

ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ОБЪЕМНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЕТА КONTИНУАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ МОСТОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В роботі розглянуті теоретичні основи розробки об'ємних скінчених елементів, які можуть бути використані для розрахунку континуальних моделей мостових конструкцій.

Ключові слова: метод скінчених елементів, континуальна система, міст, балка, стержень

В работе рассмотрены теоретические основы разработки объемных конечных элементов, которые могут быть использованы при расчете континуальных моделей мостовых конструкций.

Ключевые слова: метод конечных элементов, континуальная система, мост, балка, стержень

In the article are represents theoretical basis of design volume finite elements which can be used at calculation continuous models of bridge systems.

Keywords: finite element method, continuous system, bridge, beam, bar

Развитие численных методов анализа мостовых конструкций занимает важное место среди общих задач современного мостостроения. Несмотря на стабильное увеличение объемов инженерного программного обеспечения, в отдельных областях проектирования строительных конструкций, в частности, транспортных сооружений, по-прежнему остаются востребованными программные комплексы для проведения статических и динамических расчетов. Один из таких комплексов представлен в работе [1].

В программном комплексе Belinda динамический анализ мостовой конструкции осуществляется с применением методов прямого интегрирования (так называемый расчет во временной области [2]). Дифференциальные уравнения движения узлов конструкции представлены в форме Ньютона-Эйлера, которые впоследствии интегрируются численным методом по схеме Рунге-Кутты. Для определения параметров напряженно-деформированного состояния в элементах мостовой конструкции на каждом шаге интегрирования выполняется статический расчет методом конечных элементов. Алгоритмы построения разрешающих уравнений для пролетных строений железнодорожных мостов с применением стержневых и балочных конечных элементов опубликованы ранее [3, 4]. Целью настоящей статьи является расширение библиотеки конечных элементов программного комплекса Belinda для статического расчета пространственных континуальных систем.

В основе объектно-ориентированного программирования лежит понятие наследования

структур данных [5]. Эта концепция позволяет установить некоторый базовый класс данных с обозначенными, но неопределенными (виртуальными) свойствами и функциями, который в общей топологии классов обычно называют «предком». В каждом новом классе данных, наследованном от «предка», имеется возможность реализовать функционал виртуальных свойств, а также расширить его новыми функциями. Каждый наследованный класс («потомок») способен стать «предком» для своей подсистемы, и все новые классы данных, наследованные от него, будут иметь расчетный потенциал всей иерархии «предков». Таким образом, высокоуровневое программирование позволяет строить объектные модели различных систем, обладающих иерархической структурой. Эту методику удобно применять, например, для описания топологии конечных элементов.

В виду того, что конечные элементы имеют целый ряд свойств и параметров, то достаточно сложно классифицировать их по какому-то определенному признаку. Например, в программном комплексе Ansys™ определено более пятидесяти различных типов конечных элементов. Каждый из них находит применение в отдельной области расчета (статический и динамический анализ, моделирование вязкоупругих и вязкопластичных материалов, задачи стационарного и нестационарного теплообмена, анализ движения потоков жидкости и газа, задачи гидроаэродинамики, акустики и пр.).

Простейшим признаком конечного элемента является его мерность. Если для аппроксимации поля перемещений используются полино-

миальные функции, то в соответствии с их порядком конечные элементы могут быть разделены на три класса: симплекс-, комплекс- и мультиплекс-элементы [6]. В первом случае полином на основе симплексной функции содержит константу и линейные члены, во втором – компоненты более высоких порядков, причем комплекс-элементы по сравнению с симплекс-элементами имеют ряд дополнительных узлов (например, в центрах граней). Для границ мультиплекс-элементов справедливо условие параллельности координатным осям, поэтому конечные элементы данного класса могут рассматриваться как частный случай комплекс-элементов.

Так как операция формирования общей матрицы жесткости является одним из основных этапов расчета системы МКЭ, особое внимание при этом необходимо уделять построению локальных матриц жесткости конечных элементов.

