УДК 517.95+519.62

Я. М. ПЕЛЕХ (НУ «Львівська політехніка)

МЕТОДИ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРА

Розглянуто нове застосування безперервних дробів до розвитку числових методів для вирішення інтегро-дифференціальних рівнянь. Запропоновані числові методи високої точності для вирішення початково-значущих проблем в інтегро-дифференціальних рівняннях Вольтера.

Ключові слова: нелінійні інтегро-диференціальні рівняння Вольтера, задача Коші, перетворення Фельберга, ряд Тейлора

Рассмотрены новые приложения непрерывной дроби к развитию числовых методов для решения интегро-дифференциальных уравнений. Предложены числовые методы высокой точности для решения начально-значимых проблем в интегро-дифференциальных уравнениях Вольтерра.

Ключевые слова: нелинейные интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра, задача Коши, преобразование Фельберга, ряд Тейлора.

The new applications of continued fraction to the development of numerical methods for the solution of integro-differential equations are considered. The numerical methods of high-order accuracy for the solution of initial-value problems in Volterra integro-differential equations are proposed.

Keywords: nonlinear integral-differential equations Volterra, Felberg transformation, Taylor series

Актуальність проблеми

Обчислювальний експеримент дозволяє в багатьох випадках замінити реальний процес і отримувати як якісну, так і кількісну характеристику процесу, що моделюється.

Задачі гідроакустики, кінетики, автоматичного управління, електроніки, багатовимірної оптимізації, теорії в'язко-пружності приводять до необхідності розв'язання нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь. Оскільки розв'язки таких задач в замкнутому вигляді можна отримати лише в окремих часткових випадках, виникає проблема побудови наближеного розв'язку таких рівнянь.

Одним з ефективних способів побудови таких наближень є неперервні (ланцюгові) дроби, які при відповідних умовах мають високу швидкість збіжності, володіють властивістю монотонності і двосторонності, а також малочутливі до похибок заокруглень. Процес їх обчислень є циклічним і легко програмується на ПК.

Постановка задачі

Розглянемо на відрізку $I_L : \left[x_0, x_0 + L\right]$ задачу Коші для нелінійного інтегро-диференціального рівняння

$$u'(x) = F\left[x, u(x), \int_{x_0}^{x} g\left(x, s, u(x), u'(s)\right) ds\right],$$

$$u(x_0) = u_0 . \quad (1)$$

Припустимо, що розв'язок задачі (1) існує і єдиний, а функції F і g володіють необхідною для дослідження гладкістю.

Використовуючи апарат неперервних дробів [1, 2] та ідею побудови методів типу Рунге-Кутта [3,4], пропонуються наближені методи високого порядку точності для розв'язування рівняння (1).

Побудова методів типу Рунге-Кутта-Фельберга

Введемо на відрізку I_L сітку $\sigma_h = \{a=x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b\}$ з кроком $h = x_{n+1} - x_n$.

Для побудови чисельного методу високого порядку точності ($(m+p)$-го порядку, $m = 1, 2, 3\ldots$) потрібно використовувати модифіковане перетворення Фельберга [5].

Перетворимо дане рівняння до еквівалентної системи

$$u'(x) = F\left[x, u(x), z(x)\right],$$

$$z(x) = \int_{x_0}^{x} f\left(x, s, u(s), z(s)\right) ds \quad (2)$$

де $f\left[x, s, u(s), z(s)\right] = g\left[x, s, u(s), F\left[s, u, z\right]\right]$.

Введемо нові функції $y(x)$ і $\varphi(x)$, що задовольняють умовам

$$y(x_0)=u(x_0)=u_0,\ y^{(k)}(x_0)=0,$$

$$\varphi(x_0)=z(x_0)=0,\ \varphi^{(k)}(x_0)=0,\ k=1,2,\dots,m+1 \quad (3)$$

за допомогою перетворення

$$u(x)=\chi(x,y)=y(x)+\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(x-x_0)^k}{k!}\times \times\left(\frac{d^k}{dx^k}F\left[x,u(x),z(x)\right]\right)_{|x=x_0} \quad (4)$$

$$z(x)=\theta(x,y)=\varphi(x)+\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(x-x_0)^k}{k!}\times \times\left(\frac{\partial^{k-1}}{\partial s^{k-1}}f\left[x,s,u(s),z(s)\right]\right)_{|s=x_0} \quad (5)$$

