УДК 517.94+519.62

Р. Я. ПЕЛЕХ (НУ «Львівська політехніка»), Й. Й. ЛУЧКО (Львівська філія ДІІТу)

ДВОСТОРОННІ ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ СХЕМИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОЦІНКОЮ ГОЛОВНОГО ЧЛЕНА ПОХИБКИ

Виведено двосторонні розрахункові формули другого порядку точності розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь, що базуються на неперервних дробах. У запропонованих обчислювальних формулах можна оцінити значення головного члена локальної похибки без додаткових звертань до правої частини диференціального рівняння.

Ключові слова: нелінійні диференціальні рівняння, похибка, метод Рунге-Кутта, ряд Тейлора

Выведены двусторонние расчетные формулы второго порядка точности решения задачи Коши для обычных дифференциальных уравнений, которые базируются на непрерывных дробях. В предложенных вычислительных формулах можно оценить значение главного члена локальной погрешности без дополнительных обращений к правой части дифференциального уравнения.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, погрешность, метод Рунге-Кутта, ряд Тейлора

The two-side methods of the second order of accuracy are constructed. The formulas give an opportunity to receive upper and lover approximation at each point to the exact solution and define the value of the main error without referring to the right part of differential equation.

Keywords: nonlinear differential equations, precision error, Runge-Kutta method, Taylor series

Актуальність проблеми

Багато прикладних задач, зокрема розрахунок напружено-деформованого стану тонкостінних елементів конструкцій (стержнів, пластин, оболонок), задачі багатовимірної оптимізації, електроніки, кінетики, проблеми побудови і дослідження математичних моделей фізико-хімічних, біологічних і економічних процесів у загальному випадку зводяться до розв'язання задачі Коші для нелінійних систем диференціальних рівнянь.

В прикладній математиці широкого застосування набули неперервні (ланцюгові) дроби. Вони дають можливість отримувати двосторонні і монотонні наближення, мають слабку чутливість до похибок заокруглень, а також вірно відображають основні властивості розв'язків досліджуваних задач [1-3].

Запропоновані у даній роботі обчислювальні алгоритми дають можливість у кожній точці отримувати не тільки двосторонні наближення до точного розв'язку, але і оцінку головного члена локальної похибки. Двосторонність і необхідна точність на всьому інтервалі інтегрування досягається за допомогою параметрів ω і h.

Характерною особливістю таких алгоритмів є те, що при відповідних значеннях параметрів, що входять в обчислювальні схеми, можна отримати як нові, так і традиційні двосторонні методи Рунге-Кутта розв'язання поставленої задачі. Двосторонні розрахункові формули першого порядку точності подано в роботі [4].

Вигідно виокремлює ці схеми від традиційних двосторонніх алгоритмів

Вигідно виокремлює ці схеми від традиційних двосторонніх алгоритмів [5-7] те, що у запропонованих обчислювальних формулах можна оцінити значення головного члена локальної похибки без додаткових звертань до правої частини диференціального рівняння.

Постановка задачі

Розглянемо на відрізку $I_L:\left[x_0, x_0+L\right]$ задачу Коші:

$$y' = f\left(x, y\right),\ \ y\left(x_0\right) = y_0,\ \ x \in \left[x_0, x_0+L\right], \qquad (1)$$

де *y(x)* – дійсний, *m* – компонентний вектор, *f* – дійсна векторна функція залежної та незалежної змінних, причому припускається, що функція *f* диференційована стільки разів, скільки необхідно для чисельного аналізу.

Використовуючи апарат неперервних дробів [3, 4] та ідею побудови методів типу Рунге-Кутта [8], пропонуються наближені методи розв'язування рівняння (1).

Двосторонні розрахункові формули будуються так, щоб їх локальні похибки в кожній вузловій точці мали вигляд:

$$y\left(x_{n+1}\right)-y_{n+1}=\omega h^{p} K F_{n}(f)+O(h^{p+1}), \quad (2)$$

де $y(x_{n+1})$ і y_{n+1} – відповідно точний і наближений розв'язок задачі (1), h – крок інтегрування, $F_n\left(f\right)$ – деякий диференціальний оператор, обчислений в точці (x_n, y_n), K – константа, p – порядок точності обчислювальної схеми, ω – параметр двосторонності.