Как известно, локальная матрица жесткости стержневого элемента в пространственной постановке может быть представлена квадратной блочной матрицей следующего вида:

$$C = \begin{array}{c|cc} i & 1 & 2 \\ \hline 1 & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & & & & \\ c_{31} & & \dots & & & \dots \\ c_{41} & & & & & \\ c_{51} & & & & & \\ c_{61} & & & & & c_{66} \end{bmatrix} & [6 \times 6] \\ \hline 2 & [6 \times 6] & [6 \times 6] \end{array} \quad (1)$$

Для конечного элемента с n узлами локальная матрица жесткости будет иметь порядок $6n$:

$$C = \begin{array}{c|ccc} i & 1 & \dots & n \\ \hline 1 & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & & & & \\ c_{31} & & \dots & & & \dots \\ c_{41} & & & & & \\ c_{51} & & & & & \\ c_{61} & & & & & c_{66} \end{bmatrix} & \dots & [6 \times 6] \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & [6 \times 6] & \dots & [6 \times 6] \end{array} \quad (2)$$

Система уравнений равновесия, необходимых для определения узловых перемещений конструкции, получена на основе принципа возможных перемещений [7]:

$$CZ = R, \quad (3)$$

где C – глобальная матрица жесткости; Z – вектор искомых перемещений; R – вектор внешних узловых нагрузок.

Нетрудно видеть, что для отыскания вектора глобальных узловых перемещений достаточно определить матрицу податливости системы $L = C^{-1}$:

$$Z = LR. \quad (4)$$

При расчете стержневой или балочной конструкции с использованием одномерных конечных элементов система уравнений (4) относительно перемещений дает точное решение, которое в дальнейшем можно использовать для вычисления остальных параметров напряженно-деформированного состояния. Для двух- и трехмерных систем, как правило, вектор глобальных перемещений Z определяется приближенно, после дискретизации континуума соответствующими плоскими или объемными конечными элементами.

Следует отметить, что при расчете стержневых систем вектор R (4) характеризует нагрузку общего вида, приведенную к узлам конструкции. В случае континуальной системы имеем дело с элементарными объемными телами бесконечно малых форм и размеров, поэтому вектор R , в общем случае, может состоять из следующих компонентов:

$$R = R_V + R_A - R_G + R_S, \quad (5)$$

где R_V – вектор нагрузки от влияния объемных сил; R_A – то же, поверхностных; R_G – вектор нагрузки, учитывающий влияние начальных напряжений в конструкции; R_S – вектор сосредоточенных сил.

Выражение вектора объемных сил имеет вид:

$$R_V = \sum_{j=1}^m \int_V H_{V,j}^T F_{V,j} dV, \quad (6)$$

где $j = 1, 2, \dots, m$ – порядковый номер конечного элемента; V_j – его объем; $F_{V,j}$ – вектор объемных сил, приложенных к j -му конечному элементу.

Аналогичный вид имеет выражение вектора поверхностных сил:

$$R_A = \sum_{j=1}^m \int_A H_{A,j}^T F_{A,j} dA, \quad (7)$$

где A – площадь поверхности j -го конечного элемента.

Эффект начальных напряжений учитывается вектором

$$R_{\sigma} = \sum_{j=1}^m \int_V B_j^T \sigma_j dV, \quad (8)$$

где σ_j – вектор напряжений j -го конечного элемента.

Для сосредоточенных сил имеем

$$R_S = \sum_{j=1}^m F_{S,j}, \quad (9)$$

где $F_{S,j}$ – вектор сосредоточенных сил в пределах j -го конечного элемента.

Используя в МКЭ идею метода перемещений, будем определять перемещения u и деформации ε j -го конечного элемента в его локальной системе координат через глобальные перемещения Z всех n узлов конструкции:

$$\left. \begin{aligned} u_j(x, y, z) &= H_j(x, y, z)Z; \\ \varepsilon_j(x, y, z) &= B_j(x, y, z)Z, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где вектор-столбец глобальных перемещений Z размерности $3n$ имеет вид:

$$Z = \underbrace{\{x_1 y_1 z_1 \quad x_2 y_2 z_2 \quad \dots \quad x_n y_n z_n\}}_{3n}. \quad (11)$$

Здесь и далее фигурные скобки условимся использовать для обозначения вектор-столбца. Матрица H_j (10) устанавливает функциональную связь локальных перемещений узлов системы с их глобальными перемещениями. Как правило, эти зависимости в МКЭ принимаются в виде полиномов. Так, перемещение i -го узла в локальной системе координат j -го конечного элемента (см. рис. 1) может быть представлено следующими выражениями:

$$\left\{ \begin{aligned} ux_i(x_i, y_i, z_i) &= a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i + a_4 z_i + \\ &\quad + a_5 x_i y_i + a_6 y_i z_i + a_7 z_i x_i + a_8 x_i^2 y_i + \dots; \\ uy_i(x_i, y_i, z_i) &= b_1 + b_2 x_i + b_3 y_i + b_4 z_i + \\ &\quad + b_5 x_i y_i + b_6 y_i z_i + b_7 z_i x_i + b_8 x_i^2 y_i + \dots; \\ uz_i(x_i, y_i, z_i) &= c_1 + c_2 x_i + c_3 y_i + c_4 z_i + \\ &\quad + c_5 x_i y_i + c_6 y_i z_i + c_7 z_i x_i + c_8 x_i^2 y_i + \dots, \end{aligned} \right. \quad (12)$$

где x_i, y_i, z_i – положение i -го узла в локальной системе координат конечного элемента; $a_1 \dots c_4$ – коэффициенты (обобщенные координаты).

