УДК 624.042

І. І. КИРПА (ДІІТ), $\boxed{\text{Е. А. ЯЦЕНКО}}$ (ПДАБА, Дніпропетровськ)

ВИЗНАЧЕННЯ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ТА РІШЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В РОЗРАХУНКУ ЦИЛІНДРИЧНИХ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ОБОЛОНОК З УРАХУВАННЯМ ПОВЗУЧОСТІ БЕТОНУ

Показано геометричну та розрахункову схеми довгої циліндричної залізобетонної оболонки, принцип визначення невідомих зусиль та початкових умов і рішення диференціального рівняння у вигляді ряду Маклорена.

Ключові слова: циліндрична оболонка, невідомі зусилля, початкові умови, диференціальне рівняння, ряд Маклорена

Вплив повзучості бетону на перерозподіл внутрішніх зусиль циліндричних оболонок доцільно розглянути на прикладі одно хвильової одно пролітної оболонки, для якої просторова робота проявляється найбільш чітко.

Оболонка, що розглядається (рис. 1), складається з вертикально направлених бортових балок, циліндричної плити постійної товщини δ та торцевих діафрагм. Оболонка опирається в кутах і має розміри в плані $l \times b$, де l – довжина, b – ширина. При цьому $l \times b \geq 2$.

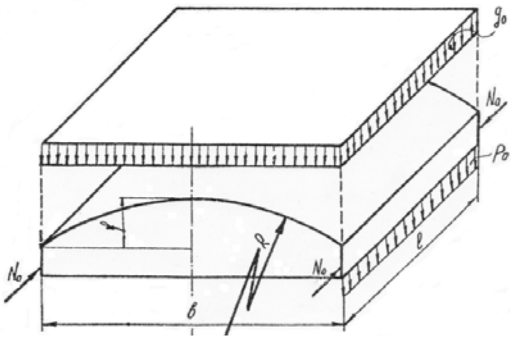

Рис. 1. Задана схема оболонки

Бортові балки армовані попередньо-напруженою і звичайною арматурою та виготовлені із високоміцного бетону. Циліндрична частина оболонки однорідна і в ряді випадків може бути виготовлена із легкого бетону зниженого класу з підвищеною деформативністю. Таким чином, деформативні характеристики пружності, повзучості та усадки бортових балок і циліндричної частини різні, але при цьому існує повна монолітність конструкції за лініями з'єднання елементів, що забезпечує сумісність деформацій елементів.

Навантаження на оболонку g_0 рівномірно розподілене по поверхні. Бортові балки також навантажені рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю p_0. Ці навантаження змінюються в часі довільними законами. Крім того на оболонку діють зусилля попереднього напруження арматури N_0, контролюючі зусилля яких постійні в часі.

Криволінійна частина оболонки замінена семигранною вписаною складкою тієї ж товщини δ з однаковою шириною грані d (рис. 2).

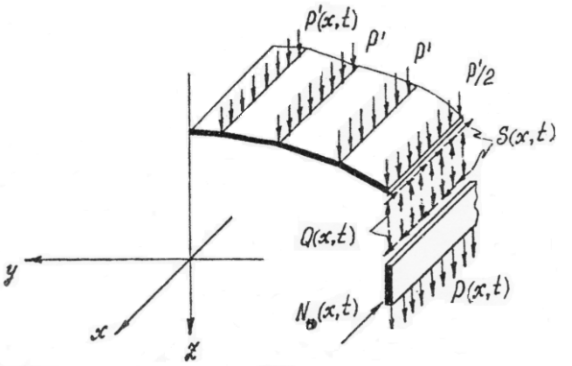

Рис. 2. Фрагмент розрахункової схеми оболонки

При цьому рівномірно розподілене навантаження на оболонку зосереджується на ребрах складки у вигляді погонного навантаження $p_0' \cong g_0 d$. На крайні ребра складки діє навантаження $p_0'/2$.

Позначивши стрілу підйому f циліндричної частини оболонки (рис. 1) визначимо інші геометричні параметри за відомими формулами: радіус поперечного перерізу серединної поверхні

$$R = \frac{b^2}{8f} + \frac{f}{2}; (1)$$

ширина грані вписаної складки

$$d = 2R \sin\frac{\varphi}{2}, \ (2)$$

де

$$\varphi = \frac{4}{7}\tan^{-1}\frac{2f}{b}\ (3)\,.$$

Торцеві діафрагми оболонки можуть мати різні конструктивні рішення достатньо жорсткі в своїй площині та гнучкі із площини. Умовно вважаємо, що торцеві діафрагми працюють як окремі елементи, що сприймають зусилля зсуву та поперечних сил крайового ефекту, які передаються середньою частиною оболонки.

Враховуючи те, що оболонка може бути розрахована на симетричні або антисиметричні впливи при переході до основної системи доцільно розглядати тільки її половину, розташовану з одного боку від вертикальної поздовжньої площини симетрії.

