

СТИСНЕННЯ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОГО ІЗОТРОПНОГО ШАРУ ДВОМА СПІВВІСНИМИ КІЛЬЦЕВИМИ ШТАМПАМИ

Побудовано розв'язок контактної задачі про стиснення попередньо напруженого ізотропного шару двома жорсткими кільцевими штампами складної конфігурації. Розглянуто числовий приклад побудови функції розподілу контактних напружень. Проаналізовано вплив залишкових деформацій у шарі, а також форми штампів на розподіл контактних напружень.

Ключові слова: ізотропний шар, штамп, пластичність, повзучість, деформація, контакт

Построено решение контактной задачи о сжатии изотропного слоя с начальными деформациями двумя жёсткими кольцевыми штампами сложной конфигурации. Рассмотрено числовой пример построения функции распределения контактных напряжений. Проанализировано влияние остаточных напряжений, а также формы штампа на распределение контактных напряжений.

Ключевые слова: изотропный слой, штамп, пластичность, ползучесть, деформация, контакт

The solving of tasks on the contact interaction of two annular punches and isotropic layer with residual deformations is built. Numerical example of searching components of contact strain under the punch is considered. The effect of parameters of the field of residual deformations and form of punch on distributing contact stresses tensions is analyzed.

Keywords: isotropic layer, die, plasticity, creep, deformation, contact

Підвищення надійності та довговічності конструкцій і механізмів є одним із найактуальніших завдань сучасного будівництва та машинобудування. Як відомо [2], у елементах конструкцій та деталях машин майже завжди наявні залишкові деформації. Природа їх виникнення може бути дуже різною: незворотні деформації (пластичність, повзучість), структурні перетворення в матеріалі, зміна агрегатного стану в окремих місцях конструкцій, механічні, хімічні та технологічні процеси тощо. Напруження, що при цьому виникають, так само як і будь-які інші, можуть викликати руйнування, прискорити певні фазові переходи, корозію. Врахування залишкових деформацій при розрахунку важливих елементів конструкцій, машин та споруд дозволяє більш точно оцінювати запас міцності матеріалу, а отже суттєво зменшити його витрати, зберігаючи при цьому необхідні функціональні характеристики елементів в цілому.

Саме тому дослідження контактної взаємодії пружних тіл із залишковими деформаціями є надзвичайно актуальним завданням сьогодні та залишатиметься таким у майбутньому.

Дослідження проблем контактної взаємодії попередньо напружених тіл у нашій країні та закордоном появились, у достатній кількості, лише наприкінці минулого століття. В першу чергу це пов'язано із тим, що лінійна теорія пружності не враховує наявності у тілах залиш-

кових напружень. У загальному випадку, строга постановка таких задач потребує застосування апарату нелінійної теорії пружності, проте, при достатньо великих значеннях початкових напружень, можна обмежитись її лінеаризованим варіантом.

Сучасний рівень лінеаризованої теорії пружності та математичних методів, у сукупності із бурхливим розвитком комп'ютерної техніки, дають можливість ефективно формувати різноманітні розрахункові моделі стосовно широкого кола задач. Так у працях [5, 6] апарат лінеаризованої теорії пружності успішно використовується для побудови тривимірної моделі скінченого елемента та вивчення з її допомогою ефектів взаємодії волокон підчас мікродеформацій у з'єднаннях, підсилених ізотропними та анізотропними волокнами.

Достатньо повний опис та класифікацію робіт присвячених теорії контактної взаємодії попередньо напружених тіл із жорсткими штампами можна знайти у статті [1]. Проте недостатньо вивченим залишається питання взаємодії кільцевих штампів складної конфігурації із пружним півпростором та шаром у якому наявні залишкові деформації.

Розглянемо осесиметричну задачу про стиснення попередньо напруженого ізотропного шару товщиною $2h$ двома жорсткими кільцевими штампами.

Розв'язання задачі проводитимемо у рамках лінеаризованої теорії пружності, із використанням термінології та позначень монографії [3]. Вважатимемо, що пружні потенціали є неперервними, двічі диференційованими функціями алгебраїчних інваріантів тензора деформацій Гріна [3].