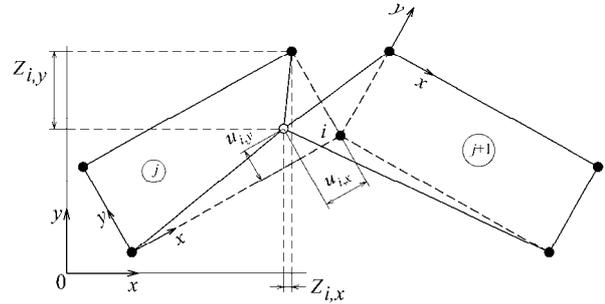


Рис. 1. Геометрия перемещений узла конечного элемента в локальной и глобальной системах координат

Количество обобщенных координат в полиномах (12) должно соответствовать общему количеству узлов конечного элемента n и размерности координатного пространства [6]. Таким образом, степень полинома, описывающего поле перемещений конечного элемента, является важным критерием точности расчета МКЭ.

В матричном представлении система уравнений (12) примет вид:

$$u_i = \bar{\Phi}_i \bar{\alpha}, \quad (13)$$

где $\bar{\alpha}$ – вектор неизвестных обобщенных координат:

$$\bar{\alpha} = \underbrace{\{a_1 \quad a_2 \quad \dots \mid b_1 \quad b_2 \quad \dots \mid c_1 \quad c_2 \quad \dots\}}_{3n}; \quad (14)$$

$\bar{\Phi}_i$ – матрица полиномиальных функций размера $3 \times n$:

$$\bar{\Phi} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i & x_i y_i & y_i z_i & z_i x_i & x_i^2 y_i & \dots \end{bmatrix}}_n; \quad (15)$$

$$\bar{\Phi}_i = \underbrace{\begin{bmatrix} [\Phi] & 0 & 0 \\ 0 & [\Phi] & 0 \\ 0 & 0 & [\Phi] \end{bmatrix}}_n. \quad (16)$$

Обобщаем соотношение (13) на все n узлов j -го конечного элемента:

$$u_j = A_j \alpha_j, \quad (17)$$

где A_j – блочная матрица размера $3n \times 3n$:

$$A_j = \underbrace{\begin{bmatrix} [\bar{A}_j] & 0 & 0 \\ 0 & [\bar{A}_j] & 0 \\ 0 & 0 & [\bar{A}_j] \end{bmatrix}}_{3n}. \quad (18)$$

Квадратная матрица \bar{A}_j размера $n \times n$ численно реализует функцию φ (15) и содержит локальные координаты всех n узлов j -го конечного элемента:

$$\bar{A}_j = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 & x_1 y_1 & \dots \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 & x_2 y_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & y_n & z_n & x_n y_n & \dots \end{bmatrix}}_n. \quad (19)$$

Все блочные элементы матрицы A_j (18), кроме диагональных, равны нулю. Матрица α_j в (17) является блочным вектором и имеет размер $3n \times 1$:

$$\alpha_j = \{[\bar{\alpha}]_1 \quad [\bar{\alpha}]_2 \quad \dots \quad [\bar{\alpha}]_n\}. \quad (20)$$

Необходимым условием для построения математической модели конечного элемента является формулировка зависимостей его деформаций от перемещений $\varepsilon = f(u)$ и напряжений от деформаций $\sigma = f(\varepsilon)$. Для пространственной задачи теории упругости деформации и напряжения в трехмерном элементе описываются соответствующими векторами с шестью компонентами:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_j &= \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\}; \\ \sigma_j &= \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{zx}\}, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Далее каждый полином (12) необходимо продифференцировать согласно (22):

