**УДК 539.3**

Б. С. ОКРЕПКИЙ, М. Я. ШЕЛЕСТОВСЬКА (Тернопільський національний економічний університет)

# КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ КРУГОВОГО ШТАМПА З ШАРОМ ПРИ НЕІДЕАЛЬНОМУ ТЕПЛОВОМУ КОНТАКТІ

Побудовано розв'язок осесиметричної контактної задачі термопружності про тиск гарячого циліндричного кругового ізотропного штампа на пружний ізотропний шар з урахуванням неідеального теплового контакту між штампом і шаром. Одержано формули для визначення температурного поля і нормального напруження. Досліджено вплив контактної провідності на розподіл температурних полів і нормального напруження у зоні контакту.

*Ключові слова*: нормальне напруження, деформація, граничні умови, контактна задача

Построено решение осесимметрической контактной задачи термоупругости о давлении горячего цилиндрического кругового изотропного штампа на упругий изотропный слой с учетом неидеального теплового контакта между штампом и слоем. Получены формулы для определения температурного поля и нормального напряжения. Исследовано влияние контактной проводимости на распределение температурных полей и нормального напряжения в зоне контакта.

*Ключевые слова*: нормальное напряжение, деформация, граничные условия, контактная задача

Solution of the axis-symmetric contact task of thermo-elasticity of the hot cylinder circular punch stress on the elastic isotropic layer taking into account a non-ideal heat contact between punch and layer is built. Formulas for determination of the temperature field and normal stress in the contact area are obtained. The effect of the contact elasticity on the temperature and normal stress distribution is investigated. Investigation was made on the influence of the contact conductivity on distributing of the temperature fields and normal stress in the area of contact of two bodies.

*Keywords*: normal stress, deformation, scope terms, contact task

## Постановка проблеми

Визначення контактних деформацій і напружень з врахуванням температурних полів є необхідним для дослідження міцності деталей машин і елементів конструкцій у місцях їхньої взаємодії, при розрахунку конструкцій на пружній основі з метою раціонального використання матеріалу конструкції і несучої здатності основи.

## Аналіз останніх досліджень і публікацій

В працях [1-5] досліджується вплив температурних факторів на характер контактної взаємодії тіл. Зокрема, в роботах [4, 6] розв'язані осесиметричні контактні задачі термопружності про тиск циліндричного кругового штампа з плоскою основою на пружний півпростір при неідеальному тепловому контакті для ізотропних і трансверсально-ізотропних матеріалів. Проте, недостатньо вивченим є вплив умов неідеального теплового контакту на величину і характер температурних полів, а також контактного нормального напруження в системі тіл циліндр-шар.

***Мета роботи.*** Побудувати розв'язок осесиметричної контактної задачі термопружності про тиск циліндричного кругового штампа з плоскою основою на пружний шар з врахуванням неідеального теплового контакту. Необхідно знайти формули для визначення температури в циліндрі і шарі, а також нормальних напружень в зоні контакту та дослідити вплив контактної провідності на розподіл температури і нормальних напружень.

***Постановка задачі.*** Нехай циліндричний круговий штамп радіусом $R$ і довжиною $L$, з плоскою основою, втискується силою $P$ в ізотропний пружний шар скінченої товщини $H$. Поверхня шару зовні площадки контакту вільна від зовнішніх зусиль. На площадці контакту дотичні напруження $\tau_{rz} = 0$. На вільному торці циліндра задана постійна температура $T_0$. Бічна поверхня циліндра теплоізольована. Тепловий контакт між тілами припускається неідеальним. На вільних поверхнях шару відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем за законом Ньютона. При зроблених припущеннях необхідно визначити температурні поля і контактні нормальні напруження.

Введемо циліндричну систему координат $r,\ \theta,\ z$, центр якої лежить на поверхні шару, а вісь $Oz$ спрямована вздовж циліндра. Всі величини, які позначені індексом «1», відносяться до шару, без індексів – до циліндра.

Граничні умови для температури, напружень і переміщень матимуть вигляд:

$$T = T_0, \quad (0 \le r \le R,\ z = L). \tag{1}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad (r = R,\ 0 \le z \le L). \tag{2}$$

$$\lambda_z^1 \frac{\partial T^1}{\partial z} = \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z},$$

$$\lambda_z^1 \frac{\partial T^1}{\partial z} = h_0\left(T - T^1\right),\ (0 \le r \le R,\ z = 0). \tag{3}$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial z} + H_2^1 T^1 = 0, \quad (R \le r < \infty,\ z = 0). \tag{4}$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial z} - H_1^1 T^1 = 0, \quad (0 \le r < \infty,\ z = -H). \tag{5}$$

$$u_z^1 = -\varepsilon,\ (0 \le r \le R,\ z = 0);$$
$$\sigma_z^1 = 0,\ (R < r < \infty,\ z = 0) \tag{6}$$
$$\tau_{rz}^1 = 0,\ (0 \le r < \infty,\ z = 0);$$

$$u_z^1 = 0;\ \tau_{rz}^1 = 0,\ (0 \le r < \infty,\ z = -H) \tag{7}$$

де $H_i^1 (i = 1,2)$, $\lambda_z$, $\lambda_z^1$ – коефіцієнти теплообміну і теплопровідності, $h_0$ – контактна провідність, $\varepsilon$ – величина вертикального переміщення штампа.