Підставляючи в (2) замість $u(x)$ і $z(x)$ їхні вирази із (4), (5), а замість $u'(x)$ – відповідний вираз, одержаний при диференціюванні співвідношення (4), отримаємо наступну задачу для визначення невідомих функцій $y(x)$ і $\varphi(x)$:

$$y'(x)=G\left[x,y(x),\varphi(x)\right] \quad (6)$$

$$\varphi(x)=\int_{x_0}^{x}q\left[x,s,y(s),\varphi(s)\right]ds \quad (7)$$

з початковою умовою

$$y|_{x=x_0}=y_0=u_0 \quad (8)$$

де

$$G\left[x,y(x),\varphi(x)\right]=F\left[x,\chi(x,y),\theta(x,\varphi)\right]- -\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(x-x_0)^{k-1}}{(k-1)!}\left(\frac{d^k}{dx^k}F\left[x,u,z\right]\right)_{|x=x_0}, \quad (9)$$

$$q\left[x,s,u(s),\varphi(s)\right]=f\left[x,s,\chi(s,y),\theta(s,\varphi)\right]- -\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(x-x_0)^{k-1}}{(k-1)!}\left(\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}f\left[x,s,u,z\right]\right)_{|s=x_0}, \quad (10)$$

які в силу умов (3) володіють властивостями

$$\left(G_{x^p}\right)_0=\left(\frac{\partial^p Y}{\partial k^p}\right)_{x=x_0}=0,\ \left(q_{x^p s^0}\right)_{s=x^p}=0,$$

$$\left(p=\overline{0,m};k=\overline{0,m+2}\right) \quad (11)$$

Представимо $\varphi(x)$ із (6) у вигляді

$$\varphi(x)=U_n(x)+v(x),\ n=0,1,2,\dots \quad (12)$$

де

$$U_n(x)=\int_{x_0}^{x_n}q\left[x,s,y(s),\varphi(s)\right]ds,$$

$$v(x)=\int_{x_0}^{x}q\left[x,s,y(s),\varphi(s)\right]ds.$$

Тоді отримаємо систему

$$y'(x)=G\left[x,y(x),U_n(x)+v(x)\right],$$

$$v(x)=\int_{x_0}^{x}q\left[x,s,y(s),U_n(s)+v(s)\right]ds \quad (13)$$

яка в сукупності з (12) еквівалентна (6), (7).

Допустимо, що у вузлах $x_1,\dots,x_n$ відомі наближення до точного розв'язку задачі (6), (7), а також наближення до функції $U_n(x)$ відповідної точності. Для наближеного розв'язку в точці x_{n+1} потрібно мати наближення для $y(x_{n+1})$ і $v(x_{n+1})$, які шукаємо у вигляді

$$y'(x)=G^n\left[x,y(x),v_n(x)\right],$$

$$v_n(x)=\int_{x_n}^{x}q^n\left[x,s,y(s),v_n(s)\right]ds,$$

де $G^n\left[x,y,v_n\right]=G\left[x,y,U_n+v_n\right]$,

$$q^n=q\left[x,s,y,U_n+v_n\right].$$

Наближення $y(x)$ і $v(x)$ в точці x_n+h порядку $O\left(h^{m+p}\right)$, $p=2,3$ знайдемо, використовуючи ланцюгові дроби.

Розвинення в ряд Тейлора по степеням h в околі точки x_n для $y(x_{n+1})$ і $v(x_{n+1})$ має вигляд

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+\sum_{i=m+2}^{m+4}\frac{h^i}{i!}y^{(i)}(x_n)+O\left(h^{m+5}\right),$$

$$v(x_{n+1})=\sum_{i=m+2}^{m+4}\frac{h^i}{i!}v^{(i)}(x_n)+O\left(h^{m+5}\right),$$

де

$$y^{(m+3)}(x_n)=\left(G_{x^{m+2}}\right)_n+\left(G_y\right)_n\left(G_{x^{m+1}}\right)_n+\left(G_v\right)_n\left(q_{s^{m+1}}\right)_n,$$