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{xx} &= \frac{\partial (a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i + a_4 z_i + a_5 x_i y_i + \dots)}{\partial x}; \\ \bar{\varepsilon}_{yy} &= \frac{\partial (b_1 + b_2 x_i + b_3 y_i + b_4 z_i + b_5 x_i y_i + \dots)}{\partial y}; \\ \bar{\varepsilon}_{zz} &= \frac{\partial (c_1 + c_2 x_i + c_3 y_i + c_4 z_i + c_5 x_i y_i + \dots)}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\gamma}_{xy} &= \frac{\partial (a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i + a_4 z_i + a_5 x_i y_i + \dots)}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial (b_1 + b_2 x_i + b_3 y_i + b_4 z_i + b_5 x_i y_i + \dots)}{\partial x}; \\ \bar{\gamma}_{yz} &= \frac{\partial (b_1 + b_2 x_i + b_3 y_i + b_4 z_i + b_5 x_i y_i + \dots)}{\partial z} + \\ &+ \frac{\partial (c_1 + c_2 x_i + c_3 y_i + c_4 z_i + c_5 x_i y_i + \dots)}{\partial y}; \\ \bar{\gamma}_{zx} &= \frac{\partial (c_1 + c_2 x_i + c_3 y_i + c_4 z_i + c_5 x_i y_i + \dots)}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial (a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i + a_4 z_i + a_5 x_i y_i + \dots)}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Результат дифференцирования запишем в вектор E_j размером 6×1 :

$$E_j = \{\bar{\varepsilon}_{xx} \quad \bar{\varepsilon}_{yy} \quad \bar{\varepsilon}_{zz} \quad \bar{\gamma}_{xy} \quad \bar{\gamma}_{yz} \quad \bar{\gamma}_{zx}\}. \quad (25)$$

Таким образом, деформации конечного элемента зависят от ранее принятого интерполяционного полинома, что дает возможность строить различные математические модели конечных элементов, в зависимости от типа решаемой задачи.

В матричной форме соотношения (22) для j -го конечного элемента имеют вид:

$$\varepsilon_j = E_j A_j^{-1} u_j. \quad (26)$$

Вектор обобщенных напряжений (21) определяется зависимостью

$$\sigma_j = \tilde{C}_j \varepsilon_j + \sigma_j^{(0)}, \quad (27)$$

где \tilde{C}_j – обобщенная матрица упругости; $\sigma_j^{(0)}$ – вектор начальных напряжений.

Окончательно выражение для локальной матрицы жесткости конечного элемента примет вид

$$C_j = \int_V E_j^T C_j E_j dV. \quad (28)$$

Глобальная матрица жесткости системы формируется прямым суммированием локаль-

ных матриц жесткости всех конечных элементов (метод прямых жесткостей [7]).

В заключение необходимо отметить, что применение интерполяционных функций для аппроксимации перемещений конечного элемента иногда приводит к несоблюдению условий геометрической инвариантности. Это становится очевидным, когда для описания перемещений по разным направлениям применяются полиномы с различными компонентами при обобщенных координатах [7]. В случае изменения ориентации элемента эти компоненты могут быть неточными и приводить к ошибкам в решении. Чтобы избежать этого, рекомендуется использовать выражения для перемещений, не зависящие от ориентации элемента. Однако более эффективным решением, в данном случае, следует считать применение изопараметрических конечных элементов, математические модели которых основаны на функциях формы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Распопов, А. С. Моделирование колебаний балочных железнодорожных мостов в среде объектно-ориентированного программирования Delphi [Текст] / А. С. Распопов, В. Е. Артемов, С. П. Русу // Вісн. Дніпр. нац. ун-та залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. - 2010. - Вип. 33. - С. 217-222.
2. Ушкалов, В. Ф. Математическое моделирование колебаний рельсовых транспортных средств [Текст] / В. Ф. Ушкалов, Л. М. Резников, В. С. Иккол и др. // Ин-т техн. мех. АН УССР. - К.: Наук. думка. - 1989. - 240 с.
3. Распопов, А. С. Особенности компьютерного моделирования динамической нагруженности конструкций железнодорожных мостов [Текст] / А. С. Распопов, В. Е. Артемов, С. П. Русу // Зб. наук. праць Укр. держ. акад. залізн. трансп. - 2010. - Вып. 114. - С. 123-132.
4. Распопов, А. С. Алгоритм расчета колебаний стержневых конструкций на основе общего уравнения динамики и метода конечных элементов [Текст] / А. С. Распопов, В. Е. Артемов, С. П. Русу // Дороги і мости: Зб. наук. пр. - Вип. 11. - К.: ДерждорНДІ. - 2009. - С. 256-263.
5. Голованов, М. Е. Создание компонентов в среде Delphi [Текст] / М. Е. Голованов, Е. О. Веселов. - СПб.: БХВ-Петербург. - 2004. - 320 с.
6. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов [Текст] / Л. Сегерлинд. - М.: «Мир». - 1979. - 392 с.
7. Бате, К. Численные методы анализа и метод конечных элементов [Текст] / К. Бате, Е. Вилсон. - М.: Стройиздат. - 1982. - 448 с.

Поступила в редколлегию 20.06.2011.

Принята в печать 07.07.2011.