Побудова двосторонніх методів типу Рунге-Кутта

Не обмежуючи загальності, будемо шукати наближений розв'язок задачі (1) у скалярному випадку, оскільки на системи рівнянь дана методика знаходження двосторонніх наближених розв'язків переноситься покомпонентно.

Введемо на відрізку I_L сітку σ_h = $\{a=x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b\}$ з кроком
$h = x_{n+1} - x_n$.

Для побудови двосторонніх методів типу Рунге-Кутта, представимо наближений розв'язок задачі (1) у вигляді ланцюгового дробу:

$$y_{n+1}^{[k,l]} = {y_n}/{D_n}, \quad (3)$$

де

$$D_n=\sum_{i=0}^{k-1} d_{i,0}+\cfrac{d_{k,0}}{1+\cfrac{d_{k,1}}{1+\ddots+\cfrac{d_{k,l-1}}{1+d_{k,l}}}}.$$

Вирази для $d_{k,l}$ у випадку $k+l=\overline{1,4}$ ($k=\overline{1,4};\ l=\overline{0,3}$) мають вигляд:

$$d_{0,0}=1; d_{i,0}=-\sum_{m=1}^{i} d_{i-m,0}\cdot\frac{\sigma_m}{y_n}; i=\overline{1,4};$$

$$d_{\nu,1}=-\frac{d_{\nu+1,0}}{d_{\nu,0}}; \nu=\overline{1,3}; d_{\mu,2}=d_{\mu+1,1}-d_{\mu,1}; \mu=1,2;$$

$$d_{1,3}=d_{1,2}\frac{d_{2,2}}{d_{1,2}}; \sigma_m=h\sum_{i=1}^{q} a_{mi}k_i; q=k+l; \quad (4)$$

$$k_i=f(x_n+\alpha_i h,\ y_n+h\sum_{j=1}^{q}\beta_{ij}k_j); \alpha_i=\sum_{j=1}^{q}\beta_{ij};$$

$$y_n\neq 0.$$

де h – крок інтегрування ($h=x_{n+1}-x_n$, $n=0,1,2,\ldots$), a_{ij}, α_i β_{ij} – параметри.

Ці формули дозволяють будувати як явні ($\beta_{ij}=0$, при $i\le j$), так і неявні числові методи. Значення параметрів a_{ij}, α_i β_{ij} зручно записувати у вигляді таблиці:

$$\begin{array}{ccccccc}
\alpha_1 & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1\nu} & a_{11} & \cdots & a_{1\nu} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\alpha_\nu & \beta_{\nu 1} & \cdots & \beta_{\nu\nu} & a_{\nu 1} & \cdots & a_{\nu\nu}
\end{array}$$

Побудуємо двосторонні методи другого порядку точності. Для цього розглянемо формули (3) і (4) при $k+l=3$ $(k=\overline{1,3};\ l=\overline{0,2})$ тобто

$$y_{n+1}^{[k,l]}=\begin{cases}\dfrac{y_n}{d_{0,0}+d_{1,0}+d_{2,0}+d_{3,0}}, \ \textit{якщо}\ k=3, l=0 \\ \dfrac{y_n}{d_{0,0}+d_{1,0}+\dfrac{d_{2,0}}{1+d_{2,1}}}, \ \textit{якщо}\ k=2, l=1 \\ \dfrac{y_n}{d_{0,0}+\cfrac{d_{1,0}}{1+\cfrac{d_{1,1}}{1+d_{1,2}}}}, \ \textit{якщо}\ k=1, l=2,\end{cases} \quad (5)$$

де

$$\begin{gathered}d_{0,0}=1; d_{i,0}=-\sum_{m=1}^{i} d_{i-m,0}\cdot\frac{\sigma_m}{y_n}; i=1,2,3; \\ d_{1,1}=-\frac{d_{2,0}}{d_{1,0}}; d_{2,1}=-\frac{d_{3,0}}{d_{2,0}}; d_{1,2}=d_{2,1}-d_{1,1}; \\ \sigma_m=h\cdot\sum_{i=1}^{3}a_{mi}k_i; k_i=f(x_n+\alpha_i h, y_n+h\sum_{j=1}^{3}\beta_{ij}k_j); \\ \alpha_i=\sum_{j=1}^{3}\beta_{ij}.\end{gathered} \quad (6)$$

