

## ВИЗНАЧЕННЯ КОМПОНЕНТІВ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТА РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ ТРУБОБЕТОНУ ПРИ МІСЦЕВИХ СИЛОВИХ ВПЛИВАХ

Наведено методику визначення компонентів напружено-деформованого стану трубобетону та його розрахунку на міцність. Приведений алгоритм ґрунтується на основних рівняннях лінійної теорії пружності, ітеративному методі змінної характеристики пружності та на методі скінчених елементів.

*Ключові слова:* трубобетон, напружено-деформований стан, місцевий вплив, міцність, МСЕ

Представлено методику определения компонентов напряженно-деформированного состояния трубобетона и его расчета на прочность. Представленный алгоритм основывается на основных уравнениях линейной теории упругости, итеративном методе переменной характеристике упругости и на методе конечных элементов.

*Ключевые слова:* трубобетон, напряженно-деформированное состояние, местное воздействие, прочность, МКЭ

Method of the determination component tense-deformed condition concrete tube and its calculation on toughness was presented. The presented algorithm is founded on the main equations of the linear theory to bounce, iterative method to variable feature to bounce and on method final element.

*Keywords:* guncrete, deflected mode, local influence, durability, FEM of the linear theory to bounce, iterative method to variable feature to bounce and on finite element method.

Загальна проблема полягає в тому, що на цей час значно частіше застосовують звичайні залізобетонні конструкції не зважаючи на суттєві переваги трубобетону. Це призводить до наступних негативних наслідків, таких як зайві витрати матеріалів, зайвих витрат пов'язаних з технологією зведення та інших, які визначають вартість і терміни будівництва. Якісне розв'язання цієї проблеми матиме важливі наслідки: зниження вартості будівництва, скорочення термінів зведення будівель, економія матеріалів та енергоресурсів.

На даний момент проведено значний обсяг досліджень трубобетонних конструкцій [2, 5, 8]. На основі цих досліджень зроблено деякі висновки про особливості його роботи. Дослідження виявили значну ефективність трубобетону і встановили певні закономірності його роботи та руйнування. Також запропоновано ряд методик для оцінки його міцності.

Невирішеною частиною вище зазначеної загальної проблеми, якій присвячується ця стаття є проблема дослідження роботи трубобетону при місцевих силових впливах. На даний час не існує досліджень трубобетону при його локальних навантаженнях. Необхідно розробити методику розрахунку компонентів напружено-деформованого стану та методику розрахунку трубобетону при місцевих силових впливах, які

б дозволили точно оцінити роботу трубобетону при таких видах навантаження.

При підготовці статті були поставлені наступні завдання:

- a) описати математичну модель трубобетону на якій ґрунтується розроблена методика;
- b) описати алгоритм визначення компонентів напружено-деформованого стану трубобетону при його розрахунку на міцність;
- c) порівняти результати розрахунків з експериментальними значеннями.

Для математичної моделі була використана теорія пружності [1]. Для того щоб перевести трубобетонний елемент в площину теорії пружності необхідно зробити певні припущення [1].

Система рівнянь рівноваги складається з трьох рівнянь та має дев'ять невідомих, що явно не достатньо для її розв'язку. Але спираючись на передумову, що тіло знаходиться в рівновазі для нього будуть справедливі три умови взаємності дотичних напружень [1].

Враховавши ці умови в статичних рівняннях отримуємо систему з трьох рівнянь, але вже з шістьма невідомими. Необхідні додаткові рівняння отримують розглядаючи деформації тіла (геометричні рівняння) [1], та їх зв'язок із напруженнями (фізичні рівняння).

Для врахування нелінійного характеру роботи матеріалів будемо спиратися на теорему

Іллюстрація про просте завантаження [4]. За її допомогою можна встановити зв'язок між складним та простим напружено-деформованими станами. Відповідно до цієї теореми в якості залежності між інтенсивностями напружень та деформацій  $\sigma_i = \hat{O}(\varepsilon_i)$ , можна прийняти діаграму  $\sigma = \hat{O}(\varepsilon)$  отриману при випробуваннях на одновісний розтяг чи стиск. Але при цьому повинна також виконуватись і умова щодо активності деформації та простого завантаження.