**Розв'язування крайових задач для рівнянь теплопровідності і термопружності**

Відомо [3], що в осесиметричному випадку термопружний потенціал і температурне поле для ізотропного тіла знаходяться із рівнянь:

$$\nabla^2 \varphi = \alpha_T \frac{1+\sigma}{1-\sigma} T, \quad \nabla^2 T = 0, \tag{8}$$

а температурні напруження і переміщення визначаються за формулами:

$$u_z^{(T)} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \sigma_z^{(T)} = -2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}\right),$$
$$\tau_{rz}^{(T)} = 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}, \tag{9}$$

де – коефіцієнт лінійного температурного розширення; $\mu$, $\sigma$ – модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона.

Для визначення температурного поля в шарі введемо трансформанту Ганкеля функції $T^1(\xi, z)$ нульового порядку

$$\overline{T^1}(\xi, z) = \int_0^\infty r T^1(r,z) J_0(\xi r)\, dr \tag{10}$$

за допомогою якої, із другого рівняння (8), знаходимо вираз для $T^1(\rho,\zeta)$ через дві довільні функції $\varphi_1(\eta)$ і $\varphi_2(\eta)$:

$$T^1(\rho,\zeta) = \int_0^\infty \left[\varphi_1(\eta) e^{\eta\zeta} + \varphi_2(\eta) e^{-\eta\zeta}\right] \cdot J_0(\eta\rho)\, d\eta \tag{11}$$

де $J_0(\eta\rho)$ – функція Бесселя першого роду дійсного аргументу, $\rho = r/R$; $\zeta = z/R$; $\eta = \xi R$.

Температурне поле в циліндрі знаходимо методом Фур'є. Загальний розв'язок має вигляд:

$$T(r,z) = A_0 z + B_0 + D_0\left(r^2 - 2z^2\right) +$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty} J_0(\beta_k r)\left(A_k sh\beta_k z + B_k ch\beta_k z\right) +$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty} I_0(\gamma_k r)\left(C_k \sin\gamma_k z + D_k \cos\gamma_k z\right), \tag{12}$$

де $A_k$, $B_k$, $C_k$, $D_k$ – довільні постійні; $I_0(\gamma_k r)$ – функція Бесселя першого роду уявного аргументу; $\beta_k$, $\gamma_k$ – власні значення, які знаходяться із граничних умов.

Термопружний потенціал $\varphi$ визначається з першого рівняння (8) у вигляді

$$\varphi(\rho, \zeta) = \frac{1}{2}\frac{1+\sigma^1}{1-\sigma^1}\alpha_{T^1}\zeta \times$$
$$\times \int_0^\infty \frac{1}{\eta}\left[\varphi_1(\eta) e^{\eta\zeta} + \varphi_2(\eta) e^{-\eta\zeta}\right] J_0(\eta\rho)\, d\eta \tag{13}$$

Компоненти температурних напружень і переміщень обчислюються за формулами (9). Маючи формули для температурних напружень і переміщень, можна знайти компоненти напружень та переміщень при контактній взаємодії циліндра і шара. Для цього необхідно до величин, обчислених за формулами (9), додати компоненти напружень і переміщень від бігармонічного потенціалу [1].

Таким чином, для визначення переміщень і напружень в ізотропному шарі маємо наступні співвідношення:

$$u_z^1 = -\int_0^\infty \frac{1}{\eta}\left\{\left[\frac{1}{b_1^1 R}\eta F_1(\eta) + \left(2 + \frac{1}{b_1^1 R}\eta\zeta\right) F_2(\eta)\right] \times\right.$$

$$\times e^{-\eta\zeta}+\left[\frac{1}{b_1^1 R}\eta F_3(\eta)+\left(-2+\frac{1}{b_1^1 R}\eta\zeta\right)F_4(\eta)\right]\times$$

$$\times e^{\eta\zeta}\Big\}J_0(\eta\rho)d\eta+\frac{1}{2}\frac{1+\sigma^1}{1-\sigma^1}\alpha_{T^1}R\times$$

$$\times\int_0^\infty\frac{1}{\eta}\left[\varphi_1(\eta)(1+\eta\zeta)e^{\eta\zeta}-\varphi_2(\eta)(1-\eta\zeta)e^{-\eta\zeta}\right]\times$$

$$\times J_0(\eta\rho)d\eta;$$

$$\sigma_z^1=\frac{2b_3^1}{R}\int_0^\infty\left\{\left[\frac{\eta}{R}F_1(\eta)+\left(b_1^1+\eta\zeta\right)F_2(\eta)\right]e^{-\eta\zeta}+\right.$$

$$\left.+\left[-\frac{\eta}{R}F_3(\eta)+\left(b_1^1-\eta\zeta\right)F_4(\eta)\right]e^{\eta\zeta}\right\}\times$$

$$\times\int_0^\infty\eta\left[\varphi_1(\eta)e^{\eta\zeta}-\varphi_2(\eta)e^{-\eta\zeta}\right]J_0(\eta\rho)d\eta\times$$

$$\times J_0(\eta\rho)\cdot d\eta+\mu^1\frac{1+\sigma^1}{1-\sigma^1}\alpha_{T^1}\zeta \qquad (14)$$

$$\tau_{rz}^1=2b_3^1\int_0^\infty\left\{\left[\frac{\eta}{R}F_1(\eta)+\left(-b_1^1+\eta\zeta\right)F_2(\eta)\right]e^{-\eta\zeta}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\eta}{R}F_3(\eta)+\left(b_2^1+\eta\zeta\right)F_4(\eta)\right]e^{\eta\zeta}\right\}J_1(\eta\rho)d\eta-$$

$$-\mu^1\frac{1+\sigma^1}{1-\sigma^1}\alpha_{T^1}\int_0^\infty\left[\varphi_1(\eta)(1+\eta\zeta)e^{\eta\zeta}-\right.$$

$$\left.-\varphi_2(\eta)(1-\eta\zeta)e^{-\eta\zeta}\right]J_1(\eta\rho)d\eta,$$

$$b_1^1=\frac{\mu^1}{\lambda^1+\mu^1},\quad b_2^1=\frac{\lambda^1}{\lambda^1+\mu^1},\quad b_3^1=\lambda^1+\mu^1.$$