Параметри $a_{mi},\alpha_i,\beta_{ij}\left(m,i,j=1,2,3\right)$ визначаються з умови (2). Розвинення $y\left(x_{n+1}\right)$ в ряд Тейлора по степенях h в околі точки x_n має вигляд

$$y\left(x_{n+1}\right)=y\left(x_n\right)+hf+\frac{1}{2}h^2 Df+ \\ +\frac{1}{6}h^3\left(D^2 f+\frac{\partial f}{\partial y}Df\right)+O\left(h^4\right)$$

де для скорочення записів введені позначення: $D=\dfrac{\partial}{\partial x}+f\dfrac{\partial}{\partial y}$, $D^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+2f\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}+f^2\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ і т.д.

Розглянемо формули (3) і (4) при $k=3$, $l=0$ Підставивши замість $d_{i,0}$ $\left(i=\overline{1,3}\right)$ їх значення, отримаємо $y_{n+1}^{[3,0]}$ у вигляді:

$$y_{n+1}^{[3,0]}=\frac{P_{[3,0]}}{Q_{[3,0]}}, \tag{7}$$

де $P_{[3,0]}=y_n^4$,

$$Q_{[3,0]}=y_n^3-hy_n^2\left(\sum_{m=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}a_{mi}k_i\right)+h^2y_n\left[\left(\sum_{i=1}^{3}a_{1i}k_i\right)^2+\right.$$
$$\left.+2\left(\sum_{i=1}^{3}a_{1i}k_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3}a_{2i}k_i\right)\right]-h^3\left(\sum_{i=1}^{3}a_{1i}k_i\right)^3,$$

$$k_i=f\left(x_n+d_ih,\ y_n+h\sum_{j=1}^{3}\beta_{ij}k_j\right),\ \alpha_i=\sum_{j=1}^{3}\beta_{ij},$$

$\left(i=\overline{1,3}\right)$.

Розвинемо в ряд Тейлора по степенях h вирази для $\left(\sum_i a_{1i}k_i\right)^2, \left(\sum_i a_{1i}k_i\right)\left(\sum_i a_{2i}k_i\right)$ і $\left(\sum_i a_{1i}k_i\right)^3$ (тут позначено $\sum_i=\sum_{i=1}^{3}$):

$$\begin{aligned}&\left(\sum_i a_{\mu i}k_i\right)\left(\sum_i a_{\nu i}k_i\right)=\left(\sum_i a_{\mu i}\right)\left(\sum_i a_{\nu i}\right)f^2+h\left[\left(\sum_i a_{\mu i}\alpha_i\right)\cdot\sum_i a_{\nu i}+\left(\sum_i a_{\nu i}\alpha_i\right)\cdot\sum_i a_{\mu i}\right]f\cdot Df+h^2\times\\&\times\left(\left[\left(\sum_i a_{\nu i}\frac{\alpha_i^2}{2}\right)\cdot\sum_i a_{\mu i}+\left(\sum_i a_{\mu i}\frac{\alpha_i^2}{2}\right)\cdot\sum_i a_{\nu i}\right]f\cdot D^2f++\left[\sum_i a_{\mu i}\left(\sum_i a_{\nu i}\sum_j\beta_{ij}\alpha_j\right)+\sum_i a_{\nu i}\left(\sum_i a_{\mu i}\sum_j\beta_{ij}\alpha_j\right)\right]\times\right.\\&\left.\times f\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot Df+\left(\sum_i a_{\mu i}\alpha_i\right)\left(\sum_i a_{\nu i}\alpha_i\right)(Df)^2+O\left(h^3\right)\right.\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}&\left(\sum_i a_{1i}k_i\right)^3=\left(\sum_i a_{1i}\right)^3f^3+3h\left(\sum_i a_{1i}\right)^2\left(\sum_i a_{1i}\alpha_i\right)f^2\cdot Df+3h^2\left(\sum_i a_{1i}\right)^2\left[\left(\sum_i a_{1i}\frac{\alpha_i^2}{2}\right)f^2\cdot D^2f+\left(\sum_i a_{1i}\sum_j\beta_{ij}\alpha_j\right)\times\right.\\&\left.\times f^2\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot Df\right]+3h^2\left(\sum_i a_{1i}\right)\left(\sum_i a_{1i}\alpha_i\right)^2f\cdot(Df)^2+O\left(h^3\right)\end{aligned}\tag{9}$$