$$y^{(m+4)}(x_n) = \left(G_{x^{m+3}}\right)_n + (m+3)\times$$
$$\times\left[\left(G_{xy}\right)_n\left(G_{x^{m+1}}\right) + \left(G_{xv}\right)_n\left(q_{s^{m+1}}\right)_n\right] +$$
$$+\left(G_y\right)_n y^{(m+3)}(x_n) + \left(G_v\right)_n v^{(m+3)}(x_n)$$
$$v_n^{(m+2)}(x_n) = \left(q_{s^{m+1}}\right)_n,$$
$$v_n^{(m+3)}(x_n) = (m+3)\left(q_{xs^{m+1}}\right)_n + \left(q_{s^{m+2}}\right)_n +$$
$$+\left(q_y\right)_n\left(G_{x^{m+1}}\right)_n + \left(q_v\right)_n\left(q_{s^{m+1}}\right)_n$$
$$v_n^{(m+4)}(x_n) = (m+4)\left[\frac{m+3}{2}\left(q_{x^2 s^{m+1}}\right)_n + \left(q_{xs^{m+2}}\right)_n\right] +$$
$$+\left(q_{s^{m+3}}\right)_n + +\left[(m+4)\left(q_{xy}\right)_n + (m+3)\left(q_{sy}\right)_n\right]\times$$
$$\times\left(G_{x^{m+1}}\right)_n + +\left[(m+4)\left(q_{xv}\right)_n + (m+3)\left(q_{sv}\right)_n\right]\times$$
$$\times\left(q_{s^{m+1}}\right)_n + \left(q_y\right)_n y^{(m+3)}(x_n) + \left(q_v\right)_n v^{(m+3)}(x_n)$$

Для побудови наближень порядку $O\left(h^{m+3}\right)$, шукаємо їх в наступному вигляді:

$$y_{n+1} = \frac{y_n^2}{y_n - a_{11}k_1},\ v_{n,n+1} = b_{11}K_1,$$

$$y_n \cong y(x_n),\ k_1 = hG^n\left(x_n + \alpha_1 h, y_n, v_{n,n}\right),$$
$$K_1 = hq^n\left(x_n + h, x_n + \bar{\alpha}_1 h, y_n, v_{n,n}\right) \qquad (14)$$

Параметри a_{11}, b_{11}, α_1, $\bar{\alpha}_1$ визначимо з умови, щоб $\left|y(x_{n+1}) - y_{n+1}\right| = O\left(h^{m+3}\right)$, $\left|v_n(x_{n+1}) - v_{n,n+1}\right| = O\left(h^{m+3}\right)$, що у випадку якщо $y_n - a_{11}k_1 \neq 0$, $y_n \neq 0$, еквівалентно

$$\left|y(x_{n+1})Q_{m+2} - P_{m+2}\right| = O\left(h^{m+3}\right),$$

де $Q_{m+2} = y_n - a_{11}k_1$, $P_{m+2} = y_n^2$.

Розглянемо

$$y(x_{n+1})Q_{m+2} - P_{m+2} = \left\{y(x_n) + \frac{h^{m+2}}{(m+2)!}\left(G_{x^{m+1}}\right)_n + \frac{h^{m+3}}{(m+3)!}\left[\left(G_{x^{m+2}}\right)_n + \left(G_y\right)_n\left(G_{x^{m+1}}\right)_n + \left(G_v\right)_n\left(q_{s^{m+1}}\right)_n\right] +\right.$$
$$\left.O\left(h^{m+4}\right)\right\}\times\left\{y_n + \frac{h^{m+2}}{(m+2)!}a_{11}\alpha_1^{m+1}G_{x^{m+1}} - \frac{h^{m+3}}{(m+3)!}(m+3)a_{11}\alpha_1^{m+2}G_{x^{m+2}} + O\left(h^{m+4}\right)\right\} - \left(y_n\right)^2 =$$
$$= y_n\left(y(x_n) - y_n\right) + \frac{h^{m+2}}{(m+2)!}G_{x^{m+1}}\left[y_n - a_{11}\alpha_1^{m+1}(m+2)y(x_n)\right] +$$
$$+\frac{h^{m+3}}{(m+3)!}\left\{y^{(m+3)}(x_n)y_n - a_{11}\alpha_1^{m+2}(m+3)y(x_n)G_{x^{m+2}}\right\} + O\left(h^{m+4}\right)$$

