й матеріалами вузла. **Наукова новизна.** За допомогою аналітичних залежностей для визначення опору коченню тіл при точковому і лінійному контактах, а також обліку різниці шляху при коченні кульки або ролика по зовнішній



## РУХОМИЙ СКЛАД І ТЯГА ПОЇЗДІВ

і внутрішній обоймах підшипника можна більш точно знайти опору кочення в підшипниках. **Практична значимість.** Отримані залежності дозволять проектувати підшипникові вузли з мінімальною енергоємністю.

*Ключові слова:* підшипник; ковзання; кочення; контакт; напруга; опір

L. M. BONDARENKO<sup>1</sup>, M. O. BABIAK<sup>2</sup>, S. A. YAKOVLEV<sup>3\*</sup>, S. A. ISTIN<sup>4</sup>,  
H. YU. MOSKALEV<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Dep. «Applied Mechanics», Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan, Lazaryan St., 2, Dnipropetrovsk, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 793 19 19, e-mail admin\_diit@inbox.ru, ORCID 0000-0001-6602-2745

<sup>2</sup>Dep. «Transportation Technologies», Lviv branch of Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan, I. Blazhkevich St., 12a, Lviv, Ukraine, 79052, tel. +38 (097) 907 50 72, e-mail babjk@mail.ru, ORCID 0000-0001-5125-9133

<sup>3\*</sup>Dep. «Military Training of Specialists of the State Special Service of Transport», Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan, Lazaryan St., 2, Dnipropetrovsk, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 793 19 19, e-mail Sergei\_jak@mail.ru, ORCID 0000-0002-6431-4303

<sup>4</sup>Dep. «Military Training of Specialists of the State Special Service of Transport», Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan, Lazaryan St., 2, Dnipropetrovsk, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 793 19 19, e-mail admin\_diit@inbox.ru, ORCID 0000-0002-8114-8722

<sup>5</sup>Dep. «Military Training of Specialists of the State Special Service of Transport», Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan, Lazaryan St., 2, Dnipropetrovsk, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 793 19 19, e-mail admin\_diit@inbox.ru, ORCID 0000-0002-9335-7716

## RELATIONSHIP BETWEEN ROLLING AND SLIP RESISTANCE IN ROLLING BEARINGS

**Purpose.** About one of the causes of slip rolling is known from the second half of the 19th century, it was believed that the slip resistance appears at the place of contact due to different speeds on the arc of contact. Only in the mid-20th century it was proved that this resistance is negligible in rolling resistance. However (for some unknown reason) it is ignored the fact that in practice in rolling bearings may rotate both the inner ring with a stationary outer one, and vice versa almost in equal relations. It is not taken into account the fact that the ball or roller in the rolling bearings runs the different distance along the roller path of the outer and inner bearing cages in one revolution. This fact is not taken into account in determining the calculated values for the friction coefficient of a rolling bearing reduced to the shaft. Therefore, the aim of this work is to determine the influence of path length on the track riding the outer and inner race of the bearing on the determination of the calculated value of the coefficient of friction of rolling bearings is given to the shaft. **Methodology.** The solution technique is based on the theory of plane motion of a rigid body, the theory of Hertzian contact deformation and the analytical dependencies for determination of coefficient of rolling friction. **Findings.** The obtained dependences on determination of rolling resistance of the balls or rollers along the bearing tracks of inner and outer bearing cages as well as path difference metering of the rolling on them allows to analytically obtain the rolling resistance and slipping for any size of bearings and different devices of bearing units. It is also possible at the design stage of rolling nodes to handle not only the design but also the content of the node. **Originality.** Using the analytical dependences for determination of the rolling resistance of bodies at point and line contacts, and also account for the difference in the path of the rolling ball or roller on the outer and inner cages of the bearing one can more accurately find the rolling resistance in the bearings. **Practical value.** The obtained dependences allow designing the bearing units with minimal energy consumption.

*Keywords:* bearing; slip; rolling; contact; voltage; resistance

### REFERENCES

1. Astakhov V.N., Lysikov Ye.N., Kononov P.Ye. Otsenka rezhimov treniya i smazki v podshipnikakh oseвого podveshivaniya lokomotivov [Estimation of modes friction and greasing in bearing axial hanging of locomotives]. *Visnyk Dnipropetrovskoho natsionalnoho universytetu zaliznychnoho transportu imeni akademika V. Lazariana* [Bulletin of Dnipropetrovsk national University of railway transport named after Academician V. Lazaryan], 2012, issue 40, pp. 55-61.