де $u_z^1$, $\sigma_z^1$, $\tau_{rz}^1$ – компоненти переміщення і напружень в пружному шарі; $F_i(\eta)\left(i=\overline{1,4}\right)$ – довільні функції; $\lambda^1$, $\mu^1$ – коефіцієнти Ламе.

Для задоволення граничної умови (2) у формулі (12) необхідно покласти $D_0=0$, $C_k=0$, $D_k=0$ $\left(k=\overline{1,\infty}\right)$; $\beta_k=\mu_k/R$, де $\mu_k$ – корені рівняння $J_1(\mu_k)=0$.

Гранична умова (1), з урахуванням ортогональності функцій Бесселя, приводить до наступних співвідношень між постійними $A_n$ і $B_n\left(n=\overline{0,\infty}\right)$:

$$B_0=T_0-A_0 lR,\ B_n=-th\mu_n lA_n,\ l=\frac{L}{R}. \quad (15)$$

Задовольнивши граничні умови (3, 4, 5), з урахуванням (15), одержимо систему інтегральних рівнянь, які зв'язують функції $\varphi_1(\eta)$ і $\varphi_2(\eta)$ з коефіцієнтами $A_k$ $\left(k=\overline{0,\infty}\right)$:

$$\int_0^\infty\left[\left(h_0^1+\eta\right)\varphi_1(\eta)+\left(h_0^1-\eta\right)\varphi_2(\eta)\right]J_0(\eta\rho)d\eta=h_0^1\times$$

$$\times\left[T_0-A_0 lR-\sum_{k=1}^\infty th\mu_{kl}J_0(\mu_k\rho)A_k\right],\ (\rho<1); \qquad (16)$$

$$\frac{\lambda_{z^1}}{R}\int_0^\infty\eta\left[\varphi_1(\eta)-\varphi_2(\eta)\right]J_0(\eta\rho)d\eta=$$

$$=\frac{\lambda_z}{R}\left(A_0R+\sum_{k=1}^\infty\mu_k J_0(\mu_k\rho)A_k\right),\ \ (\rho<1); \quad (17)$$

$$\int_0^\infty\left[\left(K_2^1+\eta\right)\varphi_1(\eta)+\left(K_2^1-\eta\right)\varphi_2(\eta)\right]\times$$

$$J_0(\eta\rho)d\eta=0,\ \ (\rho>1); \qquad (18)$$

$$\int_0^\infty\left[\left(\eta-K_1^1\right)e^{-\eta h}\varphi_1(\eta)-\left(\eta+K_1^1\right)e^{\eta h}\varphi_2(\eta)\right]\times$$

$$J_0(\eta\rho)d\eta=0,\ \ (0\le\rho<\infty); \qquad (19)$$

$$h=H/R;\ \ K_1^1=H_1^1R;\ \ K_2^1=H_2^1R,\ \ h_0^1=h_0R/\lambda_z^1.$$

Застосувавши формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля [7] до рівняння (19) і ввівши позначення $\varphi(\eta)=\left(K_2^1+\eta\right)\varphi_1(\eta)+\left(K_2^1-\eta\right)\varphi_2(\eta)$, одержимо систему рівнянь відносно $\varphi_1(\eta)$ і $\varphi_2(\eta)$, розв'язок якої має вигляд:

$$\varphi_1(\eta)=\frac{1}{2}\left(\eta+K_1^1\right)e^{\eta h}\varphi(\eta)/Q(\eta);$$

$$\varphi_2(\eta)=\frac{1}{2}\left(\eta-K_1^1\right)e^{-\eta h}\varphi(\eta)/Q(\eta), \quad (20)$$

$$Q(\eta)=\left(\eta^2+K_1^1K_2^1\right)sh\eta h+\eta\left(K_1^1+K_2^1\right)ch\eta h.$$

Підставивши функції $\varphi_1(\eta)$ і $\varphi_2(\eta)$ із (20) у рівняння (18), одержимо:

$$\int_0^\infty\varphi(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta=0,\ \ (\rho>1). \qquad (21)$$