і

$$v_n(x_{n+1}) - v_{n,n+1} = \frac{h^{m+2}}{(m+2)!}v_n^{(m+2)} + \frac{h^{m+3}}{(m+3)!}v_n^{(m+3)} + O\left(h^{m+4}\right) - b_{11}K_1 = \frac{h^{m+2}}{(m+2)!}\times\left\{1 - b_{11}(m+2)\bar{\alpha}_1^{m+1}\right\}\left(q_{s^{m+1}}\right)_n +$$
$$+\frac{h^{m+3}}{(m+3)!}\left\{\left[(m+3) - b_{11}(m+2)(m+3)\bar{\alpha}_1^{m+1}\right]\left(q_{xs^{m+1}}\right)_n + \left(1 + b_{11}(m+3)\bar{\alpha}_1^{m+2}\right)\left(q_{s^{m+2}}\right)_n +\right.$$
$$\left.+\left(q_y\right)_n\left(G_{x^{m+1}}\right)_n + \left(q_v\right)_n\left(q_{s^{m+1}}\right)_n\right\} + O\left(h^{m+4}\right)$$

Прирівнявши до нуля вирази при h^{m+2}, враховуючи при цьому, що $y_n = y(x_n) + O\left(h^{m+3}\right)$, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1^{m+1} = \dfrac{1}{(m+2)}, \\ b_{11}\bar{\alpha}_1^{m+1} = \dfrac{1}{(m+2)}, \end{cases}$$

з якої слідує

$$a_{11} = \frac{1}{(m+2)\alpha_1^{m+1}},\ b_{11} = \frac{1}{(m+2)\bar{\alpha}_1^{m+1}},$$

де α_1, $\bar{\alpha}_1$ – довільні відмінні від нуля числа.

Поклавши, наприклад, $\bar{\alpha}_1 = \alpha_1$, отримаємо

$$a_{11} = b_{11} = \frac{1}{(m+2)\alpha_1^{m+1}}.$$

Знайдемо наближення до $y(x_{n+1})$ і $v_n(x_{n+1})$ порядку $O(h^{m+4})$, представивши їх наступним чином:

$$y_{n+1} = \cfrac{y_n}{1-\cfrac{(a_{11}k_1+a_{12}k_2)/y_n}{1-\cfrac{(a_{21}k_1+a_{22}k_2)y_n-(a_{11}k_1+a_{12}k_2)^2}{y_n(a_{11}k_1+a_{12}k_2)}}} = \qquad (15)$$

$$= y_n + \frac{P_{m+3}}{Q_{m+3}}$$

$$v_{n+1} = \frac{h(b_{11}K_1+b_{12}K_2)^2}{(b_{11}-b_{21})K_1-(b_{12}+b_{22})K_2}, \qquad (16)$$

де

$$P_{m+3} = (a_{11}k_1+a_{12}k_2)^2,$$
$$Q_{m+3} = (a_{11}-a_{21})k_1-(a_{12}+a_{22})k_2,$$
$$k_1 = hG(x_n+\alpha_1 h, y_n, \bar{U}_n+v_n),$$
$$K_1 = hq\left[x_n+h, x_n+\bar{\alpha}_1 h, y_n, \bar{U}_n+v_n\right],$$
$$\bar{U}_n = U_n(x_n),$$
$$k_2 = hG(x_n+\alpha_2 h, y_n+\bar{\gamma}_{21}k_1, \bar{U}_n+\bar{\gamma}_{21}K_1),$$
$$K_2 = nq\left[x_n+h, x_n+\bar{\alpha}_2 h, y_n+\bar{\gamma}_{21}k_1, \bar{U}_n+\bar{\gamma}_{21}K_1\right].$$

Розвинувши $y(x_{n+1})$, $v(x_{n+1})$, k_i, K_i $(i=1,2)$ в ряди Тейлора в околі точки $x=x_n$ і прирівнявши в різницях $y(x_{n+1})-y_{n+1}$ і $v(x_{n+1})-v_{n+1}$ до нуля коефіцієнти при степенях h^{m+2}, h^{m+3} отримаємо наступні системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1^{m+1}+a_{12}\alpha_2^{m+1}=\dfrac{1}{m+2} \\ a_{21}\alpha_1^{m+1}+a_{22}\alpha_2^{m+1}=0 \\ (a_{11}+a_{21})\alpha_1^{m+2}+(a_{12}+a_{22})\alpha_2^{m+2}=\dfrac{1}{m+3} \\ (a_{12}+a_{22})\gamma_{21}\alpha_1^{m+1}=\dfrac{1}{(m+2)(m+3)}; \end{cases} \qquad (17а)$$

$$\begin{cases} b_{11}\bar{\alpha}_1^{m+1}+b_{12}\bar{\alpha}_2^{m+1}=\dfrac{1}{m+2} \\ b_{21}\bar{\alpha}_1^{m+1}+b_{22}\bar{\alpha}_2^{m+1}=0 \\ (b_{11}+b_{21})\bar{\alpha}_1^{m+2}+(b_{12}+b_{22})\bar{\alpha}_2^{m+2}=\dfrac{1}{m+3} \\ (b_{12}+b_{22})\bar{\gamma}_{21}\bar{\alpha}_1^{m+1}=\dfrac{1}{(m+2)(m+3)}; \end{cases} \qquad (17б)$$