## РУХОМИЙ СКЛАД І ТЯГА ПОЇЗДІВ

2. Bondarenko L.M., Dovbnia M.P., Loveikin V.S. *Deformatsiini opory v mashynakh* [Deformation supports in cars]. Dnipropetrovsk, Dnipro-VAL Publ., 2003. 200 p.
3. Bondarenko L.N., Matviets T.V., Bondarenko V.D. Sootnosheniya mezhdru rabotami sil treniya kacheniya i skolzheniya v paradokse Gerona [Relations between operation of friction forces of rolling and sliding in the paradox of Heron]. *Materiály VI mezinárodní vědecko-praktická konference «Efektivní nástroje moderních věd–2011»*. Praha, 2011, pp. 27-29.
4. Volkov N.N., Rodzevich N.V. *Podshipniki kacheniya kolesnykh par vagonov i lokomotivov. Issledovaniye, raschet i konstruirovaniye* [Rolling bearings of the wheel sets of cars and locomotives. The study, calculation and design]. Moscow, Mashinostroeniye Publ., 1972. 167 p.
5. Gura G.S. *Kacheniyе tel s treniyem. Fretting* [Rolling bodies with friction. Fretting]. Sochi, Doriya Publ., 2009. 295 p.
6. Dzhonson K. *Mekhanika kontaktnogo vzaimodeystviya* [Contact interaction mechanics]. Moscow, Mir Publ., 1989. 510 p.
7. Diachenko P.V. Modeliuvannya vplyvu pidshyynykiv kochennia na dempfuvannya kolyvan u zacheplenni zubchastykh kolis [Modeling influence of rolling bearings bush and vibrations damping in catching of toothed wheels]. *Visnyk Dnipropetrovskoho natsionalnoho universytetu zaliznychnoho transportu imeni akademika V. Lazariana* [Bulletin of Dnipropetrovsk national University of railway transport named after Academician V. Lazaryan], 2011, issue 36, pp. 16-24.
8. Ivanov M.N. *Detali mashin* [Machine components]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1975. 551 p.
9. Karpenko V.A. *Vzaimozamenyayemost, standartizatsiya i tekhnicheskiye izmereniya* [Interchangeability, standardization and technical measurements]. Sevastopol, Izdatelstvo SevNTU Publ., 2007. 372 p.
10. Kozhevnikov S.N. *Teoriya mekhanizmov i mashin* [Theory of mechanisms and machines]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1969. 584 p.
11. Pisarenko G.S., Yakovlev A.P., Matveyev V.V. *Spravochnik po soprotivleniyu materialov* [Handbook of materials resistance]. Kyiv, Naukova Dumka Publ., 1988. 736 p.
12. Aleksandrov M.P., Gokhberg M.M., Kovin A.A., Kulkova N.N., Mazover I.S., Nevzorov L.A., Orlov A.N., Plavnik B.I., Samoylovich P.A., Serlin L.G., Sokolov S.A. *Spravochnik po kranam. T. 2* [Guide on cranes. Vol. 2]. Leningrad, Mashinostroyeniye Publ., 1988. 559 p.
13. Bondarenko L.M., Yakovliev S.O., Kramar I.E., Shaptala O.I. Umovy kochennia bez prokovzuvannya til pry riznykh skhemakh dotyku [Conditions of rolling without slipping of bodies at various contact schemes]. Sheffield, Science and education LTD Publ., 2014. P. 12-17.
14. Pletz M., Daves W., Yao W., Kubin W., Scheriau S. Multi-scale finite element modeling to describe rolling contact fatigue in a wheel–rail test rig. *Tribology International*, 2014, vol. 80, pp. 147-155. doi: 10.1016/j.triboint.2014.07.005.
15. Reynolds O. On rolling friction. *Proc. of the Royal Society of London*, 1874, vol. 23, issue 156-163, pp. 506-509. doi: 10.1098/rspl.1874.0080.
16. Tabor D. The mechanism of Rolling Friction. II. The Elastic Range. *Proc. of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1955, vol. 229, issue 1177, pp. 198-220. doi: 10.1098/rspa.1955.0082.

Статья рекомендована к публикации д.т.н., проф. С. В. Ракишой (Украина); д.т.н., проф. Б. И. Киндрацким (Украина)

Поступила в редколлегию 19.01.2016

Принята к печати 05.05.2016