Для бетону були застосовані вирази (1) та (2), отримані в роботі [8]. Формули - емпіричні, отримані шляхом статистичної обробки даних випробувань широкого діапазону бетонів та дають непоганий збіг теоретичних та експериментальних значень:

– залежність січного модуля від рівня напружень

$$E'_b = E_0 \left( 1 - 0.4 \left( \frac{\sigma_b}{R_{b,m}} - 0.2 \right) \right), \quad (1)$$

де  $E'_b$  – січний модуль бетону, що відповідає певному рівню напружень;  $\sigma_b$  – напруження в бетоні;  $R_{b,m}$  – призмova міцність бетону;  $E_0$  – початковий модуль пружності бетону;

– залежність коефіцієнта поперечної деформації від рівня напружень (який представлений в цій формулі січним модулем  $E'_b$ )

$$\nu_b = \nu_{b,пред} \left( 1 - \left( 1 - \frac{\nu_{b,0}}{\nu_{b,пред}} \right) \frac{E'_b}{E_{b,0}} \right), \quad (2)$$

де  $\nu_{b,пред}$  – максимальне значення коефіцієнта поперечної деформації бетону;  $\nu_{b,0}$  – початкове значення коефіцієнта поперечної деформації бетону.

Для сталі також обрані формули які певною мірою узагальнюють випробування зразків різної за міцністю сталі. В наших методах сталь представлена ідеально-пластичним тілом, якому відповідає діаграма Прандтля.

Зв'язок між компонентами напружень та зовнішнього навантаження в точці на околиці тіла відображається в граничні умови [1].

Основними граничними умовами для трубобетонного елемента, що розглядається в нашій задачі буде рівномірно розподілене навантаження  $q$  на торці елемента та відсутність жодних силових факторів на зовнішній боковій поверхні елемента.

З точки зору математичної теорії пружності вище згаданих рівнянь достатньо для розв'язку

поставленої задачі – визначення компонентів напружено-деформованого стану трубобетону ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, u, v, w$ ) при певному завантаженні.

Для аналізу несучої здатності трубобетонного елемента та більш повного уявлення про напружено-деформований стан також будемо визначати головні напруження та головні деформації [1].

Для трубобетонного елемента при місцевих силових впливах (рис. 1) розробимо її скінченно-елементну модель.

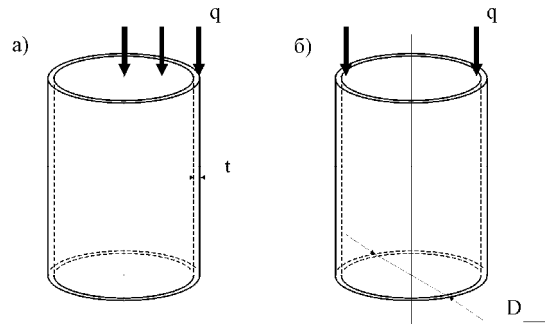


Рис. 1. Схеми місцевих силових впливів на трубобетонні елементи

На першому етапі рішення задачі створимо геометричну частину скінченно елементної моделі трубобетонного елемента. За її основу приймемо круглий брус та циліндр з розмірами їх прототипів – ядра та оболонки трубобетонного елемента.

Обираючи форму елементів для моделі в цій задачі ми так само виходили з необхідності максимально представити ними форму прийнятих бруса та циліндра. Прийняті нами об'ємні елементи зображені на рис. 2.

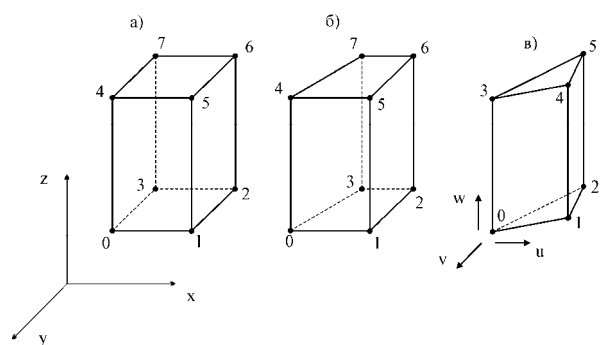


Рис. 2. Геометричні моделі прийнятих скінчених елементів

Вони мають різну форму поперечного перерізу (прямокутні, чотирикутні та трикутні), але ця проблема буде нами вирішена за допомогою відображення їх у допоміжну систему координат. Після представлення трубобетонного елемента за допомогою прийнятих скінчених еле-

ментів поперечний переріз матиме вигляд зображений на рис 3.