Покладемо $\bar{\alpha}_i=\alpha_i$, $b_{ij}=a_{ij}, (i,j=1,2)$ $\bar{\gamma}_{21}=\gamma_{21}$. Тоді маємо дві множини розв'язків:

I) $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то

$$a_{11} = \frac{1-(m+2)a_{12}\alpha_2^{m+1}}{(m+2)\alpha_1^{m+1}},$$

$$a_{21} = \left(a_{12}+\frac{(m+3)\alpha_1-(m+2)}{(m+2)(m+3)(\alpha_2-\alpha_1)\alpha_2^{m+1}}\right)\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{m+1},$$

$$a_{22} = \frac{(m+2)-\alpha_1(m+3)}{(m+2)(m+3)(\alpha_2-\alpha_1)\alpha_2^{m+1}}-a_{12},$$

$$\gamma_{21} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{m+1}\frac{\alpha_2-\alpha_1}{(m+2)-\alpha_1(m+3)}, \qquad (18)$$

де a_{12}, α_1, α_2 – параметри $\left(\alpha_1 \neq \dfrac{m+2}{m+3}, \alpha_1, \alpha_2 \neq 0\right)$.

II) $\alpha_1=\alpha_2$, то

$$a_{11} = \frac{1}{(m+2)}\left(\frac{m+3}{m+2}\right)^{m+1}-a_{12},$$

$$a_{21} = a_{12}-\frac{1}{\gamma_{21}(m+2)(m+3)}\left(\frac{m+3}{m+2}\right)^{m+1},$$

$$a_{22} = \frac{1}{\gamma_{21}(m+2)(m+3)}\left(\frac{m+3}{m+2}\right)^{m+1}-a_{12},$$

$$\alpha_1=\alpha_2=\frac{m+2}{m+3}, \qquad (19)$$

де a_{12} – параметр, γ_{21} – довільне відмінне від нуля число.

При такому виборі параметрів, взявши два і три поверхи дробу (15) і відповідно один і два поверхи дробу (16) отримаємо наближення до $y(x_{n+1})$ і $v(x_{n+1})$ $(m+2)$-го порядку точності у першому випадку і $(m+3)$-го порядку точності у другому випадку.

Зауваження. Якщо у формулах (18), (19) покласти $a_{21}=a_{22}=0$, то отримаємо традиційні формули Рунге-Кутта-Фельберга.

Знаючи y_{n+1} і v_{n+1} обчислюємо $\varphi_{n+1} \approx \varphi(x_{n+1})$ із (12), а тоді з (4), (5) знаходимо наближення до $u(x_{n+1})$ і $z(x_{n+1})$.

Висновки

Для знаходження наближеного розв'язку задачі Коші для інтегро-диференціальних рівнянь Вольтерра побудовано методи Рунге-Кутта-

Фельберга порядку точності $O\left(h^{m+2}\right)$ і $O\left(h^{m+3}\right)$, (m=1,2,3,...), що базують на ланцюгових (неперервних) дробах. При відповідних значеннях параметрів, що входять в запропоновані обчислювальні схеми, отримуємо класичні методи високого порядку точності.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Джоунс, У. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения [Текст] / У. Джоунс, В. Трон. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
2. Скоробагатько, В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике [Текст] / В. Я. Скоробагатько. – М. : Наука, 1983. – 312 с.
3. Fehlberg, E. New high-order Runge-Kutta formulas with step-size control for systems of first and second order differential equations [Текст] / E. Fehlberg, // Z. Angew. Math. Mech. – 1964. – 44, – S. 17-29.
4. Холл, Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] / Дж. Холл, Дж. Ватт. М.: Мир, 1979. – 312 с.
5. Ломакович, А. Н. О приближенном решении одного нелинейного интегрального уравнения типа Вольтерра двусторонним методом вида Рунге-Кутта-Фельберга [Текст] / А. Н. Ломакович, В. А. Ищук // Вычислительная и прикладная математика. – К.: Наук. думка. – 1974. – Вып. 23. – С. 29-40.

Надійшла до редколегії 14.06.2011.
Прийнята до друку 20.06.2011.