Усі викладки проведено у координатах деформованого стану y_i , що пов'язані із лагранжовими координатами (які в початковому, не деформованому стані співпадають із декартовими) співвідношеннями $y_i = \lambda_i x_i$ ($i=1,2,3$), де λ_i – коефіцієнти видовження лінійного елемента направлено вздовж декартової осі x_i . Також вважатимемо, що дія штампів викликає у шарі малі збурення основного однорідного напружено-деформованого стану, для якого виконуються умови:

$$\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3; S_0^{11} = S_0^{22} \neq S_0^{33}; \quad (1)$$

де S_0^{ii} – складові тензора початкових напружень.

Штampi втискуються у шар поступально без обертання та тертя під дією постійної сили P . Їх утворено обертанням навколо спільної осі двох віток парабол, спряжених у вершинах відрізок прямої, перпендикулярної до осі обертання. Осі парабол, що обмежують штамп, паралельні до спільної осі обертання, яка співпадає із лінією дії сили P .

Виберемо циліндричну систему координат (O, r, θ, z) так, щоб координатна площина (O, r, θ) співпадала серединною площиною шару, а вісь Oz – із лінією дії сили P (рис. 1).

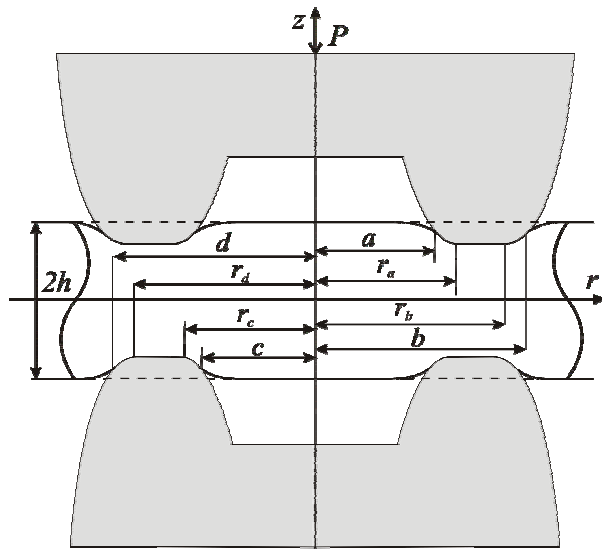


Рис. 1. Схема контактної взаємодії

Граничні умови поставленої задачі матимуть вигляд:

$$\sigma_{zz}(r, h) = 0, 0 \leq r \leq a, b \leq r; \quad (2)$$

$$\sigma_{rz}(r, h) = 0, 0 \leq r < \infty; \quad (3)$$

$$u_z(r, h) = w_1(r), a \leq r \leq b; \quad (4)$$

$$\sigma_{zz}(r, -h) = 0, 0 \leq r \leq c, d \leq r; \quad (5)$$

$$\sigma_{rz}(r, -h) = 0, 0 \leq r < \infty; \quad (6)$$

$$u_z(r, -h) = w_2(r), c \leq r \leq d. \quad (7)$$

Функції $w_1(r)$ та $w_2(r)$, що описують форму верхнього та нижнього штампів відповідно, мають вигляд:

$$w_1(r) = w_1(a) - \frac{1}{2R_1} \left[(r_a - a)^2 - (r_a - r)^2 \right],$$

$$a \leq r \leq r_a;$$

$$w_1(r) = w_1(a) - \frac{1}{2R_1} (r_a - a)^2, r_a < r \leq r_1;$$

$$w_1(r) = w_1(b) - \frac{1}{2R_2} (r_b - b)^2, r_1 < r \leq r_b;$$

$$w_1(r) = w_1(b) - \frac{1}{2R_2} \left[(r_b - b)^2 - (r_b - r)^2 \right],$$

$$r_b < r \leq b,$$

(8)

$$w_2(r) = w_2(c) + \frac{1}{2R_3} \left[(r_c - c)^2 - (r_c - r)^2 \right],$$

$$c \leq r \leq r_c;$$

$$w_2(r) = w_2(c) + \frac{1}{2R_3} (r_c - c)^2, r_c < r \leq r_2;$$

$$w_2(r) = w_2(d) + \frac{1}{2R_4} (r_d - d)^2, r_2 < r \leq r_d;$$

$$w_2(r) = w_2(d) + \frac{1}{2R_4} \left[(r_d - d)^2 - (r_d - r)^2 \right],$$

$$r_d < r \leq d,$$

(9)

де $r_1 = \frac{r_a + r_b}{2}$, $r_2 = \frac{r_c + r_d}{2}$; R_1, R_2, R_3 та R_4 – радіуси кривини парабол, якими обмежено штамп.