Задовольнивши граничним умовам (7), з урахуванням (20), для напруження $\sigma_z^1(\rho,0)$ і переміщення $u_z^1(\rho,0)$ на поверхні шару знайдемо формули:

$$u_z^1(\rho,0)=\frac{1+b_1^1}{b_1^1}R\int_0^\infty\left[1-G(2\eta h)\right]\Phi(\eta)J_0(\eta\rho)\times$$

$$\times d\eta+\alpha_{T^1}R\delta\int_0^\infty\frac{1}{\eta}\frac{Q_2(\eta)\varphi(\eta)}{Q(\eta)Q_1(\eta)}J_0(\eta\rho)d\eta, \quad (22)$$

$$\sigma_z^1(\rho,0)=\frac{2b_3^1}{R}\int_0^\infty\eta\Phi(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta,$$

$$R\eta\Phi(\eta)=\eta R^{-1}F_1(\eta)+b_1^1F_2(\eta)-$$

$$-\eta R^{-1}F_3(\eta)+b_1^1F_4(\eta),$$

$$Q_1(\eta)=sh^2\eta h+2\eta h,\ \ Q_2(\eta)=$$

$$=\left(\eta sh\eta h\,ch\eta h+K_1^1sh^2\eta h+\eta^2h\right)sh\eta h,$$

$$G(2\eta h)=\frac{1+2\eta h-e^{-2\eta h}}{Q_1(\eta)},\ \ \delta=\frac{1+\sigma^1}{1-\sigma^1}\left(1+b_1^1\right)$$

Задовольнивши граничним умовам (6), приходимо до системи інтегральних рівнянь відносно функцій $\Phi(\eta)$ і $\varphi(\eta)$:

$$\int_0^\infty\Phi(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta=-\frac{\varepsilon}{R}+\int_0^\infty G(2\eta h)\Phi(\eta)J_0(\eta\rho)\times$$

$$\times d\eta+\alpha_{T^1}\delta\int_0^\infty\frac{1}{\eta}\frac{Q_2(\eta)\varphi(\eta)}{Q(\eta)Q_1(\eta)}J_0(\eta\rho)d\eta,$$

$$(0\le\rho\le1). \quad (23)$$

$$\int_0^\infty\eta\Phi(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta=0,\ \ (\rho>1) \quad (24)$$

Якщо ввести функцію $f(t)$ співвідношенням

$$\Phi(\eta)=\frac{b_1^1}{1+b_1^1}\int_0^1f(t)\cos\eta t\,dt, \quad (25)$$

то рівняння (24) задовольняється тотожньо, а рівняння (23) зводиться до інтегрального рівняння Абеля

$$\int_0^\rho\frac{f(t)dt}{\sqrt{\rho^2-t^2}}=g(\rho), \quad (26)$$

розв'язок якого згідно [8] визначається формулою

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{\rho g(\rho)d\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}}, \quad (27)$$

де $g(\rho)=-\dfrac{\varepsilon}{R}+\displaystyle\int_0^\infty G(2\eta h)\Phi(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta+$

$$+\alpha_{T^1}\delta\int_0^\infty\frac{1}{\eta}\frac{Q_2(\eta)\varphi(\eta)}{Q(\eta)Q_1(\eta)}J_0(\eta\rho)d\eta. \quad (28)$$

Підставивши вираз (28) у формулу (27), з врахуванням при цьому (25), одержимо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду відносно функції $f(t)$:

$$f(t)=-\frac{2}{\pi}\frac{\varepsilon}{R}+\frac{2}{\pi}\int_0^1f(x)dx\int_0^\infty G(2\eta h)\cos\eta x\times$$

$$\times\cos\eta t\,d\eta+\frac{2\delta}{\pi}\alpha_{T^1}\int_0^\infty\frac{1}{\eta}\frac{Q_2(\eta)\varphi(\eta)}{Q(\eta)Q_1(\eta)}\cos\eta t\,d\eta,$$

$$(0\le t\le1). \quad (29)$$

Контактні напруження під штампом $\sigma_z^1(\rho,0)$, з використанням (25), визначаються формулою

$$\sigma_z^1(\rho,0)=æ_0\left[\frac{f(1)}{\sqrt{1-\rho^2}}-\int_\rho^1\frac{f'(t)dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\right],$$

$$æ_0=\frac{2b_1^1b_3^1}{1+b_1^1}. \quad (30)$$

Використовуючи умову рівноваги штампа $p=-2\pi R^2\int_0^1\rho\sigma_z^1(\rho)d\rho$ і формулу (30), інтегральне рівняння (29) зводиться до вигляду:

$$f(t)-\frac{2}{\pi}\int_0^1f(x)dx\int_0^\infty G(2\eta h)\cos\eta x\left(\cos\eta t-\frac{\sin\eta}{\eta}\right)\times$$

$$\times d\eta-\frac{2\delta}{\pi}\alpha_{T^1}\int_0^\infty\frac{1}{\eta}\frac{Q_2(\eta)\varphi(\eta)}{Q(\eta)Q_1(\eta)}\left(\cos\eta t-\frac{\sin\eta}{\eta}\right)d\eta=$$

$$=-\frac{p}{2\pi R^2æ_0},\ \ (0\le t\le1). \quad (31)$$

Для визначення функції $\varphi(\eta)$ продовжимо рівняння (21) на весь інтервал $(0\le\rho<\infty)$:

$$\int_0^\infty\varphi(\eta)J_0(\eta\rho)d\eta=U(1-\rho)X(\rho)$$

$$(0\le\rho<\infty) \quad (32)$$

де $U(x)$ – функція Гевісайда, $X(\rho)$ – невідома функція, яку подамо співвідношенням

$$X(\rho)=T_0\left\{a_0+\sum_{k=1}^{N_1}a_kJ_0(\mu_{k\rho})\right\},\ (0<\rho<1), \quad (33)$$

де $a_k\ (k=0,N_1)$ – невідомі коефіцієнти, які необхідно визначити; значення $N_1$ вибирається із умови забезпечення необхідної точності розв'язку.