Підставивши розвинення (8), (9) в $Q_{[3,0]}$ отримаємо :

$$\begin{aligned}&Q_{[3,0]}=y_n^3-hy_n^2f\left\{\sum_i a_{1i}+\sum_i a_{2i}+\sum_i a_{3i}\right\}+h^2\left\{\left[\left(\sum_i a_{1i}\right)^2+2\left(\sum_i a_{1i}\right)\left(\sum_i a_{2i}\right)\right]y_nf^2-\right.\\&\left.\left(\sum_i a_{1i}\alpha_i+\sum_i a_{2i}\alpha_i+\sum_i a_{3i}\alpha_i\right)y_n^2\cdot Df\right\}+h^3\left\{-\left(\sum_i a_{1i}\frac{\alpha_i^2}{2}+\sum_i a_{2i}\frac{\alpha_i^2}{2}+\sum_i a_{3i}\frac{\alpha_i^2}{2}\right)y_n^2\cdot D^2f-\right.\\&-\left(\sum_i a_{1i}\sum_j\beta_{ij}\alpha_j++\sum_i a_{2i}\sum_j\beta_{ij}\alpha_j+\sum_i a_{3i}\sum_j\beta_{ij}\alpha_j\right)y_n^2\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot Df+2\left[\left(\sum_i a_{1i}\right)\left(\sum_i a_{1i}\alpha_i\right)+\right.\\&\left.\left.+\left(\sum_i a_{2i}\right)\left(\sum_i a_{1i}\alpha_i\right)+\left(\sum_i a_{1i}\right)\left(\sum_i a_{2i}\alpha_i\right)\right]y_n\cdot f\cdot Df-\left(\sum_i a_{1i}\right)^3f^3\right\}+O\left(h^4\right)\end{aligned}$$

тоді

$$y\left(x_{n+1}\right)\cdot Q_{[3,0]}-P_{[3,0]}=\sum_{i=1}^{3}r_ih^i+O\left(h^4\right), \tag{10}$$

де

$$r_1=\left(1-\sum_m\sum_i a_{mi}\right)\cdot f\cdot y_n^3;$$

$$r_2=\left(\frac{1}{2}-\sum_m\sum_i a_{mi}\alpha_i\right)\cdot y_n^3\cdot Df+\left[\left(\sum_i a_{1i}\right)^2+2\left(\sum_i a_{1i}\right)\left(\sum_i a_{2i}\right)-\sum_m\sum_i a_{mi}\right]y_n^2 f^2;$$

$$\begin{aligned}r_3=&\left(\frac{1}{6}-\sum_m\sum_i a_{mi}\frac{\alpha_i^2}{2}\right)\cdot y_n^3\cdot D^2f+\left(\frac{1}{6}-\sum_m\sum_i a_{mi}\sum_j\beta_{ij}\alpha_j\right)\times y_n^3\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot Df+\left(2\left[\left(\sum_i a_{1i}\right)\left(\sum_i a_{1i}\alpha_i\right)+\left(\sum_i a_{2i}\right)\left(\sum_i a_{1i}\alpha_i\right)+\right.\right.\\&\left.\left.+\left(\sum_i a_{1i}\right)\left(\sum_i a_{2i}\alpha_i\right)\right]-\frac{1}{2}\sum_m\sum_i a_{mi}-\sum_m\sum_i a_{mi}\alpha_i\right)\cdot y_n^2\cdot f\cdot Df+\left[\left(\sum_i a_{1i}\right)^2+2\left(\sum_i a_{1i}\right)\left(\sum_i a_{2i}\right)-\left(\sum_i a_{1i}\right)^3\right]y_n\cdot f^3.\end{aligned}\quad (11)$$