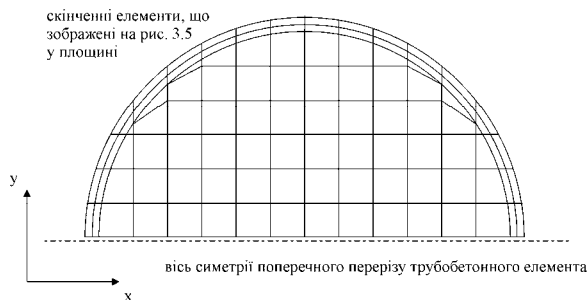


Рис. 3. Типовий поперечний переріз скінчено-елементної моделі трубобетону при місцевих силових впливах

Для прийнятої моделі можна застосувати спрощення: розглядати не весь трубобетонний елемент, а тільки його половину.

При створенні математичної частини СЕМ в якості базового методу для визначення невідомих застосуємо метод апроксимації базисними функціями (3):

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m; \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (3)$$

де  $\varphi$  – невідома функція;  $\hat{\varphi}$  – функція, що апроксимує невідому;  $\psi$  – функція, що задовольняє граничним умовам;  $a_m$  – параметри апроксимації;  $N_m$  – базисні функції;  $M$  – кількість застосованих базисних функцій.

Для визначення параметрів апроксимації  $a_m$  із формули (3) для забезпечення більшої точності застосовуємо метод зважених відхилень. Формула, за якою відбувається реалізація методу має вигляд:

$$\int_{\Omega} W_{\ell} R_{\Omega} d\Omega = 0; \quad \ell = 1, 2, \dots, M, \quad (4)$$

де  $R_{\Omega} = \varphi - \hat{\varphi}$ ;  $W_{\ell}$  – вагові функції;  $\Omega$  – область на якій розглядається відхилення.

Спільне застосування (3) і (4) створює систему  $M$  рівнянь, яка містить  $M$  невідомих.

Формулу (4) можна застосувати для будь-якої області, в тому числі й для деякої частини  $\Omega$ , на якій задані граничні умови. Позначимо таку область  $\tilde{A}$ . У формулі (3) врахування граничних умов забезпечувалось функцією  $\psi$ . Її роль полягає у точному описі поведінки невідомої функції на області  $\tilde{A}$ , тоді як компонент  $\sum a_m N_m$  у тій же формулі відповідає за апроксимацію невідомої функції на  $\Omega$ . Послаблюючи вимоги до апроксимації на області  $\tilde{A}$ , але

значно спрощуючи її процедуру, функцію  $\psi$  можна розглядати як невідому та застосувати замість неї компонент типу  $\sum a_m N_m$ . Спираючись на вище приведене справедливе буде записати

$$\int_{\Omega} W_{\ell} R_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_{\ell} R_{\Gamma} d\Gamma = 0. \quad (5)$$

З метою мінімізувати похибку на областях  $\Omega$  та на  $\Gamma$  будемо вимагати, щоб

$$R_{\Omega} = R_{\Gamma} = \varphi - \hat{\varphi} = 0. \quad (6)$$

Тоді із урахуванням (6) підставимо диференціальні рівняння рівноваги [1] та граничні умови у (5) та отримаємо систему.

Проведемо в цій системі наступні підстановки та перетворення:

1. виразимо напруження в системі через переміщення ( $u, v, w$ );

2. для зниження вимоги щодо класу гладкості  $C^r$  базисної функції застосуємо відому формулу Гріна [7], що дозволяє зменшити порядок похідної;

3. для апроксимації переміщень застосуємо формулу (3), а для вибору вагових функцій метод Гальоркіна [3];

4. для зручності в користуванні представимо систему в векторному вигляді.

Таким чином отримуємо рівняння методу зважених відхилень для рівнянь рівноваги в переміщеннях:

$$\sum_{m=1}^M \left( \int_{\Omega} (\mathfrak{Z} N_{\ell})^T D \mathfrak{Z} N_m d\Omega \right) a_m = \int_{\Gamma_{\sigma}} N_{\ell} q d\Gamma, \quad (7)$$

Як вже було відмічено, з метою максимально наблизитись до реальної роботи трубобетонного елемента, скінченні елементи були прийняті у вигляді чотирикутних та трикутних призм (див. рис. 2). Але для скінчених елементів такої форми при розробці базисних функцій виникають певні труднощі. Тому, в якості одного із варіантів, пропонується відобразити прийняті елементи у скінченні елементи з простішою формою. Такими елементами можуть бути звичайні куби. При цьому обравши відповідним чином локальну систему координат (той простір, у якій відобразимо об'ємні секторні елементи) можна отримати і додаткові переваги. Так, важливим буде й те, що будь-який елемент СЕМ у локальній системі координат ( $\xi, \eta, \psi$ ) матиме однакові координати і геометричні розміри. Щоб виконати це технічно, нам необхідно залучити додатковий простір. Таким