Застосувавши до обох частин рівняння (32) формулу обертання інтегрального перетворення Ганкеля, знайдемо функцію $\varphi(\eta)$ через невідомі коефіцієнти $a_k$:

$$\varphi(\eta)=T_0\left\{a_0J_1(\eta)+\eta^2J_1(\eta)\sum_{k=1}^{N}\frac{a_kJ_0(\mu_k)}{\eta^2-\mu_k^2}\right\} \qquad (34)$$

Підставивши функцію $\varphi(\eta)$ (34) в інтегральні рівняння (16), (17), (31) з врахуванням (20), прийдемо до співвідношень, які зв'язують між собою функцію $f(t)$ і коефіцієнти

$$A_k\left(k=\overline{0,\infty}\right),\ a_k\left(k=\overline{0,N}\right):$$

$$T_0\sum_{k=0}^{N}a_k\alpha_k^{(1)}(\rho)+\frac{A_0R}{\varepsilon_0}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_k\rho)}{\varepsilon_k}A_k=h_0^1T_0,$$

$$(\rho<1). \qquad (35)$$

$$\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z}T_0\sum_{k=0}^{N}a_k\alpha_k^{(2)}(\rho)-A_0R-\sum_{k=1}^{\infty}\mu_kJ_0(\mu_k\rho)A_k=0,$$

$$(\rho<1). \qquad (36)$$

$$f(t)-\frac{2}{\pi}\int_0^1 f(x)dx\int_0^\infty G(2\eta h)\cos\eta x\left(\cos\eta t-\frac{\sin\eta}{\eta}\right)\cdot$$

$$\cdot d\eta-\frac{2\delta}{\pi}\alpha_{T^1}T_0\sum_{k=0}^{N_1}\delta_k(t)a_k=-\frac{P}{2\pi R^2æ_0},$$

$$(0\le t\le 1), \qquad (37)$$

де $\varepsilon_0=\dfrac{1}{lh_0^1}$, $\varepsilon_k=\dfrac{1}{h_0^1th\mu_kl}$,

$$\alpha_0^{(j)}(\rho)=\int_0^\infty\frac{P_j(\eta)J_1(\eta)J_0(\eta\rho)}{Q(\eta)}d\eta,$$

$$\alpha_k^{(j)}(\rho)=J_0(\mu_k)\int_0^\infty\frac{\eta^2P_j(\eta)J_1(\eta)J_0(\eta\rho)}{Q(\eta)\left(\eta^2-\mu_k^2\right)}d\eta, \qquad (38)$$

$$P_1(\eta)=\left(\eta^2+k_1^1h_0^1\right)sh\eta h+\left(k_1^1+h_0^1\right)\eta ch\eta h;$$

$$P_2(\eta)=\eta\left(\eta sh\eta h+k_1^1ch\eta h\right);$$

$$\delta_0(t)=\int_0^\infty\frac{J_1(\eta)Q_2(\eta)}{\eta Q(\eta)Q_1(\eta)}\left(\cos\eta t-\frac{\sin\eta}{\eta}\right)d\eta,$$

$$\delta_k(t)=J_0(\mu_k)\int_0^\infty\frac{\eta J_1(\eta)Q_2(\eta)}{\left(\eta^2-\mu_{k^2}\right)Q(\eta)Q_1(\eta)}\times$$

$$\times\left(\cos\eta t-\frac{\sin\eta}{\eta}\right)d\eta.$$

Помноживши обидві частини рівностей (35), (36) на $\rho$, $\rho J_0(\mu_{n\rho})$ і проінтегрувавши їх по $\rho$ в межах від 0 до 1, з врахуванням умов ортогональності функцій Бесселя, прийдемо до співвідношень:

$$A_0R=2\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1}T_0\sum_{k=0}^{N}\alpha_{0,k}^{(2)}a_k,$$

$$A_n=2\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1}\frac{T}{\mu_nJ_0^2(\mu_n)_0}\sum_{k=0}^{N}\alpha_{n,k}^{(2)}a_k. \qquad (39)$$

і системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $a_k\left(k=\overline{0,N}\right)$:

$$\sum_{k=0}^{N}\alpha_{n,k}a_k=\gamma_n \qquad \left(n=\overline{0,N}\right), \qquad (40)$$

де $\alpha_{n,k}=\dfrac{\alpha_{n,k}^{(1)}}{h_0^1}+\dfrac{\lambda_z}{\lambda_z^1}\dfrac{th\mu_nl}{\mu_n}\alpha_{n,k}^{(2)}$,

$$\alpha_{0,k}=\frac{\alpha_{0,k}^{(1)}}{h_0^1}+\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1}l\alpha_{0,k}^{(2)},\ \gamma_0=1;\ \ \gamma_n=0\ \left(n=\overline{1,N}\right).$$