Побудуємо явні двосторонні формули (покладемо $\beta_{ij}=0$, якщо $i\le j$ і $\alpha_1=0$, $\alpha_i=\sum_{j=1}^{i-1}\beta_{ij}$ $\left(i=2,3\right)$). В результаті отримаємо наступні вирази для коефіцієнтів чисельника при h,h^2,h^3:

$$hf\cdot y_n^3:\ 1-\sum_m\sum_i a_{mi};$$

$$h^2y_n^3\cdot Df:\ \frac{1}{2}-\sum_m\sum_i a_{mi}\alpha_i;$$

$$h^2y_n^2f^2:\ \left(\sum_i a_{1i}\right)^2+2\left(\sum_i a_{1i}\right)\left(\sum_i a_{2i}\right)-\sum_m\sum_i a_{mi};$$

$$h^3y_n^3\cdot D^2f:\ \frac{1}{6}-\sum_m\sum_i a_{mi}\frac{\alpha_i^2}{2}.$$

$$\begin{aligned}h^3y_n^2\cdot f\cdot Df:\ &2\left[\left(\sum_i a_{1i}\right)\left(\sum_i a_{1i}\alpha_i\right)+\right.\\&\left.+\left(\sum_i a_{2i}\right)\left(\sum_i a_{1i}\alpha_i\right)+\left(\sum_i a_{1i}\right)\left(\sum_i a_{2i}\alpha_i\right)\right]-\\&-\frac{1}{2}\sum_m\sum_i a_{mi}-\sum_m\sum_i a_{mi}\alpha_i\end{aligned}$$

$$h^3y_n^3\frac{\partial f}{\partial y}\cdot Df:\ \frac{1}{6}-\sum_m\sum_i a_{mi}\sum_j\beta_{ij}\alpha_j$$

$$h^3y_n\cdot f^3:\ \left(\sum_i a_{1i}\right)^2+2\left(\sum_i a_{1i}\right)\left(\sum_i a_{2i}\right)-\left(\sum_i a_{1i}\right)^3$$

І) Позначимо

$$\frac{1}{6}-\sum_{m=2}^{3}\sum_{i=1}^{3}a_{mi}\frac{\alpha_i^2}{2}=\omega,$$

$$\frac{1}{6}-\alpha_2\beta_{32}\sum_{i=1}^{3}a_{i3}=\omega$$

і прирівняємо до нуля всі решта коефіцієнти при степенях h, h^2 і h^3. Тоді матимемо систему нелінійних рівнянь:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{3}a_{1i}=1,\ \sum_{i=1}^{3}a_{2i}=0,\sum_{i=1}^{3}a_{31}=0,\\ \frac{1}{2}-\sum_{m=2}^{3}\sum_{i=1}^{3}a_{im}\alpha_m=0,\\ a_{32}\alpha_2+a_{33}\alpha_3=0,\\ \frac{1}{6}-\sum_{m=2}^{3}\sum_{i=1}^{3}a_{im}\frac{\alpha_m^2}{2}=\omega,\\ \frac{1}{6}-\alpha_2\beta_{32}\sum_{i=1}^{3}a_{i3}=\omega.\end{cases}\quad (12)$$

В цьому випадку

$$R^{[3,0]}\left(y_n,f,Df,D^2f\right)=$$
$$=\left\{\omega h^3y_n^3\left(D^2f+\frac{\partial f}{\partial y}Df\right)+O\left(h^4\right)\right\}\Big/Q_{[3,0]},$$

де

$$Q_{[3,0]}=y_n^3-hfy_n^2+O\left(h^2\right).$$

Система рівнянь (12) має три множини розв'язків:

1) $\alpha_2\ne\alpha_3$:

$$a_{11}=\frac{\alpha_2+\left(\alpha_3-\alpha_2\right)a_{13}}{\alpha_2},$$

$$a_{12}=-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}a_{13},$$

$$a_{21}=\frac{2a_{13}\left(\alpha_2-\alpha_3\right)-1}{2\alpha_2},$$

$$a_{22}=\frac{1+2a_{13}\alpha_3}{2\alpha_2},$$

$$a_{23}=-a_{13},$$

$$a_{31}=\frac{2\left(1-6\omega\right)-3\alpha_2}{6\alpha_2\alpha_3},$$

$$a_{32}=\frac{3\alpha_2-2(1-6\omega)}{6\alpha_2(\alpha_3-\alpha_2)},$$

$$a_{33}=\frac{2(1-6\omega)-3\alpha_2}{6\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)},$$

