УДК 539.3

Б. Г. ШЕЛЕСТОВСЬКИЙ, Г. В. ГАБРУСЄВ (Тернопільський національний технічний університет ім. І. Пулюя)

ТИСК КІЛЬЦЕВОГО ШТАМПА НА ІЗОТРОПНИЙ ШАР ІЗ ЗАЛИШКОВИМИ ДЕФОРМАЦІЯМИ, СПРИЧИНЕНИМИ ЗОСЕРЕДЖЕНИМ НАГРІВОМ ПРИ ЗВАРЮВАННІ

Отримано формули для визначення контактних напружень у шарі, в який втискується абсолютно гладкий штамп при наявності в шарі залишкових деформацій, що зумовлені зосередженим нагрівом при зварюванні. Наведено числовий приклад і показано, що наявність у шарі залишкових деформацій суттєво впливає на величину і характер розподілу контактних напружень.

Ключові слова: кільцевий штамп, залишкова деформація, температура, рівняння Пуассона

Получены формулы для определения контактных напряжений в слое, в который втискивается абсолютно гладкий штамп при наличии в слое остаточных деформаций, которые обусловлены сосредоточенным нагревом при сварке. Приведен численный пример и показано, что наличие в слое остаточных деформаций существенно влияет на величину и характер распределения контактных напряжений.

Ключевые слова: кольцевой штамп, остаточная деформация, температура, уравнение Пуассона

Formulae for finding contact stresses in the layer, in which perfectly smooth punch is pressed, when residual deformations are available in the layer caused by the localized heating under welding, are obtained. A numerical example is given and it is shown that the presence in the layer of residual deformations essentially affect the value and character of distribution of contact stresses.

Keywords: rotary die, residual strain, temperature, Poisson's equation

Визначення міцності елементів конструкцій при їх контактній взаємодії знаходить широке застосування в машинобудуванні, приладобудуванні та інших галузях промисловості. Вплив температурних полів на характер контактної взаємодії досліджувалось в багатьох працях, зокрема в [1]. Для зварних конструкцій актуальними є дослідження впливу залишкових зварювальних напружень на величину і характер розподілу напружень контактної взаємодії їх елементів з твердими жорсткими або пружними масивними тілами (штампами, бандажами) [2].

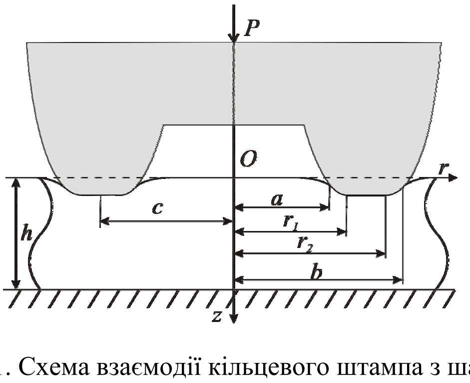

Рис. 1. Схема взаємодії кільцевого штампа з шаром

Нехай в ізотропний шар товщиною h, який віднесений до циліндричної системи координат r, φ, z, який спаяний з жорсткою основою, втискується поступально (без повороту) абсолютно гладкий кільцевий штамп силою P (рис. 1). Гладкість означає, що на поверхні контакту дотичні напруження дорівнюють нулю; відсутність повороту свідчить, що зусилля, які прикладенні до штампа, зводяться до рівнодійної, спрямованої вздовж осі штампа. В області контакту штамп обмежений поверхнею обертання, яка складається з трьох частин: плоскої поверхні для $r_1 \le r \le r_2$ та параболоїдів з вершинами в точках r_1, r_2.

В циліндричній системі координат з початком на верхній площині шару функцію $W(r)$, яка описує вертикальні переміщення точок області контакту шару із штампом, можна записати так:

$$W(r) = W(a) + \frac{1}{2R_1}\left[(r_1 - a)^2 - (r_1 - r)^2\right],$$
$$a \le r \le r_1;$$
$$W(r) = W(a) + \frac{1}{2R_1}(r_1 - a)^2, r_1 < r \le c;$$
$$W(r) = W(b) + \frac{1}{2R_2}(r_2 - b)^2, c < r \le r_2;$$
$$W(r) = W(b) + \frac{1}{2R_2}\left[(r_2 - b)^2 - (r_2 - r)^2\right],$$
$$r_2 < r \le b, \qquad (1)$$

де $c=\dfrac{r_1+r_2}{2}$, R_1 та R_2 – радіуси кривини параболоїдів.