Основна система утворюється відокремленням бортової балки від криволінійної частини та заміною відкинутих при цьому пов'язів, діючими в них зусиллями. В загальному вигляді, у відповідності до методу В. А. Бовіна [1] таких невідомих повинно бути чотири: зусилля зсуву вздовж лінії відокремлення, вертикальні, горизонтальні зусилля та поперечні згинальні моменти. Але, в нашому випадку при розгляді тонкої оболонки з вертикально розташованими бортовими балками, надто гнучкими із площини, поперечними зусиллями та моментами знехтуємо і врахуємо тільки два невідомих зусилля: зсуву в напрямі лінії з'єднання $S(x,t)$ та вертикальні $Q(x,t)$. У відповідності з цим основна система матиме вигляд показаний на рис. 3.

Всі впливи на оболонку підпорядковані принципу розподілу, відповідно невідомі зусилля підпорядковані тому ж принципу, тобто

$$S(x,t) = r(x)S(t);\ Q(x,t) = n(x)g(t), (4)$$

де $r(x)$, $n(x)$ – функції розподілу зусиль в напрямі прольоту оболонки, $s(t)$, $g(t)$ – функції зміни невідомих зусиль в часі t.

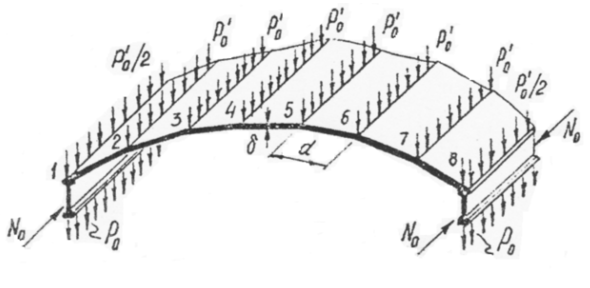

Рис. 3. Основна система оболонки

Крім зовнішніх навантажень на ребра складки $p'(x,t)$, бортову балку $p(x,t)$ та зусилля попереднього напруження арматури $N_0(x,t)$ на оболонку діє поздовжня усадка бетону середньої частини $\varepsilon_y'(x,t)$ та бортової балки $\varepsilon_y(x,t)$.

Невідомі зусилля та впливи подані в рядах тригонометричних функцій

$$r_j(x) - \cos\eta_j(x);\ \eta_j(x) - \sin\eta_j(x), (5)$$

де $\eta_j = \frac{j\pi}{l}$, після чого вони можуть бути записані таким чином:

$$S(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty}\bar{s}_j(t)r_j(x)\ (6)$$

$$Q(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty}g_j(t)n_j(x)\ (7)$$

$$P(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}p_0(t)n_j(x)/j\ (8)$$

$$P'(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}p_0'(t)n_j(x)/j\ (9)$$

$$N_0(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}N_0(t)n_j(x)/j\ (10)$$

$$\varepsilon_y(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_y(t)n_j(x)/j\ (11)$$

При розрахунку оболонки на симетричне навантаження, а також на антисиметричне навантаження відносно поздовжньої площини симетрії, утримуються тільки непарні члени представлених вище рядів, тобто $j = 1,3,5\ldots$ Якщо розглядати антисиметричне навантаження відносно площини, яка перетинає оболонку посередині і впоперек прольоту, то в зазначених рядах необхідно утримувати тільки парні члени при $j = 2,4,6\ldots$

Для визначення невідомих зусиль S, Q складаємо рівняння сумісності деформацій оболонки в місцях з'єднання бортових балок з циліндричною частиною.

Ці рівняння мають вигляд:

$$\varepsilon_c(x,t) = \varepsilon_c'(x,t);\ (12)$$

$$\mathcal{R}_c(x,t) = \mathcal{R}_c'(x,t), (13)$$

де ε_c, ε_c' – відносні поздовжні деформації ребер в напрямі зусиль $S(x,t)$, а $\mathcal{R}_c$, $\mathcal{R}_c'$ – кривизни згинання суміжних ребер в вертикальній площині, тобто в напрямі зусилля $Q(x,t)$.

Деформації, які входять в рівняння (12) і (13) були визначені окремо для роз'єднаних елементів оболонки, тобто бортової балки та плити в роботі [2].

Задача з визначення невідомих зусиль в оболонці зведена до необхідності вирішення диференціального рівняння четвертого порядку наступного типу:

$$y^{IV} + a_3\dddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y =$$

$$= y^{IV*} + b_3\dddot{y}^* + b_2\ddot{y}^* + b_1\dot{y}^* + b_0 y^* \ (a)$$

В цьому рівнянні коефіцієнти a_i та b_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ постійні, а зірочками виділені пружні значення невідомого y. Для рішення рівняння (a) необхідні чотири початкових умови, тобто значення шуканої функції та її трьох похідних при умові $t = 0\,, \varphi(t) = 0$.

Є. А. Яценком була помічена закономірність конструювання рівнянь, яку він використав для спрощення визначення початкових умов цих рівнянь [3].