$$\beta_{21}=\alpha_2,\ \beta_{31}=\alpha_3-\beta_{32},$$

$$\beta_{32}=\frac{\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)(1-6\omega)}{\alpha_2(2-3\alpha_2-12\omega)},\qquad (13)$$

a_{13} - довільне число, α_2,α_3 - параметри, що задовольняють умову:

$$\alpha_2\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)(2-3\alpha_2-12\omega)\neq 0.$$

2). $\alpha_2=\alpha_3$:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}(1-6\omega) & \frac{2}{3}(1-6\omega) & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}(1-6\omega) & \frac{2}{3}(1-6\omega)-\frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & 0 \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} 1 & -a_{13} & a_{13} \\ -\frac{3}{4(1-6\omega)} & \frac{3}{4(1-6\omega)}-a_{23} & a_{23} \\ 0 & -a_{33} & a_{33} \end{array}\qquad (14)$$

де $b=a_{13}+a_{23}+a_{33}$, a_{13},a_{23},a_{33} – параметри $(b\neq 0)$.

3). $\alpha_2=2/3;\ \alpha_2\neq\alpha_3$:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1-6\omega}{4b} & \frac{1-6\omega}{4b} & 0 \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} 1-a_{13} & 0 & a_{13} \\ -\frac{3}{4}-a_{23} & \frac{3}{4} & a_{23} \\ -a_{33} & -\frac{3}{4}\omega & a_{33} \end{array}\qquad (15)$$

де $b=a_{13}+a_{23}+a_{33}$, a_{13},a_{23},a_{33} – параметри $(b\neq 0)$.

Зауваження. Обчисливши значення параметрів a_{ij}, α_i β_{ij}, можна легко оцінити головний член локальної похибки $R^{[3,0]}(y_n,f,Df,D^2f)$ за допомогою лінійної комбінації величин $k_i\ (i=1,2,3)$

II) Знайдемо значення параметрів, при яких має місце оцінка

$$R^{[3,0]}(y_n,f,Df)=\omega h^3y_n^2fDf/Q^{[3,0]}+O(h^4).$$

В цьому випадку параметри a_{ij}, α_i β_{ij} повинні задовольняти таку систему рівнянь:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{3}a_{1i}=1,\ \sum_{i=1}^{3}a_{2i}=0,\sum_{i=1}^{3}a_{31}=0,\\ \frac{1}{2}-\sum_{m=2}^{3}\sum_{i=1}^{3}a_{im}\alpha_m=0,\ \frac{1}{6}-\sum_{m=2}^{3}\sum_{i=1}^{3}a_{im}\frac{\alpha_m^2}{2}=0,\\ \frac{1}{6}-\alpha_2\beta_{32}\sum_{i=1}^{3}a_{i3}=0,\sum_{m=2}^{3}\sum_{i=1}^{2}a_{im}\alpha_m=\frac{1+\omega}{2}.\end{cases}\qquad (16)$$

Дана система має також три сімейства розв'язків:

А). $\alpha_2\neq\alpha_3$:

$$a_{11}=1+a_{13}\frac{(\alpha_3-\alpha_2)}{\alpha_2},\ a_{12}=-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}a_{13},$$

$$a_{21}=\frac{2a_{23}(\alpha_3-\alpha_2)-\alpha_2(1+\omega)}{2\alpha_2},$$

$$a_{22}=\frac{\alpha_2(1+\omega)-2a_{23}\alpha_3}{2\alpha_2},$$

$$a_{31}=\frac{2a_{33}(\alpha_3-\alpha_2)+\omega}{2\alpha_2},\ a_{32}=-\frac{2a_{33}\alpha_3+\omega}{2\alpha_2},$$

$$a_{33}=\frac{(2-3\alpha_2)}{6\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)}-a_{13}-a_{23},\ \beta_{21}=\alpha_2,$$

$$\beta_{32}=\frac{\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)}{\alpha_2(2-3\alpha_2)},\ \beta_{31}=\alpha_3-\beta_{32},\qquad (17)$$