На верхній поверхні шару відбувся зосереджений нагрів при зварюванні і в шарі виникло поле залишкових деформацій, яке на основі експериментальних даних можна описати виразами [3]:

$$\varepsilon_{rr}^0=-\varepsilon_0(1-\omega p^2r^2)\exp(-p^2r^2)f(z),$$
$$\varepsilon_{\theta\theta}^0=-\varepsilon_0(1+\omega p^2r^2)\exp(-p^2r^2)f(z),$$
$$\varepsilon_{zz}^0=-(\varepsilon_{rr}^0+\varepsilon_{\theta\theta}^0),\quad \varepsilon_{r\theta}^0=\varepsilon_{rz}^0=\varepsilon_{z\theta}^0,$$
$$f(z)=C_0+\sum_{n=1}^{N_1}C_n\cos\frac{\pi nz}{h}.$$

Диференціальні рівняння рівноваги тіла із залишковими деформаціями в осесиметричному випадку записуються у вигляді:

$$\mu\nabla^2u_r+(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial r}-\mu\frac{u_r}{r^2}+$$
$$+2\mu\left[\frac{\partial\varepsilon_{rr}^0}{\partial r}+\frac{1}{r}\left(\varepsilon_{rr}^0-\varepsilon_{\varphi\varphi}^0\right)\right]=0,$$
$$\mu\nabla^2u_z+(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}-2\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon_{rr}^0+\varepsilon_{\varphi\varphi}^0\right)=0.$$

Частинний розв'язок рівнянь рівноваги будується за допомогою двох ключових функцій φ та ψ які задовольняють рівняння Пуассона

$$\nabla^2\psi=F(r,z)-2\left(\omega^0(r,z)-\varepsilon_{zz}^0\right),$$
$$\nabla^2\varphi=F(r,z), \tag{2}$$
$$\omega^0(r,z)=\varepsilon_{rr}^0+\int\frac{1}{r}(\varepsilon_{rr}^0-\varepsilon_{\theta\theta}^0)dr,$$

а функція $F(r,z)$ задовольняє рівняння

$$(\lambda+2\mu)\nabla^2F=$$
$$2\mu\nabla^2\omega^0+2(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\omega^0-\varepsilon_{zz}^0). \tag{3}$$

Розв'язавши рівняння (2), (3) знайдемо функції F,φ,ψ:

$$F(r,z)=-m_1(1+\omega-\omega p^2r^2)\mathrm{e}^{-p^2r^2}f(z)-$$
$$-\frac{m_2\pi^2}{2p^2}\sum_{n=1}^{N_1}n^2C_n\cos\frac{\pi nz}{h}\times$$
$$\times\int_0^\infty\frac{\alpha}{\alpha^2h^2+\pi^2n^2}\left(3+\frac{\omega\alpha^2}{4p^2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{4p^2}}J_0(\alpha r)d\alpha,$$

$$\varphi(r,z)=\frac{m_1}{2p^2}\int_0^\infty\frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{\omega\alpha^2}{4p^2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{4p^2}}J_0(\alpha r)d\alpha+$$
$$+\frac{h^2}{2p^2}\sum_{n=1}^{N_1}C_n\cos\frac{\pi nz}{h}\int_0^\infty\frac{\alpha}{\alpha^2h^2+\pi^2n^2}\times$$
$$\times\left[m_1\left(1+\frac{\omega\alpha^2}{4p^2}\right)+\frac{m_2\pi^2n^2}{\alpha^2h^2+\pi^2n^2}\left(3+\frac{\omega\alpha^2}{4p^2}\right)\right]\times$$
$$\times\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{4p^2}}\cdot J_0(\alpha r)d\alpha,$$
$$\psi(r,z)=\varphi(r,z)+\psi_1(r,z),$$
$$\psi_1(r,z)=-\frac{1}{p^2}\int_0^\infty\frac{1}{\alpha}\left(3+\frac{\omega\alpha^2}{4p^2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{4p^2}}\cdot J_0(\alpha r)d\alpha-$$
$$-\frac{h^2}{p^2}\sum_{n=1}^{N_1}C_n\cos\frac{\pi nz}{h}\int_0^\infty\frac{\alpha}{\alpha^2h^2+\pi^2n^2}\left(3+\frac{\omega\alpha^2}{4p^2}\right)\times$$
$$\times\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{4p^2}}\cdot J_0(\alpha r)d\alpha.$$