Обчисливши невласні інтеграли (38), згідно [9], одержимо:

$$\alpha_{0,0}^{(j)}=\int_0^1\rho\alpha_0^{(j)}(\rho)d\rho=\varepsilon_{0,0}^{(j)}+$$

$$+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{P_j^*(y_m)K_1(y_m)I_1(y_m)}{y_mQ'(iy_m)},\quad (j=1,2);$$

$$\alpha_{0,k}^{(j)}=\int_0^1\rho\alpha_k^{(j)}(\rho)d\rho=2J_0(\mu_k)\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_mP_j^*(y_m)I_1(y_m)K_1(y_m)}{\left(y_m^2+\mu_k^2\right)Q'(iy_m)},\alpha_{n,0}^{(j)}=\alpha_{0,n}^{(j)},(j=1,2)$$

$$\alpha_{n,k}^{(j)}=\begin{cases}\beta_{n,k}^{(j)}, & k\ne n\\ \beta_{n,k}^{(j)}+\dfrac{1}{2}\dfrac{P_j(\mu_n)}{Q(\mu_n)}J_0^2(\mu_n), & k=n;\end{cases}$$

$$\beta_{n,k}^{(j)}=\int_0^1\rho J_0(\mu_n\rho)\alpha_k^{(j)}(\rho)d\rho=2J_0(\mu_k)J_0(\mu_n)\times$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{y_m^3P_j^*(y_m)I_1(y_m)K_1(y_m)}{\left(y_m^2+\mu_k^2\right)\left(y_m^2+\mu_n^2\right)Q'(iy_m)};$$

$$\varepsilon_{0,0}^{(1)}=\frac{1}{2}r_1,\qquad \varepsilon_{0,0}^{(2)}=\frac{1}{2}K_1^1r_2, \qquad (41)$$

$$r_1=\left(K_1^1h+1\right)r_2,\quad r_2=\left(K_1^1K_2^1h+K_1^1+K_2^1\right)^{-1};$$

де $y_m\left(m=\overline{1,\infty}\right)$ – корені рівняння $Q\left(iy_m\right)=0$;

$$P_1^*\left(y_m\right)=\left(h_0^1K_1^1-y_m^2\right)\sin y_m h+\left(K_1^1+h_0^1\right)y_m\times$$
$$\times\cos y_m h,\ P_2^*\left(y_m\right)=y_m\left(K_1^1\cos y_m h-y_m h\sin y_m h\right)$$
,

$$Q'\left(iy_m\right)=\left[\left(K_1^1K_2^1-y_m^2\right)h+K_1^1+K_2^1\right]\cos y_m h-$$
$$-y_m\left[2+\left(K_1^1+K_2^1\right)h\right]\sin y_m h.$$

Представимо функцію $f\left(t\right)$ у вигляді:

$$f\left(t\right)=-\frac{P}{2\pi R^2æ_0}\sum_{k=0}^{N_1}\left(2k+1\right)P_k\left(1-2t^2\right)X_k+$$
$$+\alpha_{T^1}T_0\sum_{k=0}^{N_1}P_k\left(1-2t^2\right)\left(2k+1\right)Y_k, \qquad (42)$$

де $X_k, Y_k$ – невідомі коефіцієнти; $P_k\left(1-2t^2\right)$ – функції Лежандра. Тоді рівняння (37), з урахуванням ортогональності функцій Лежандра $P_k\left(1-2t^2\right)$ на інтервалі (0, 1), зводиться до знаходження постійних $x_n, y_n$ із системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{k=0}^{N_1}A_{n,k}X_k=P_n,\quad \left(n=\overline{0,\ N_1}\right). \qquad (43)$$
$$\sum_{k=0}^{N_1}A_{n,k}Y_k=t_n,\quad \left(n=\overline{0,\ N_1}\right), \qquad (44)$$

де $P_0=1;\ P_n=0\ \left(n=\overline{1,N}\right);\ t_n=\frac{4\delta}{\pi}\sum_{k=0}^{N}a_k;$

$$i_{n,k}\left(n=\overline{0,N_1}\right),$$
$$A_{0,0}=1-\frac{4}{\pi}\int_0^\infty G\left(2\eta h\right)\tau_0\left(\eta\right)\frac{\sin\eta}{\eta}d\eta,$$
$$A_{0,k}=2\left(-1\right)^{k+1}\left(2k+1\right)\int_0^\infty G\left(2\eta h\right)\tau_0\left(\eta\right)\times$$
$$\times J_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\eta}{2}\right)J_{-k-\frac{1}{2}}\left(\frac{\eta}{2}\right)d\eta,$$
$$A_{n,0}=-\frac{4}{\pi}\int_0^\infty G\left(2\eta h\right)\tau_n\left(\eta\right)\frac{\sin\eta}{\eta}d\eta, \qquad (45)$$
$$A_{n,k}^{(1)}=2\left(-1\right)^{k+1}\int_0^\infty G\left(2\eta h\right)\tau_n\left(\eta\right)\times$$
$$\times J_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{\eta}{2}\right)J_{-k-\frac{1}{2}}\left(\frac{\eta}{2}\right)d\eta,\ A_{n,k}=\begin{cases}A_{n,k}^{(1)}, & k\neq n\\ 1+A_{n,k}^{(1)}, & k=n;\end{cases}$$

$$i_{n,0}=\int_0^\infty\frac{J_1\left(\eta\right)Q_2\left(\eta\right)\tau_n\left(\eta\right)}{\eta Q\left(\eta\right)Q_1\left(\eta\right)}d\eta,$$
$$i_{n,k}=J_0\left(\mu_k\right)\int_0^\infty\frac{\eta J_1\left(\eta\right)Q_2\left(\eta\right)\tau_n\left(\eta\right)}{\left(\eta^2-\mu_k^2\right)Q\left(\eta\right)Q_1\left(\eta\right)}d\eta,$$
$$\left(n=\overline{0,N_1};\ k=\overline{0,N_0}\right);$$
$$\tau_0\left(\eta\right)=\frac{1}{\eta}\left(\frac{\cos\eta}{\eta}-\frac{1}{\eta}+\frac{1}{2}\sin\eta\right),$$
$$\tau_n\left(\eta\right)=\frac{1}{4}\eta\gamma_n\left(\frac{\eta}{2}\right)\left[\gamma_{n-1}\left(\frac{\eta}{2}\right)-\gamma_{n+1}\left(\frac{\eta}{2}\right)\right]-$$
$$-\frac{\left(-1\right)^n\sin\eta}{2\tilde{A}\left(1+n\right)\tilde{A}\left(1-n\right)\eta},$$

де $\gamma_n\left(\eta\right)$ – сферичні функції.