Сутність цієї закономірності полягає в наступному. У вихідному рівнянні деформацій бетону

$$E_0\frac{d\varepsilon(t)}{d\overline{\varphi}(t)} = \frac{d\sigma(t)}{d\overline{\varphi}(t)} + \sigma(t) - E_0\frac{d\varepsilon_y(t)}{d\overline{\varphi}(t)} \quad (14)$$

при $\varepsilon_y = 0$ може бути записане таким чином:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^* + \varepsilon^*, (\delta)$$

де $\varepsilon^* = \sigma/E$ - пружна деформація , а точками позначена процедура диференціювання по φ(t). Диференціюючи рівняння (δ) $r - 1$ раз по φ отримаємо

$$\varepsilon^{(r)} - \varepsilon^{(r)*} + \varepsilon^{(r-1)*}.(b)$$

Це рівняння одночасно є і рекурентною формулою, за якою можна визначити початкові значення шуканої функції та будь-якої її похідної. Дійсно, при $r_0 = 0$ та при умові, що похідні від'ємного порядку також дорівнюють нулю, отримаємо $\varepsilon_0 = \varepsilon_0^*$, що відповідає фізичній уяві про рівняння (δ). При $r = 1$, $\dot{\varepsilon}_0 = \dot{\varepsilon}_0^* + \varepsilon_0^*$, що також справедливо. Таким чином, надаючи r значення від нуля до будь-якого порядку і приймаючи похідні від'ємного порядку рівними нулю, за формулою (b) можна визначити будь-яке із початкових умов рівняння (δ). Ця властивість рівняння (δ) зберігається і в конструюючи на його основі рівняннях сумісності деформацій з урахуванням, що шукана функція визначається через її пружну складову.

Таким чином, в нашому випадку рівняння (a) може бути легко перетворене в формулу початкових умов. Диференціюючи його $r - 4$ рази по $\varphi(t)$ і приймаючи потім значення функцій, що дорівнюють їх початковим значенням, отримаємо формулу:

$$y_0^{(r)} + a_3 y_0^{(r-1)} + a_2 y_0^{(r-2)} + a_1 y_0^{(r-3)} +$$

$$+ a_0 y_0^{(r-4)} = y_0^{(r)*} + b_3 y_0^{(r-1)*} + b_2 y_0^{(r-2)*} +$$

$$+ b_1 y_0^{(r-3)*} + b_0 y_0^{(r-4)*}. (г)$$

Приймаючи $r - 0$ відповідно (г) отримаємо $y_0 = y_0^*$; при $r = 1$ – $\dot{y}_0 + a_3 y_0 = \dot{y}_0^* + b_3 y_0^*$, звідси визначаємо $\dot{y}_0$; при $r = 2 - \ddot{y}_0 + a_3\dot{y}_0 +$ $+ a_2 y_0 = \ddot{y}_0^* + b_3\dot{y}_0^* + b_2 y_0^*$ і так далі.

Така проста можливість визначення початкових значень шуканої функції та будь-якої її похідної дозволяє відмовитись від відомого точного рішення диференціального рівняння типу (a), а подати його рішення у вигляді ряду Макларена.

$$y = y_0 + \dot{y}_0\frac{\varphi}{1!} + \ddot{y}_0\frac{\varphi^2}{2!} + \dddot{y}_0\frac{\varphi^3}{3!} + \cdots + y_0^{(n)}\frac{\varphi^n}{n!}$$

$$+ \cdots \quad (g)$$

Функція характеристики повзучості $\varphi(t)$обмежена числом, приблизно 2,5. Крім того початкові значення шуканих зусиль із збільшенням порядку похідної знижуються. Таким чином ряд (g) досить швидко сходиться, що досить зручно при ручному розрахунку особливо при варіантному проектуванні.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Бовин, В. А. Пособие по расчету цилиндрических оболочек [Текст] / В. А. Бовин. – К.: Будівельник, 1967. – С. 118.
2. Бовин, В. А. Расчет железобетонной цилиндрической оболочки с учетом ползучести [Текст] / В. А. Бовин, Е. А. Яценко // Вопросы строительных конструкций. Тр. ДИИТа. – Вып. 118. – Д., 1971. – С. 70–81.
3. Теория ползучести железобетонных конструкций [Текст] / Е. А. Яценко [и др.]. – Д., 2000. – С. 599.

Надійшла до редколегії 06.07.2011.
Прийнята до друку 12.07.2011.

И. И. КИРПА, Е. А. ЯЦЕНКО

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ И РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В РАСЧЕТЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА

Показаны геометрическая и расчетная схемы длинной цилиндрической железобетонной оболочки, принципы определения неизвестных усилий и начальных условий, решение дифференциального уравнения в виде ряда Маклорена.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, неизвестные усилия, начальные условия, дифференциальное уравнение, ряд Маклорена

I. I. KYRPA, E. A. YATSENKO

DETERMINATION OF INITIAL CONDITIONS AND SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE CALCULATION OF CYLINDRICAL REINFORCED CONCRETE SHELLS TAKING INTO ACCOUNT THE CREEP OF CONCRETE

Showing geometric and computational schemes long cylindrical shell of reinforced concrete, the principles of the unknowns of effort and the initial conditions, solution of differential equations in the form of the Maclaurin series.

Keywords: cylindrical shell, unknown efforts, initial conditions, differential equation, the Maclaurin series