Компоненти напруженого стану $\bar\sigma_{ij}$, що відповідають частинному розв'язку рівнянь рівноваги визначаються за формулами:

$$\frac{\bar\sigma_{zz}}{G\varepsilon_0}=m_2\Big\{2(\nu-2-\nu\omega+\omega\nu p^2r^2)\mathrm{e}^{-p^2r^2}\cdot f(z)+$$
$$+\frac{\pi^2}{p^2}\sum_{n=1}^{N_1}n^2C_n\cos\frac{\pi nz}{h}\int_0^\infty\frac{\alpha}{\alpha^2h^2+\pi^2n^2}\times$$
$$\times\left[\nu\Phi_2(\alpha)+5-4\nu+\frac{\omega\alpha^2}{4p^2}-\frac{\pi^2n^2}{\alpha^2h^2+\pi^2n^2}\Phi_2(\alpha)\right]\times$$
$$\times\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{4p^2}}\cdot J_0(\alpha r)d\alpha\Big\};$$
$$\frac{\bar\sigma_{rz}}{G\varepsilon_0}=\frac{m_2h\pi}{p^2}\sum_{n=1}^{\infty}nC_n\sin\frac{\pi nz}{h}\int_0^\infty\frac{\alpha^2}{\alpha^2h^2+\pi^2n^2}\times$$
$$\times\left[\nu-2-\nu\frac{\omega\alpha^2}{4p^2}+\frac{\pi^2n^2}{\alpha^2h^2+\pi^2n^2}\Phi_2(\alpha)\right]\times$$
$$\times\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{4p^2}}\cdot J_1(\alpha r)d\alpha;$$
$$\Phi_1(\alpha)=1+\frac{\omega\alpha^2}{4p^2},\ \Phi_2(\alpha)=3+\frac{\omega\alpha^2}{4p^2},$$
$$m_1=\frac{1-2\nu}{1-\nu},\ m_2=\frac{1}{1-\nu}.$$

Формули для визначення напружень у шарі запишемо так:

$$\sigma_{ij}=\bar\sigma_{ij}+\bar{\bar\sigma}_{ij},$$

де складові $\bar{\bar{\sigma}}_{ij}$ виражаються функцією Лява L, яку у випадку осьової симетрії зручно представити через інтеграл Ганкеля

$$L=\int_0^\infty \alpha^{-2}\left[A(\alpha)sh\alpha z+B(\alpha)ch\alpha z+\right.$$
$$\left.+\alpha z\left(C(\alpha)sh\alpha z+D(\alpha)ch\alpha z\right)\right]\cdot J_0(\alpha z)d\alpha .$$

Задовольняючи граничні умови $\sigma_{rz}=0$ при $z=0, u_z=0$ при $z=h$ та $u_r=0$ при $z=h$, одержимо систему трьох алгебраїчних рівнянь відносно функцій $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$, $D(\alpha)$.

$$2\nu C+B=0,$$
$$\left[2(1-2\nu)C-B-\alpha hD\right]ch\alpha h+$$
$$+\left[2(1-2\nu)D-A-\alpha hC\right]sh\alpha h=0$$
$$\left[A+D+\alpha hC\right]ch\alpha h+$$
$$+\left[B+C+\alpha hD\right]sh\alpha h=0 \qquad (4)$$

Виразимо $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $D(\alpha)$ через $C(\alpha)$ із співвідношень (4)

$$A(\alpha)=\frac{8(1-\nu)^2+2\nu(3-4\nu)sh^2\alpha h}{(3-4\nu)ch\alpha h\cdot sh\alpha h-\alpha h}C(\alpha),$$
$$B(\alpha)=-2\nu C(\alpha),$$
$$D(\alpha)=\frac{2(\nu-1)+(4\nu-3)sh^2\alpha h}{(3-4\nu)ch\alpha h\cdot sh\alpha h-\alpha h}C(\alpha).$$