Компоненти тензора контактних напружень та вектора переміщень точок шару в осесиметричному випадку можна записати у вигляді [2]:

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}(r, z) &= c_{33}n_1 \int_0^\infty \alpha^3 \{ A_1 ch(\alpha z) + \\ &+ A_2 [s \cdot ch(\alpha z) + \alpha z sh(\alpha z)] + B_1 sh(\alpha z) + \\ &+ B_2 [s \cdot sh(\alpha z) + \alpha z ch(\alpha z)] \} J_0(\alpha r) d\alpha \\ \sigma_{rz}(r, z) &= -c_{31} \int_0^\infty \alpha^3 \{ A_1 sh(\alpha z) + \\ &+ A_2 [s_0 \cdot sh(\alpha z) + \alpha z ch(\alpha z)] + B_1 ch(\alpha z) + \\ &+ B_2 [s_0 \cdot ch(\alpha z) + \alpha z sh(\alpha z)] \} J_1(\alpha r) d\alpha .\end{aligned}\quad (10)$$

$$\begin{aligned}u_r(r, z) &= -\int_0^\infty \alpha^2 \{ A_1 ch(\alpha z) + \\ &+ A_2 [ch(\alpha z) + \alpha z sh(\alpha z)] + B_1 sh(\alpha z) + \\ &+ B_2 [sh(\alpha z) + \alpha z ch(\alpha z)] \} J_1(\alpha r) d\alpha \\ u_z(r, z) &= m_1 \int_0^\infty \alpha^2 \{ A_1 sh(\alpha z) + \\ &+ A_2 [s_1 \cdot sh(\alpha z) + \alpha z ch(\alpha z)] + B_1 ch(\alpha z) + \\ &+ B_2 [s_1 \cdot ch(\alpha z) + \alpha z sh(\alpha z)] \} J_0(\alpha r) d\alpha .\end{aligned}\quad (11)$$

Співвідношення (10) – (11) записано у загальному вигляді для випадку теорії великих (скінчених) деформацій, а також різних варіантів теорії малих початкових деформацій та враховують наявність пружного потенціалу довільної структури. Вони побудовані для стискуваних та нестискуваних тіл без будь-яких обмежень. Коефіцієнти c_{31} , c_{33} , m_1 , n_1 , s , s_0 , s_1 залежать від характеру пружного потенціалу і підбираються у кожному випадку окремо, відповідно до [3].

На верхній граничній площині шару, при $z = h$, із співвідношень (10) – (11), отримуємо:

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= c_{33}n_1 \int_0^\infty \alpha^3 \{ A_1 ch(\alpha h) + \\ &+ A_2 [s \cdot ch(\alpha h) + \alpha h sh(\alpha h)] + B_1 sh(\alpha h) + \\ &+ B_2 [s \cdot sh(\alpha h) + \alpha h ch(\alpha h)] \} J_0(\alpha r) d\alpha ,\end{aligned}\quad (12)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rz} &= -c_{31} \int_0^\infty \alpha^3 \{ A_1 sh(\alpha h) + \\ &+ A_2 [s_0 \cdot sh(\alpha h) + \alpha h ch(\alpha h)] + B_1 ch(\alpha h) + \\ &+ B_2 [s_0 ch(\alpha h) + \alpha h \cdot sh(\alpha h)] \} J_1(\alpha r) d\alpha ,\end{aligned}\quad (13)$$

$$u_z = m_1 \int_0^\infty \alpha^2 \{ A_1 sh(\alpha h) +$$

$$\begin{aligned}&+ A_2 [s_1 \cdot sh(\alpha h) + \alpha h ch(\alpha h)] + B_1 ch(\alpha h) + \\ &+ B_2 [s_1 ch(\alpha h) + \alpha h \cdot sh(\alpha h)] \} J_0(\alpha r) d\alpha .\end{aligned}\quad (14)$$

Аналогічно, на нижній граничній площині шару, матимемо:

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= c_{33}n_1 \int_0^\infty \alpha^3 \{ A_1 ch(\alpha h) + \\ &+ A_2 [s \cdot ch(\alpha h) + \alpha h sh(\alpha h)] - B_1 sh(\alpha h) - \\ &- B_2 [s \cdot sh(\alpha h) + \alpha h ch(\alpha h)] \} J_0(\alpha r) d\alpha ,\end{aligned}\quad (15)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rz} &= -c_{31} \int_0^\infty \alpha^3 \{ -A_1 sh(\alpha h) - \\ &- A_2 [s_0 \cdot sh(\alpha h) + \alpha h ch(\alpha h)] + B_1 ch(\alpha h) + \\ &+ B_2 [s_0 ch(\alpha h) + \alpha h \cdot sh(\alpha h)] \} J_1(\alpha r) d\alpha ,\end{aligned}\quad (16)$$

$$\begin{aligned}u_z &= m_1 \int_0^\infty \alpha^2 \{ -A_1 sh(\alpha h) - \\ &- A_2 [s_1 \cdot sh(\alpha h) + \alpha h ch(\alpha h)] + B_1 ch(\alpha h) + \\ &+ B_2 [s_1 ch(\alpha h) + \alpha h \cdot sh(\alpha h)] \} J_0(\alpha r) d\alpha .\end{aligned}\quad (17)$$

Вимагаючи виконання граничних умов (3) та (6), із рівностей (13) та (16), одержуємо вирази для функцій A_1 та B_1 через A_2 та B_2 відповідно:

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{-A_2}{sh(\alpha h)} [s_0 \cdot sh(\alpha h) + \alpha h \cdot ch(\alpha h)], \\ B_1 &= \frac{-B_2}{ch(\alpha h)} [s_0 \cdot ch(\alpha h) + \alpha h \cdot sh(\alpha h)].\end{aligned}\quad (18)$$

Вимагаючи виконання граничних умов (2) та (5), із рівностей (12) та (15), одержуємо:

$$\begin{aligned}c_{33} \int_0^\infty \alpha^3 \{ A_1 ch(\alpha h) + \\ &+ A_2 [s \cdot ch(\alpha h) + \alpha h sh(\alpha h)] + B_1 sh(\alpha h) + \\ &+ B_2 [s \cdot sh(\alpha h) + \alpha h ch(\alpha h)] \} J_0(\alpha r) d\alpha = 0 \\ &0 \leq r \leq a, b \leq r ;\end{aligned}\quad (19)$$

$$\begin{aligned}c_{33} \int_0^\infty \alpha^3 \{ A_1 ch(\alpha h) + \\ &+ A_2 [s \cdot ch(\alpha h) + \alpha h sh(\alpha h)] - B_1 sh(\alpha h) - \\ &- B_2 [s \cdot sh(\alpha h) + \alpha h ch(\alpha h)] \} J_0(\alpha r) d\alpha = 0 \\ &0 \leq r \leq c, d \leq r .\end{aligned}\quad (20)$$

Введемо невідомі функції $x(r)$, $a \leq r \leq b$ та $y(r)$, $c \leq r \leq d$, за допомогою яких продовжимо співвідношення (19) та (20) на проміжок $0 \leq r < \infty$.

Функція $x(r)$ визначає розподіл контактних напружень під верхнім, а $y(r)$ – під нижнім штампом. Врахувавши їх неперервність, а також рівність нулю на границі області контакту представимо $x(r)$ та $y(r)$ у вигляді відрізків узагальненого ряду Фур'є за функціями $L_n^{(1)}(r) = J_0\left(\frac{\gamma_n}{a}r\right)Y_0(\gamma_n) - Y_0\left(\frac{\gamma_n}{a}r\right)J_0(\gamma_n)$ та $L_n^{(2)}(r) = J_0\left(\frac{\lambda_n}{c}r\right)Y_0(\lambda_n) - Y_0\left(\frac{\lambda_n}{c}r\right)J_0(\lambda_n)$, де γ_n та λ_n – додатні корені рівнянь $J_0\left(\frac{b}{a}x\right)Y_0(x) - Y_0\left(\frac{b}{a}x\right)J_0(x) = 0$ та $J_0\left(\frac{d}{c}x\right)Y_0(x) - Y_0\left(\frac{d}{c}x\right)J_0(x) = 0$ відповідно:

$$x(r) = \sigma_{zz}(r, h) = \sum_{n=1}^N a_n L_n^{(1)}(r), \quad (21)$$

$$y(r) = \sigma_{zz}(r, -h) = \sum_{n=1}^N b_n L_n^{(2)}(r) \quad (22)$$

де a_n та b_n – невідомі коефіцієнти.