допоміжним простором може бути система координат із визначеними нами, виходячи із прийнятих скінчених елементів, законами зміни вздовж її осей декартових координат. Встановимо відповідність між системами  $XOY$  та  $\Xi O\Xi$  за допомогою складених функцій. Вони гарантують, що будь-який елемент СЕМ у  $(\xi, \eta, \psi)$  є кубом. Також вони гарантують, що для будь-якої точки такого куба буде справедливим наступний вираз:

$$-1 \leq \xi, \eta, \psi \leq 1.$$

Тепер, коли вже маємо «зручні» СЕМ та скінчені елементи можна за наведеними вище правилами розробити комплект базисних функцій для кожного скінченого елемента. Але ще одна перевага проведеного відображення, яка є наслідком наведених вище, полягає у тому, що будь-який скінчений елемент у локальній системі координат  $(\xi, \eta, \psi)$  матиме один і той самий комплект базисних функцій.

Похідні базисних функцій у (7) отримаємо наступним чином.

Розглянемо функцію  $N = f(\xi, \eta, \psi)$  як складну та застосуємо до неї правило диференціювання складних функцій [7]. Із цієї системи і отримаємо вирази для шуканих похідних.

При визначенні несучої здатності ми спиратимемось на енергетичну теорію міцності.

За допомогою нижче представленого алгоритму можна провести розрахунок компонентів напружено-деформованого стану трубобетону та визначити його міцність. Алгоритми стосуються трубобетонного елемента, що знаходиться під дією місцевих силових впливів або ж під дією центрального стиснення.

В результаті розрахунків за запропонованою методикою отримаємо: три лінійні переміщення:  $u, v, w$ , три нормальні напруження:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ; три дотичних напружень:  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ ; три лінійних відносних видовжень:  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ ; три кутових зсувів:  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ . Потім на їх основі визначаються головні напруження:  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  та головні деформації:  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .

На першому етапі формуємо геометричну модель трубобетонного елемента.

На другому етапі для кожного елемента розраховуються компоненти матриць властивості матеріалів.

На третьому етапі за лівою частиною формули (7) відбувається формування матриць з коефіцієнтами елементів.

На четвертому етапі за правою частиною рівняння (7) відбувається формування векторів навантаження скінчених елементів, що безпосередньо перебувають під впливом навантаження.

П'ятий етап – процес ансамблювання. На цьому етапі відбувається формування глобальної системи рівнянь, розв'язком якої будуть шукані переміщення.

Шостий етап – це розв'язок глобальної СЛАР. В нашій методиці він реалізується за допомогою QR-розкладу матриці Гівенса.

Сьомий етап – визначення деформацій.

На восьмому етапі визначаються напруження.

В цій моделі механічні властивості бетону розглядаються як змінні величини. Тому для того, щоб отримати адекватну навантаженню оцінку напружено-деформованого стану, необхідно отримати відповідні значення модуля деформації та коефіцієнта поперечної деформації. Цю задачу будемо вирішувати за допомогою ітерацій за формулами (1) та (2).

У випадку, коли визначається несуча здатність трубобетону при місцевих силових впливах, додається необхідність порівнювати визначені при відповідних навантаженню механічних характеристиках бетону компоненти напружено-деформованого стану з межею міцності матеріалу. Окрім цього, так як у вхідних даних відсутній компонент навантаження, програмним шляхом приймається попереднє його значення, яке уточнюється до тих пір, доки прийнятий критерій міцності трубобетону не відповідатиме своїй межі. За критерій міцності прийнято досягнення в оболонці напруженнями значень, що за енергетичною теорією міцності відповідатимуть межі міцності сталі при осьовому стисненні, прийнятому за [5].

Для апробації методики був проведений розрахунок на міцність трубобетонних зразків, що досліджувались нами під час випробувань. Результати розрахунків наведені у таблиці 1. ТБ-IV завантажувався двома силами, розташованими по краях торця.

Як бачимо з табл. 1, розрахунок за теоретичним методом задовільно оцінює несучу здатність зразка. Мінус біля значення відносної похибки говорить про оцінку несучої здатності у запас.