Задовольняючи граничні умови $\sigma_{zz}=0$ при $z=0, 0\le r\le a, r>b$ та $u_z=w(r)$ при $a\le r\le b$ приходимо до інтегральних рівнянь задачі

$$\int_0^\infty C(\alpha)J_0(\alpha r)\,d\alpha=\frac{m_1}{2}W(r), a\le r\le b, \qquad (5)$$

$$\int_0^\infty \alpha\left[-\frac{2G}{1-2\nu}\frac{C(\alpha)}{\Delta^*(\alpha)}+2G\left(f_1(\alpha)+f_2(\alpha)\right)\right]\times ,$$
$$\times J_0(\alpha r)d\alpha=0,\quad 0\le r\le a, r\ge b; \qquad (6)$$

$$f_1(\alpha)=\frac{m_2}{2}\left(\frac{\nu-2}{p^2}-\frac{\nu\omega\alpha^2}{4p^4}\right)\left(C_0+\sum_{n=1}^{N_1}C_n n^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{4p^4}},$$

$$f_2(\alpha)=\frac{m_2}{2}\frac{\pi^2}{p^2}\sum_{n=1}^{N_1}\frac{C_n n^2}{\alpha^2h^2+\pi^2n^2}\times$$
$$\times\left[\left(\nu-\frac{\pi^2n^2}{\alpha^2h^2+\pi^2n^2}\right)\Phi_2(\alpha)+5-4\nu+\frac{\omega\alpha^2}{4p^2}\right]e^{-\frac{\alpha^2}{4p^2}},$$

$$\Delta^*(\alpha)=\frac{(4\nu-3)ch\alpha h\cdot sh\alpha h+\alpha h}{22\nu-12\nu^2-10+(4\nu-3)sh^2\alpha h}.$$

Рівняння (6) запишемо у вигляді

$$\int_0^\infty \alpha\left\{-\frac{2G}{1-2\nu}\cdot\frac{C(\alpha)}{\Delta^*(\alpha)}+2G\varepsilon_0^*\left(f_1(\alpha)+f_2(\alpha)\right)\right\}\times$$
$$\times J_0(\alpha r)d\alpha=$$
$$X(r)\left[u(r-a)-u(r-b)\right], 0\le r<\infty, \qquad (7)$$

де $u(x)$ – одинична функція Хевісайда.

Застосуємо до співвідношення (7) теорему обернення інтегрального перетворення Ганкеля

$$-\frac{2G}{1-2\nu}\cdot\frac{C(\alpha)}{\Delta^*(\alpha)}+2G\varepsilon_0^*\left(f_1(\alpha)+f_2(\alpha)\right)=$$
$$\int_a^b r\,X(r)J_0(\alpha r)dr=\Psi(\alpha). \qquad (8)$$

Візьмемо функцію $X(r)$ у вигляді:

$$X(r)=\sum_{n=1}^N a_n\left[J_0\left(\frac{r}{a}\gamma_n\right)\cdot N_0(\gamma_n)-\right.$$
$$\left.-J_0(\gamma_n)\cdot N_0\left(\frac{r}{a}\gamma_n\right)\right], \qquad (9)$$

де $N_0(x)$ – функція Неймана, a_n – невідомі поки що коефіцієнти, γ_n – додатні корені рівняння:

$$J_0\left(\frac{b}{a}z\right)\cdot N_0(z)-J_0(z)\cdot N_0\left(\frac{b}{a}z\right)=0.$$

Відзначимо, що функція $X(r)$ визначає шукані контактні напруження під штампом.

Обчислимо інтеграл (8), враховуючи вираз (9) для функції $X(r)$

$$\Psi(\alpha)=\sum_{n=1}^N\frac{a_n}{\alpha^2-\left(\frac{\gamma_n}{a}\right)^2}\times$$
$$\times\left[\frac{2}{\pi}J_0(a\alpha)-J_0(b\alpha)R(\gamma_n)\right], \qquad (10)$$
$$R(\gamma_n)=\frac{b}{a}\gamma_n\left[N_0(\gamma_n)J_1\left(\frac{b}{a}\gamma_n\right)-\right.$$
$$\left.-J_0(\gamma_n)N_1\left(\frac{b}{a}\gamma_n\right)\right].$$