Застосувавши формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля до співвідношень (19) – (20), врахувавши представлення (21) – (22), та використавши вирази (18) одержуємо:

$$\begin{aligned} \alpha^2 A_2 &= \frac{1}{c_{33}n_1} \left[\frac{1}{\Delta_3(\alpha)} \sum_{n=1}^N a_n \Phi_n^{(1)}(\alpha) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Delta_3(\alpha)} \sum_{n=1}^N b_n \Phi_n^{(2)}(\alpha) \right], \\ \alpha^2 B_2 &= \frac{1}{c_{33}n_1} \left[\frac{1}{\Delta_4(\alpha)} \sum_{n=1}^N a_n \Phi_n^{(1)}(\alpha) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Delta_4(\alpha)} \sum_{n=1}^N b_n \Phi_n^{(2)}(\alpha) \right]; \quad (23) \end{aligned}$$

$$\Delta_3(\alpha) = (s - s_0)ch(\alpha h) - \frac{\alpha h}{sh(\alpha h)},$$

$$\Delta_4(\alpha) = (s - s_0)sh(\alpha h) + \frac{\alpha h}{ch(\alpha h)},$$

$$\Phi_n^{(1)}(\alpha) = \int_a^b r \cdot L_n^{(1)}(r) J_0(\alpha r) dr,$$

$$\Phi_n^{(2)}(\alpha) = \int_c^d r \cdot L_n^{(2)}(r) J_0(\alpha r) dr.$$

Вимагаючи виконання граничної умови (4), із співвідношення (14), врахувавши рівності (18) та (23), матимемо:

$$-\omega_1 \int_0^\infty \left(\varphi_1(\alpha) \sum_{n=1}^N a_n \Phi_n^{(1)}(\alpha) + \varphi_2(\alpha) \sum_{n=1}^N b_n \Phi_n^{(2)}(\alpha) \right) \times J_0(\alpha r) d\alpha = w_1(r), \quad a \leq r \leq b, \quad (24)$$

$$\varphi_1(\alpha) = \Delta_5(\alpha) + \Delta_6(\alpha),$$

$$\varphi_2(\alpha) = \Delta_5(\alpha) - \Delta_6(\alpha),$$

$$\omega_1 = \frac{m_1(s_0 - s_1)}{2c_{33}n_1},$$

$$\Delta_5(\alpha) = \frac{(s_1 - s_0)sh^2(\alpha h)}{(s - s_0)ch(\alpha h)sh(\alpha h) - \alpha h},$$

$$\Delta_6(\alpha) = \frac{(s_1 - s_0)ch^2(\alpha h)}{(s - s_0)ch(\alpha h)sh(\alpha h) + \alpha h}.$$

Помноживши ліву та праву частини співвідношення (24) на $r \cdot L_q^{(1)}(r)$ та проінтегрувавши одержані вирази по r від a до b , отримаємо:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n K_{nq}^{(1)}(\alpha) + \sum_{n=1}^N b_n K_{nq}^{(2)}(\alpha) &= \\ &= \frac{1}{2\omega_1 R_1} T_q^{(1)} + \frac{1}{2\omega_1 R_2} T_q^{(2)}, \quad (25) \end{aligned}$$

$$T_q^{(1)} = (r_a - a)^2 \int_a^{r_1} r L_q^{(1)}(r) dr - \int_a^{r_a} r (r_a - r)^2 L_q^{(1)}(r) dr,$$

$$T_q^{(2)} = (r_b - b)^2 \int_{r_1}^b r L_q^{(1)}(r) dr - \int_{r_b}^b r (r_b - r)^2 L_q^{(1)}(r) dr,$$

$$K_{nq}^{(i)} = \int_0^\infty \Phi_n^{(i)}(\alpha) \varphi_i(\alpha) [\Phi_q^{(i)}(\alpha) -$$

$$-J_0(\alpha a) \int_a^{r_1} r L_q^{(1)}(r) dr - J_0(\alpha b) \int_{r_1}^b r L_q^{(1)}(r) dr] d\alpha,$$

$$i = \overline{1, 2}, \quad q = \overline{1, N}.$$

Аналогічно до (25) із співвідношень (7) та (17), матимемо:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n K_{nq}^{(3)}(\alpha) + \sum_{n=1}^N b_n K_{nq}^{(4)}(\alpha) &= \\ &= \frac{-1}{2\omega_1 R_3} T_q^{(3)} + \frac{-1}{2\omega_1 R_4} T_q^{(4)}, \quad (26) \end{aligned}$$