де a_{13}, a_{23} - довільні числа, α_2,α_3 - параметри, що задовольняють умову:

$$\alpha_2\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)(2-3\alpha_2)(3\alpha_3-2)\neq 0.$$

B). $\alpha_2=\alpha_3$:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{4b} & \frac{2}{3}-\frac{1}{4b} & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & -a_{13} & a_{13} \\ -\frac{3}{4}(1+\omega) & \frac{3}{4}(1+\omega)-a_{23} & a_{23} \\ \frac{3}{4}\omega & -a_{33}-\frac{3}{4}\omega & a_{33} \end{array} \tag{18}$$

де $b=a_{13}+a_{23}+a_{33}$, a_{13},a_{23},a_{33} – параметри $(b\neq 0)$.

C). $\alpha_2=2/3;\ \ \alpha_2\neq\alpha_3$:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4b} & \frac{1}{4b} & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1-a_{13} & 0 & a_{13} \\ -\frac{3}{4}(1+\omega)-a_{23} & \frac{3}{4}(1+\omega) & a_{23} \\ \frac{3}{4}\omega-a_{33} & -\frac{3}{4}\omega & a_{33} \end{array} \tag{19}$$

де $b=a_{13}+a_{23}+a_{33}$, a_{13},a_{23},a_{33} – параметри $(b\neq 0)$.

III). Покладемо

$$\frac{1}{2}-\sum_{m=2}^{3}\sum_{i=1}^{3}a_{im}\alpha_m=3\omega,\ \frac{1}{6}-\sum_{m=2}^{3}\sum_{i=1}^{3}a_{mi}\frac{\alpha_i^2}{2}=\omega,$$

$$\frac{1}{6}-\alpha_2\beta_{32}\sum_{i=1}^{3}a_{i3}=\omega$$

і прирівняємо до нуля всі решта коефіцієнти при степенях h, h^2 і h^3. В результаті отримаємо систему нелінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3}a_{1i}=1,\ \ \sum_{i=1}^{3}a_{2i}=0, \sum_{i=1}^{3}a_{31}=0, \\ \frac{1}{2}-\sum_{m=2}^{3}\sum_{i=1}^{3}a_{im}\alpha_m=3\omega, \\ a_{32}\alpha_2+a_{33}\alpha_3=0, \\ \frac{1}{6}-\sum_{m=2}^{3}\sum_{i=1}^{3}a_{im}\frac{\alpha_m^2}{2}=\omega, \\ \frac{1}{6}-\alpha_2\beta_{32}\sum_{i=1}^{3}a_{i3}=\omega. \end{cases} \tag{20}$$

Система рівнянь (20) має наступні розв'язки :

а) $\alpha_2\neq\alpha_3$:

$$a_{11}=1+a_{13}\frac{(\alpha_3-\alpha_2)}{\alpha_2},\ a_{12}=-\frac{\alpha_3}{\alpha_2}a_{13},$$

$$a_{21}=\frac{2a_{23}(\alpha_3-\alpha_2)-(1-6\omega)}{2\alpha_2},$$

$$a_{22}=\frac{(1-6\omega)-2a_{23}\alpha_3}{2\alpha_2},\ a_{31}=a_{33}\frac{(\alpha_3-\alpha_2)}{\alpha_2},$$

$$a_{32}=-a_{33}\frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \tag{21}$$

$$a_{33}=\frac{(2-3\alpha_2)(1-6\omega)}{6\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)}-a_{13}-a_{23},\ \beta_{21}=\alpha_2,$$

$$\beta_{31}=\alpha_3-\beta_{32},\ \beta_{32}=\frac{\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)}{\alpha_2(2-3\alpha_2)},$$

де a_{13}, a_{23} – довільні числа, α_2,α_3 - параметри, що задовольняють умову:

$\alpha_2\alpha_3(\alpha_3-\alpha_2)(2-3\alpha_2)(3\alpha_3-2)\neq 0$.