З (8) знайдемо

$$C(\alpha) = -\frac{1-2\nu}{2G}\Delta^*(\alpha)\Psi(\alpha) +$$
$$+(1-2\nu)\Delta^*(\alpha)\,\varepsilon_0^*\big(f_1(\alpha)+f_2(\alpha)\big). \quad (11)$$

Підставимо (11) в (5), одержимо вираз для $W(r)$ через функцію $\Psi(\alpha)$

$$W(r) = \frac{2}{m_1}\int_0^\infty \Big[-\frac{1-2\nu}{2G}\Delta^*(\alpha)\Psi(\alpha) +$$
$$+(1-2\nu)\varepsilon_0^*\Delta^*(\alpha) f_1(\alpha)\Big] J_0(\alpha r)\, d\alpha\,,$$
$$a \le r \le b. \quad (12)$$

З врахуванням (12) та (10), співвідношення (1), після переходу до безрозмірних величин $\rho = \frac{r}{b}$, $\varepsilon = \frac{a}{b}$, $\alpha = \frac{\beta}{b}$, $S_1 = b^2 p^2$, $c_1 = \frac{c}{b}$, $k_2\beta = \alpha h$, $k_2 = \frac{h}{b}$, набуває вигляду:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \int_0^\infty \frac{\Delta^*(\beta)}{\beta^2 - \frac{\gamma_n^2}{\varepsilon^2}}\Big[\frac{2}{\pi}J_0(\varepsilon\beta) - J_0(\beta)R_n(\gamma_n)\Big]\times$$
$$\times\begin{Bmatrix} J_0(\rho\beta) - J_0(\varepsilon\beta) \\ J_0(\rho\beta) - J_0(\beta)\end{Bmatrix} d\beta =$$
$$= \frac{-Gb}{1-\nu}\begin{Bmatrix} \frac{1}{2R_1}\Big[(x_1-\varepsilon)^2 - (x_1-\rho)^2\Big], \varepsilon \le \rho < x_1; \\ \frac{1}{2R_1}(x_1-a)^2, \quad x_1 \le \rho \le c_1; \\ \frac{1}{2R_2}(1-x_2)^2, \quad c_1 < \rho \le x_2; \\ \frac{1}{2R_2}\Big[(1-x_2)^2 - (x_2-\rho)^2\Big], x_2 < \rho < 1. \end{Bmatrix} +$$
$$+\frac{G\varepsilon_0^* m_2}{S_1}\int_0^\infty \Delta^*(\beta)\Bigg\{\Big(\nu - 2 - \frac{\nu\omega\beta^2}{4S_1}\Big) +$$
$$+\pi^2 k^2 \sum_{n=1}^{N_1} c_n n^2 \Bigg\{\frac{1}{k_2^2\beta^2 + \pi^2 n^2}\Bigg[\Bigg(\nu - \frac{\pi^2 n^2}{k_2^2\beta^2 + \pi^2 n^2}\Bigg)\cdot$$
$$\times\Bigg(3 + \frac{\omega\beta^2}{4S_1^2}\Bigg) + 5 - 4\nu + \frac{\omega\beta^2}{4S_1^2}\Bigg]\Bigg\}\Bigg\}\cdot e^{-\frac{\beta^2}{4S_1}}\times$$
$$\times\begin{Bmatrix} J_0(\rho\beta) - J_0(\varepsilon\beta) \\ J_0(\rho\beta) - J_0(\beta)\end{Bmatrix} d\beta \quad (13)$$

і є основною рівністю для визначення невідомих коефіцієнтів a_n $\left(n = \overline{1, N}\right)$.

Для побудови розв'язку задачі покладемо

$$a_n = -\frac{Gb}{(1-\nu)2R_1}y_n^{(1)} - \frac{Gb}{(1-\nu)2R_2}y_n^{(2)} +$$
$$+\frac{\varepsilon_0^* G}{(1-\nu)}y_n^{(3)} \quad (14)$$

та використаємо метод суперпозиції для розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Будемо вимагати виконання рівності (13) в точках $\rho_1 = \varepsilon + \Delta\rho$, $\rho_2 = \varepsilon + 2\Delta\rho$, …, $\rho_{n-1} = \varepsilon + (n-1)\Delta\rho$, $\rho_N = 1$, $\Delta\rho = \frac{1-\varepsilon}{N}$.