$$T_q^{(3)} = (r_c - c)^2 \int_c^{r_2} r L_q^{(2)}(r) dr - \int_c^{r_c} r (r_c - r)^2 L_q^{(2)}(r) dr,$$

$$T_q^{(4)} = (r_d - d)^2 \int_{r_2}^d r L_q^{(2)}(r) dr - \int_{r_a}^d r (r_d - r)^2 L_q^{(2)}(r) dr,$$

$$K_{nq}^{(i+2)} = \int_0^\infty \Phi_n^{(i)}(\alpha) \Psi_i(\alpha) [\Phi_q^{(2)}(\alpha) - \\ - J_0(\alpha c) \int_c^{r_2} r L_q^{(2)}(r) dr - J_0(\alpha d) \int_{r_2}^d r L_q^{(2)}(r) dr] d\alpha, \\ \Psi_1(\alpha) = -\varphi_2(\alpha), \Psi_2(\alpha) = -\varphi_1(\alpha).$$

Використавши метод суперпозиції та ввівши позначення:

$$a_n = \frac{1}{\omega_1} \sum_{i=1}^4 z_i a_n^{(i)}, \quad b_n = \frac{1}{\omega_1} \sum_{i=1}^4 z_i b_n^{(i)} \quad z_i = \frac{1}{2R_i}, \quad (27)$$

із (25) та (26) одержуємо системи лінійних рівнянь відносно невідомих $a_n^{(i)}$ та $b_n^{(i)}$, $i = \overline{1, 4}$.

Величини z_i в співвідношеннях (27) знаходимо з умов рівноваги штампів:

$$2\pi \int_a^b r \sigma_{zz}(r, h) dr = -P, \\ 2\pi \int_c^d r \sigma_{zz}(r, -h) dr = -P \quad (28)$$

та рівності вертикальних переміщень граничних площин шару при $r = r_a$ та $r = r_b$, а також при $r = r_c$ та $r = r_d$:

$$u_z(r_a, h) = u_z(r_b, h), \quad u_z(r_c, -h) = u_z(r_d, -h). \quad (29)$$

Із умов (28) матимемо:

$$z_1 \cdot \sum_{n=1}^N a_n^{(1)} Q_n^{(1)} + z_2 \cdot \sum_{n=1}^N a_n^{(2)} Q_n^{(1)} + \\ + z_3 \cdot \sum_{n=1}^N a_n^{(3)} Q_n^{(1)} + z_4 \cdot \sum_{n=1}^N a_n^{(4)} Q_n^{(1)} = -\frac{P}{2\pi} \cdot \omega_1, \quad (30)$$

$$z_1 \cdot \sum_{n=1}^N b_n^{(1)} Q_n^{(2)} + z_2 \cdot \sum_{n=1}^N b_n^{(2)} Q_n^{(2)} + \\ + z_3 \cdot \sum_{n=1}^N b_n^{(3)} Q_n^{(2)} + z_4 \cdot \sum_{n=1}^N b_n^{(4)} Q_n^{(2)} = -\frac{P}{2\pi} \cdot \omega_1 \quad (31)$$

$$\text{де } Q_n^{(1)} = \int_a^b r \cdot L_n^{(1)}(r) dr, \quad Q_n^{(2)} = \int_c^d r \cdot L_n^{(2)}(r) dr.$$

Із умови (29), матимемо:

$$z_1 \left[\sum_{n=1}^N a_n^{(1)} \cdot M_n^{(1)} + \sum_{n=1}^N b_n^{(1)} \cdot M_n^{(2)} - (r_a - a)^2 \right] + \\ + z_2 \left[\sum_{n=1}^N a_n^{(2)} \cdot M_n^{(1)} + \sum_{n=1}^N b_n^{(2)} \cdot M_n^{(2)} + (r_b - b)^2 \right] + \\ + z_3 \left[\sum_{n=1}^N a_n^{(3)} \cdot M_n^{(1)} + \sum_{n=1}^N b_n^{(3)} \cdot M_n^{(2)} \right] + \\ + z_4 \left[\sum_{n=1}^N a_n^{(4)} \cdot M_n^{(1)} + \sum_{n=1}^N b_n^{(4)} \cdot M_n^{(2)} \right] = 0, \quad (32)$$