b) 2). $\alpha_2=\alpha_3$:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3}-\beta_{32} & \beta_{32} & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & -a_{13} & a_{13} \\ -\frac{3}{4}(1-6\omega) & \frac{3}{4}(1-6\omega)-a_{23} & a_{23} \\ 0 & a_{13}+a_{23}-\frac{1-6\omega}{4\beta_{32}} & \frac{(1-6\omega)}{4\beta_{32}}-a_{13}-a_{23} \end{array} \tag{22}$$

де $\beta_{32}\neq 0, a_{13},a_{23}$ – параметри.

c). $\alpha_2 = 2/3;\ \alpha_2 \neq \alpha_3$:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1-a_{13} & 0 & a_{13} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & -\frac{3}{4}(1-6\omega) & \frac{3}{4}(1-6\omega) & 0 \\ 0 & -\beta_{32} & \beta_{32} & 0 & a_{13}-\frac{(1-6\omega)}{4\beta_{32}} & 0 & \frac{(1-6\omega)}{4\beta_{32}}-a_{13} \end{array} \qquad (23)$$

де β_{32} – відмінне від нуля число.

У цьому випадку головний член локальної похибки на кожному кроці має вигляд:

$$R^{[3,0]}\left(f, Df, D^2 f\right) = \omega \times$$
$$\times\left[h^2 3y_n^3 Df + h^3 y_n^3\left(D^2 f + \frac{\partial f}{\partial y}Df\right)\right] / Q^{[3,0]} + O\left(h^4\right).$$

Зауваження 1. При значеннях параметрів (17), (18), (19), а також з (21), (22), (23) можна отримувати двосторонні наближення до точного розв'язку , використовуючи лише три звертання до правої частини диференціального рівняння.

Зауваження 2. Обчисливши значення параметрів $a_{mi}, \alpha_i, \beta_{ij}\left(m, i, j = 1,2,3\right)$, можна легко оцінити головний член локальної похибки $R^{[3,0]}$ за допомогою лінійної комбінації величин $k_i\left(i = 1,2,3\right)$.

Пари формул, що відповідають двом значенням ω, які відрізняються лише знаком, складають формули двостороннього методу, оскільки одна з них дає верхнє, а друга – нижнє наближення до точного розв'язку задачі (1). За наближений розв'язок приймаємо півсуму двосторонніх наближень.

Модульний характер запропонованих методів дає можливість в кожній точці інтегрування отримати кілька наближень до точного розв'язку.

Висновки

Виведено двосторонні розрахункові формули другого порядку точності розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь, що базуються на неперервних дробах. У запропонованих обчислювальних формулах можна оцінити значення головного члена локальної похибки без додаткових звертань до правої частини диференціального рівняння.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Бейкер, Дж. Аппроксимации Паде. Обобщения и приложения [Текст] / Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис – М.: Мир, 1986. – 502 с.
2. Джоунс, У. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения [Текст] / У. Джоунс, В. Трон. – М.: Мир, 1985. – 416 с.
3. Скоробагатько, В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике [Текст] / В. Я. Скоробагатько. – М.: Наука, 1983. – 312 с.
4. Пелех, Р Я. Двосторонні алгоритми розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь з оцінкою головного члена похибки [Текст] / Р. Я. Пелех, Й. Й. Лучко // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій. – 2009. – Вип. 11. – С. 106-113.
5. Горбунов, А. Д. О приближенном решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с наперед заданным числом верных знаков. I. [Текст] / А. Д. Горбунов, Ю. А. Шахов // Журн. вычислит. математики и матем. физики – 1963. – Т. 3, № 2. – С. 239-253.
6. Ляшко, И. И., Методы вичислений [Текст] / И. И. Ляшко, В. Л. Макаров, А. А. Скоробагатько. – К.: Вища школа, 1977. – 408 с.
7. Шахов, Ю. А. Решение задачи Коши с наперед заданным числом верных знаков для обыкновенного дифференциального уравнения [Текст] / Ю. А. Шахов // Вопросы вычислительной математики: труды ВЦ АН ГрузССР. – Тбилиси. – 1973. – Т. 12, № 1. – С. 105-117.
8. Butcher, J. C. Numerical methods for ordinary differential equations [Текст] / J. C. Butcher. – London: Wiley & Sons, 2008. – 463 p.

Надійшла до редколегії 14.04.2011.
Прийнята до друку 15.05.2011.