Отже, системи лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення $y_n^{(i)}$ $(i = 1,2,3)$ набудуть вигляду

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_{jn}^* \cdot y_n^{(i)} = F_i^*(\rho_j),\ \left(j = \overline{1,\ N}\right)\ (i = 1,2,3),$$

де

$$\alpha_{jn}^* = \int_0^\infty \Delta^*(\beta)\frac{\varepsilon^2}{\beta^2\varepsilon^2 - \gamma_n^2}\times$$
$$\times\Big[\frac{2}{\pi}J_0(\varepsilon\beta) - J_0(\beta)R_n(\gamma_n)\Big]\times$$
$$\times\begin{Bmatrix} J_0(\rho_j\beta) - J_0(\varepsilon\beta) \\ J_0(\rho_j\beta) - J_0(\beta)\end{Bmatrix} d\beta,$$

$$F_1^*(\rho_j) = \begin{cases} (x_1-\varepsilon)^2 - (x_1-\rho_j)^2, \varepsilon \le \rho_j < x_1, \\ (x_1-\varepsilon)^2,\ x_1 \le \rho_j < c_1, \\ 0,\ c_1 < \rho_j \le 1; \end{cases}$$

$$F_2^*(\rho_j) = \begin{cases} 0, & \varepsilon \le \rho_j < c_1, \\ (1-x_2)^2, & c_1 < \rho_j \le x_2, \\ (1-x_2)^2 - (\rho_j - x_2)^2,\ x_2 < \rho_j \le 1; \end{cases}$$

$$F_3^*(\rho_j) = \frac{1}{S_1}\int_0^\infty \Delta^*(\beta)\Bigg\{\nu - 2 - \frac{\nu\omega\beta^2}{4S_1} +$$
$$+\pi^2 k_2^2 \sum_{n=1}^{N} C_n \cdot n^2 \frac{1}{k_2^2\beta^2 + \pi^2 n^2}\Bigg[\ 5 - \nu +$$
$$+\Bigg(1 - \frac{\pi^2 n^2}{k_2^2\beta^2 + \pi^2 n^2}\Bigg)\cdot\frac{\omega\beta^2}{4S_1}\Bigg]\Bigg\}\times$$
$$\times e^{-\frac{\beta^2}{4S_1^2}}\begin{Bmatrix} J_0(\rho_j\beta) - J_0(\varepsilon\beta) \\ J_0(\rho_j\beta) - J_0(\beta)\end{Bmatrix} d\beta.$$

Враховуючи (14), формулу для обчислення контактних напружень під штампом запишемо так:

$$\sigma_{zz}(\rho,0) = -\frac{G}{1-\nu}\cdot z_1 \sum_{n=1}^{N} y_n^{(1)} \chi(\rho,\gamma_n) -$$
$$-\frac{G}{1-\nu}\cdot z_2 \sum_{n=1}^{N} y_n^{(2)} \chi(\rho,\gamma_n) +$$
$$+\frac{G\varepsilon_0^*}{1-\nu} \sum_{n=1}^{N} y_n^{(3)} \chi(\rho,\gamma_n), \qquad (15)$$

тут

$$z_1 = \frac{b}{2R_1},\; z_2 = \frac{b}{2R_2},$$
$$\chi(\rho,\gamma_n) = J_0\left(\frac{p}{\varepsilon}\gamma_n\right) N_0(\gamma_n) - J_0(\gamma_n) N_0\left(\frac{p}{\varepsilon}\gamma_n\right).$$

Вимагаючи виконання умови рівноваги штампа та умови рівності вертикальних переміщень точок області контакту при $r = r_1$ та $r = r_2$

$$2\pi \int_a^1 \rho \sigma_{zz}(\rho,0)\, dp = -P,\; W(r_1) = W(r_2),$$

одержимо систему двох рівнянь відносно z_1 та z_2, розв'язавши яку матимемо:

$$z_1 = -\frac{P}{2\pi b} z_1^{(p)} + \frac{\varepsilon_0 G}{1-\nu} z_1^{(c)},$$
$$z_2 = -\frac{P}{2\pi b^2} z_2^{(p)} + \frac{\varepsilon_0 G}{1-\nu} z_2^{(c)}. \qquad (16)$$