Таблиця 1

**Міцність випробуваних зразків  
за запропованою методикою**

Зразок	Експеримент, кН	Метод за теорією, кН	$\Delta$ , %
ТБ-IV	350,0	313,2	-11 %
ТБ-V	450,0	403,8	-10 %
ТБ-VI	800,0	756,1	-6 %

Для частини оболонки, що розташована під навантаженням розраховувалась інтенсивність напружень, яка порівнювалась із межею плинності сталі оболонки. Зразки ТБ-V та ТБ-VI випробовувались при прикладенні навантаження на половину торця. Результати випробувань та розрахунку співпадають задовільно. Це говорить про об'єктивність положень теорії та правильність вибору граничного стану для відповідного способу завантаження.

Запропонована методика розроблена для розрахунку компонентів напружено-деформованого стану трубобетону при локальних силових впливах. На рис. 4 наведено співставлення поздовжніх деформацій у різних рівнях зразків, що отримані із експериментальних випробувань (суцільна лінія) та за розрахунком на основі запропонованої методики (пунктирна лінія).

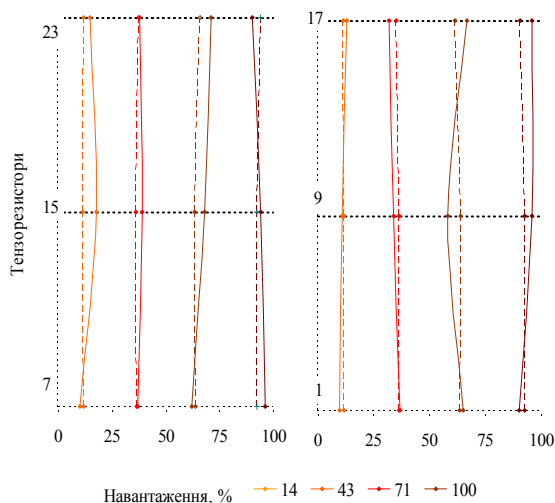


Рис. 4. Поздовжні деформації ТБ-IV

Можемо побачити, що результати співпадять добрі. Для зразка ТБ-IV експериментальні та теоретичні лінії майже співпадають. Такий зразок був завантажений по краях торця, що

зумовило значні деформації саме в місцях дії навантаження. Тензорезистори розміщувались на відстані 1/4 висоти зразка від торця, де зусилля значною мірою розосередились по елементу.

В результаті проведеного дослідження був розроблений теоретичний підхід для вирішення проблеми глибокого аналізу напружено-деформованого стану трубобетонних конструкцій при місцевих завантаженнях. Завдяки сучасній обчислювальній техніці стало можливим застосування потужних чисельних методів для розв'язку складних задач. Тому в межах математичної теорії пружності із застосуванням методу скінчених елементів була розроблена методика для визначення компонентів напружено-деформованого стану трубобетону. Перспективними є напрямки по розширенню методики на сталезалізобетонні конструкції й в першу чергу, на гнучкі трубобетонні колони.

### БІБЛЮГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Безухов, Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести [Текст]: учебник для вузов / Н. И. Безухов. – М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.
2. Долженко, А. А. К теории расчета трубобетона [Текст] / А. А. Долженко // Сб. науч. тр. Воронежского инж.-строит. ин-та. – Воронеж, 1964. – Вып. 10. – С. 25-33.
3. Зенкевич, О. С., Конечные элементы и аппроксимация [Текст]: перевод с англ. / О. С. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
4. Илюшин, А. А. Пластичность [Текст] / А. А. Илюшин. – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
5. Кикин, А. И., Конструкции из стальных труб, заполненных бетоном [Текст] / А. И. Кикин, Р. С. Санжаровский, В. А. Труль. – М.: Госстройиздат, 1974. – 146 с.
6. Мэтьюз, Джон Г., Численные методы. Использование MATLAB [Текст]: перевод с англ. / Джон Г. Мэтьюз, Куртис Д. Цинк. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. – 720 с.
7. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов [Текст]: учебн. пособ. для вузов / Н. С. Пискунов. – М.: Наука, 1985. – 992 с.
8. Стороженко, Л. И. Объемное напряженно-деформированное состояние железобетона с косвенным армированием [Текст]: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. / Л. И. Стороженко. – М., 1985. – 519 с.

Надійшла до редколегії 18.04.11.

Прийнята до друку 11.05.2011.