Для обчислення температурних полів в циліндрі і шарі, з врахуванням співвідношень (11), (12), (15), (20), (34), (35), матимемо наступні формули:

1) циліндрична область $\left(0\le\rho<1, 0\le\zeta\le\ell\right)$,

$$T\left(\rho,\zeta\right)=T_0\left\{1+2\left(\zeta-\ell\right)\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1}\sum_{k=0}^{N}\alpha_{0,k}^{(2)}a_k+2\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1}\sum_{k=0}^{N}\times\right.$$
$$\left.\times a_k\sum_{m=1}^\infty\frac{sh\mu_m\left(\zeta-\ell\right)\alpha_{m,k}^{(2)}}{ch\mu_m lJ_0^2\left(\mu_m\right)\mu_m}\right\}. \qquad (46)$$

2) шар $\left(-h\le\zeta\le 0;\ 0\le\rho<\infty\right)$

$$T^1\left(\rho,\zeta\right)=T_0\left\{\left[\left(\frac{1+K_1^1\left(h+\zeta\right)}{K_1^1K_2^1h+K_1^1+K_2^1}\right)+\right.\right.$$
$$\left.+2\sum_{m=1}^\infty\frac{R_1^*\left(y_m,\zeta\right)}{Q'\left(iy_m\right)}\begin{pmatrix}K_1\left(y_m\right)I_0\left(y_m\rho\right)\\-K_0\left(y_m\rho\right)I_1\left(y_m\right)\end{pmatrix}\right]a_0+$$
$$+\sum_{k=1}^{N_1}a_kJ_0\left(\mu_k\right)\left[\left(\frac{R_1\left(\mu_k,\zeta\right)J_0\left(\mu_k\rho\right)}{Q\left(\mu_k\right)J_0\left(\mu_k\right)}\right)+\right.$$
$$+2\sum_{m=1}^\infty\frac{y_m^2R_1^*\left(y_m,\zeta\right)}{\left(y_m^2+\mu_k^2\right)Q'\left(iy_m\right)}\times$$
$$\left.\left.\times\begin{pmatrix}K_1\left(y_m\right)I_0\left(y_m\rho\right)\\-K_0\left(y_m\rho\right)I_1\left(y_m\right)\end{pmatrix}\right]\right\}; \qquad (47)$$
$$R_1\left(x,\zeta\right)=xchx\left(h+\zeta\right)+K_1^1shx\left(h+\zeta\right),$$
$$R_1^*\left(y_m,\zeta\right)=y_m\cos y_m\left(h+\zeta\right)+K_1^1\sin y_m\left(h+\zeta\right).$$

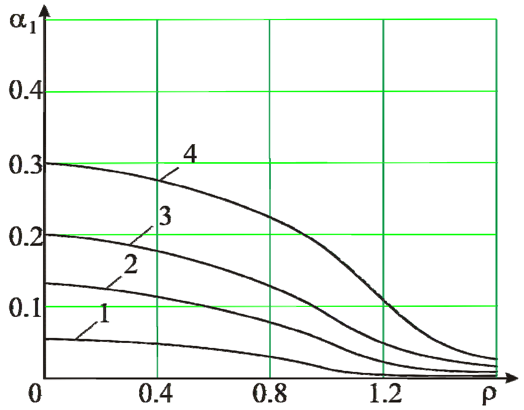


Рис. 1. Розподіл температури в шарі в зоні контакту при різних значеннях контактної провідності:
*1* – $h_0^1 = 0{,}1$ ; *2* – $h_0^1 = 1$ ; *3* – $h_0^1 = 5$ ; *4* – $h_0^1 = \infty$

При $0 \le \rho < 1$ множником береться верхній вираз в круглих дужках, при $\rho > 1$ – нижній.

Для визначення нормальних напружень під штампом, з урахуванням (30), (42), отримаємо наступний вираз:

$$\sigma_z^1(\rho,0) = \sigma_z^{(p)}(\rho,0) + \sigma_z^{(T^1)}(\rho,0), \quad (0 \le \rho < 1);$$

$$\sigma_z^{(p)} = -\frac{0{,}5P}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \times$$

$$\times \left[ x_0 + \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^{N_1} (-1)^k (2k+1) x_k T_{2k+1}(\rho) \right]; \quad (48)$$

$$\sigma_z^{(T^1)}(\rho,0) = \alpha_{T^1} T_0 \cdot \frac{æ_0}{\sqrt{1-\rho^2}} \times$$

$$\left[ Y_0 + \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^{N_1} (-1)^k (2k+1) y_k T_{2k+1}(\rho) \right],$$

де $\sigma_z^{(p)}(\rho,0)$ – силова складова напружень; $\sigma_z^{(T^1)}(\rho,0)$ – температурна складова напружень; $T_{2k+1}(\rho)$ – функція Чебишева.