Підставляючи (16) в (15), знайдемо $\sigma_{zz}(\rho,0) = \sigma_{zz}^{(P)}(\rho) + \sigma_{zz}^{(T)}(\rho)$, де

$$\sigma_{zz}^{(P)}(\rho) = -\frac{P}{2\pi b^2}\left[z_1^{(p)} \sum_{n=1}^{N} y_n^{(1)} \chi(\rho,\gamma_n) + \right.$$
$$\left. + z_2^{(p)} \sum_{n=1}^{N} y_n^{(2)} \chi(\rho,\gamma_n) \right],$$
$$\sigma_{zz}^{(*)}(\rho) = -\varepsilon_0 \left[z_1^{(c)} \sum_{n=1}^{N} y_n^{(1)} \chi(\rho,\gamma_n) + \right.$$
$$\left. + z_2^{(c)} \sum_{n=1}^{N} y_n^{(2)} \chi(\rho,\gamma_n) - \sum_{n=1}^{N} y_n^{(3)} \chi(\rho,\gamma_n) \right].$$

Розглянуто приклад розв'язування систем N лінійних алгебраїчних рівнянь з N невідомими $x_n^{(i)}$. Числовий аналіз виконано для $N = 20$. На рис. 2-3 подано результати розподілу безрозмірних складових σ_{zz}^{P} – пунктирна крива і σ_{zz}^{*} – криві 1, 2, 3 вздовж радіальної координати ρ.

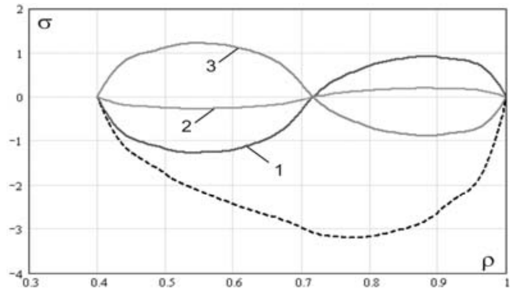

Рис. 2. Розподіл складових напружень під штампом для значень параметрів:
$x_1 = x_2 = 0.7$, $\varepsilon = 0.4$, $S_1 = 0.4$, $k_2 = 2$, $\nu = 0.3$,;
1 - $_0 = 1$, $c_1 = 0$; **2** - $c_0 = 1$; $c_1 = 0.4$, **3** – $c_0 = 1$, $c_1 = 1$

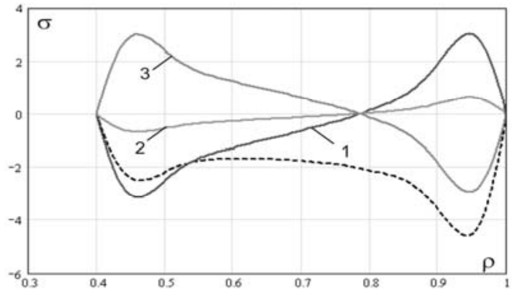

Рис. 3. Розподіл складових напружень під штампом для значень параметрів
$x_1 = 0.5$, $x_2 = 0.9$, $\varepsilon = 0.4$, $S_1 = 0.4$, $k_2 = 2$, $\nu = 0.3$;
1 - $c_0 = 1$, $c_1 = 0$; **2** - $c_0 = 1$; $c_1 = 0.4$, **3** – $c_0 = 1$, $c_1 = 1$

Залишкові напруження в шарі суттєво впливають на контактні напруження. Тому врахування залишкових деформацій є надзвичайно важливим при проведенні інженерних розрахунків, оскільки співпадання знаку силової та складової, зумовленої наявністю залишкових деформацій, може значно збільшити абсолютне значення контактних напружень під штампом.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Грилицкий, Д. В. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости [Текст] / Д. В. Грилицкий, Я. И. Кизыма. – Львов: Изд-во при Львов. ун-те, 1981. – 135 с.
2. Шелестовський Б. Контактна взаємодія штампа з шаром із залишковими деформаціями, зумовленими кільцевим зварним швом [Текст] / Б. Шелестовський, Г. Габрусєв // Машинознавство. – 2003. - № 2. – С. 9-12.
3. Недосека, А. Я. Основы расчета сварных конструкций [Текст] / А. Я. Недосека. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1998. – 263 с.

Надійшла до редколегії 20.06.2011.
Прийнята до друку 29.06.2011.