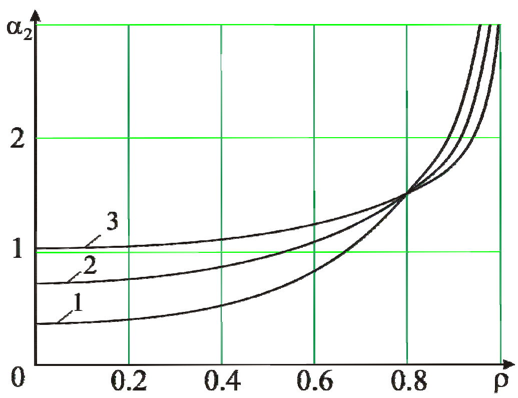


Рис. 2. Розподіл силової частини контактних напружень для різних значень товщини шару:
*1* – $h = 2$ ; *2* – $h = 4$ ; *3* – $h = \infty$ .

Якщо товщина шару $h \to \infty$, то одержимо розв'язок задачі про тиск циліндричного кругового штампа на пружний півпростір з врахуванням неідеального теплового контакту [4].

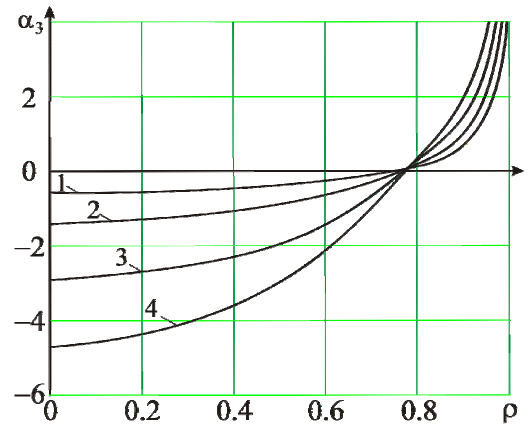


Рис. 3. Розподіл температурної складової контактних напружень для різних значень контактної провідності:
*1* – $h_0^1 = 0{,}1$ ; *2* – $h_0^1 = 1$ ; *3* – $h_0^1 = 5$ ; *4* – $h_0^1 = \infty$ .

Розглянуто числовий приклад для знаходження температури $\alpha_1 = T^1 / T_0$ і напружень $\alpha_2 = -\sigma_z^{(p)}(\rho,0)\pi R^2 / p$ , $\alpha_3 = \sigma_z^{(T^1)}(\rho,0) / \left(\alpha_{T^1} T_0\right)$ при $\delta = 0{,}3$ ; $l = 2$ ; $h = 2$ ; $K_1^1 = \infty$ , $K_2^1 = 0{,}5$ , $\lambda_z / \lambda_{z^1} = 0{,}1$ і різних значень контактної провідності $h_0^1 = 0{,}1;\ 1;\ 5;\ \infty$ .

## Висновки

Розроблено метод розв'язку контактних задач, який ґрунтується на застосуванні інтегральних перетворень Ганкеля і методу відокремлення змінних Фур'є для розв'язання рівнянь термопружності.

При заданих температурних і силових граничних умовах одержано формули для визначення температурних полів і контактних нормальних напружень. Розв'язок температурної і термопружної задач зводиться до визначення деяких постійних із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, через які знаходяться температурні поля в циліндрі і шарі, а також контактні нормальні напруження.

Числові підрахунки і аналіз розв'язку показують, що контактна провідність $h_0^1$ значно впливає на розподіл температурних полів і нормальних напружень в зоні контакту двох тіл.

## БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК


1. Грилицкий, Д. В. Осесимметричные контактные задачи упругости и термоупругости [Текст]

/ Д. В. Грилицкий, Я. М. Кизыма. – Львов: Изд.-во при Львов. ун.-те, 1981. – 135 с.
2. Грилицький, Д. В. Термопружні задачі в трибології [Текст] / Д. В. Грилицький – К.: ІЗМА, 1996. – 204 с.
3. Коваленко, А. Д. Основы термоупругости [Текст] / А. Д. Коваленко – К.: Наукова думка, 1970. – 304 с.
4. Окрепкий, Б. С. Тиск циліндричного кругового штампа на пружний півпростір з врахуванням неідеального теплового контакту [Текст] / Богдан Окрепкий, Марія Шелестовська // Вісник ТНТУ. – 2006. – № 3. – С. 26-33.
5. Окрепкий, Б. Осесиметрична температурна задача для системи тіл циліндр–півпростір при неідеальному тепловому контакті з урахуванням аналізотропії матеріалів [Текст] / Богдан Окрепкий, Федір Мигович // Вісник ТНТУ. – 2009. – № 4. – С. 188-192.
6. Окрепкий, Б. С. Тиск циліндричного кругового штампа на трансверсально-ізотропний простір при неідеальному тепловому контакті [Текст] / Богдан Окрепкий, Марія Шелестовська // Вісник ТНТУ. – 2010. – № 1. – С. 32-40.
7. Снеддон, И. П. Преобразование Фурье [Текст] / И. П. Снеддон – М., 1955, – 668 с.
8. Уиттекер, Э. Т. Курс современного анализа [Текст] / Э. Т. Уиттекер, Г. М. Ват сон. – М.: Физматгиз, 1963. – 343 с.
9. Мигович, Ф. М. Обчислення групи невласних інтегралів, які містять функції Бесселя I–го роду [Текст] / Федір Мигович, Богдан Окрепкий // Збірник наукових праць академії наук України. К., 1995. – №8 – С. 133–137.

Надійшла до редколегії 11.05.2011.
Прийнята до друку 16.05.2011.