$$z_1 \left[\sum_{n=1}^N a_n^{(1)} \cdot M_n^{(3)} + \sum_{n=1}^N b_n^{(1)} \cdot M_n^{(4)} \right] + \\ + z_2 \left[\sum_{n=1}^N a_n^{(2)} \cdot M_n^{(3)} + \sum_{n=1}^N b_n^{(2)} \cdot M_n^{(4)} \right] + \\ + z_3 \left[\sum_{n=1}^N a_n^{(3)} \cdot M_n^{(3)} + \sum_{n=1}^N b_n^{(3)} \cdot M_n^{(4)} - (r_c - c)^2 \right] + \\ + z_4 \left[\sum_{n=1}^N a_n^{(4)} \cdot M_n^{(3)} + \sum_{n=1}^N b_n^{(4)} \cdot M_n^{(4)} + (r_d - d)^2 \right] = 0, \quad (33)$$

$$\text{де } M_n^{(i)} = \int_0^\infty \varphi_i(\alpha) \Phi_n^{(i)}(\alpha) \{J_0(\alpha b) - J_0(\alpha a)\} d\alpha,$$

$$M_n^{(i+2)} = \int_0^\infty \psi_i(\alpha) \Phi_n^{(i)}(\alpha) \{J_0(\alpha c) - J_0(\alpha d)\} d\alpha, \\ i = \overline{1, 2}.$$

Зробивши у рівняннях (30) – (33) заміну:

$$z_i^* = z_i \cdot \omega_1 \cdot \frac{2\pi}{P}, \quad i = \overline{1, 4} \Rightarrow z_i = \omega_1 \cdot \frac{P}{2\pi} z_i^*,$$

приходимо до системи відносно невідомих z_i^* , розв'язавши яку, одержуємо формули для знаходження розподілу контактних напружень під штампями:

$$\sigma_{zz}(r, h) = \frac{P}{2\pi} \cdot \sum_{n=1}^N \left[\sum_{i=1}^4 (z_i^* a_n^{(i)}) \right] L_n^{(1)}(r),$$

$$\sigma_{zz}(r, -h) = \frac{P}{2\pi} \cdot \sum_{n=1}^N \left[\sum_{i=1}^4 (z_i^* b_n^{(i)}) \right] L_n^{(2)}(r).$$

За допомогою розв'язаної задачі досліджено вплив форми жорсткого штампа, а також наявності залишкових деформацій у шарі на характер розподілу контактних напружень. Числовий аналіз проведено для двох випадків:

- шар є стискуваним тілом із наявним пружним потенціалом гармонічного типу (рис. 2);
- шар – нестискуване тіло із потенціалом Бартенєєва-Хазановіча (рис. 3).

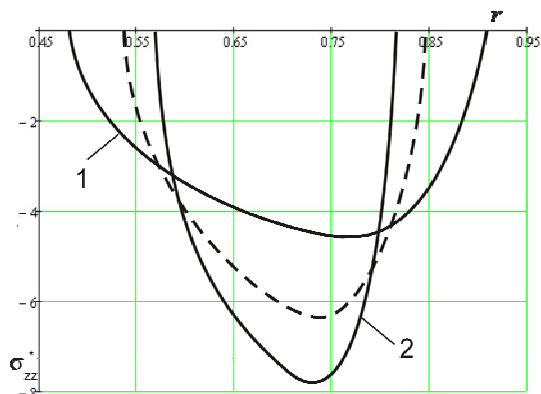


Рис. 2. Розподіл контактних напружень

На рис. 2 зображено графіки безрозмірної функції $\sigma_{zz}^* = \frac{2\pi}{P} \sigma_{zz}(r, h)$ для випадку, коли прямолинійна ділянка в основі верхнього штамп-па відсутня, а його конфігурація визначається такими значеннями параметрів: $r_a = r_b = 0.7$,

$$R_1 = \frac{\pi}{14} \frac{1}{\omega_1 P}, R_2 = \frac{\pi}{24} \frac{1}{\omega_1 P}.$$

Пунктирна крива відповідає відсутності у шарі залишкових деформацій ($\lambda_1 = 1$), крива 1 – наявності залишкових деформацій стиску ($\lambda_1 < 1$), а крива 2 – розтягу ($\lambda_1 > 1$). Проведений числовий аналіз дає можливість стверджувати, що поява у тілі залишкових деформацій розтягу викликає звуження ділянки контакту та збільшення абсолютного значення контактних напружень. Виникнення деформацій стиску спричиняє розширення ділянки контакту та зменшення абсолютного значення контактних напружень.

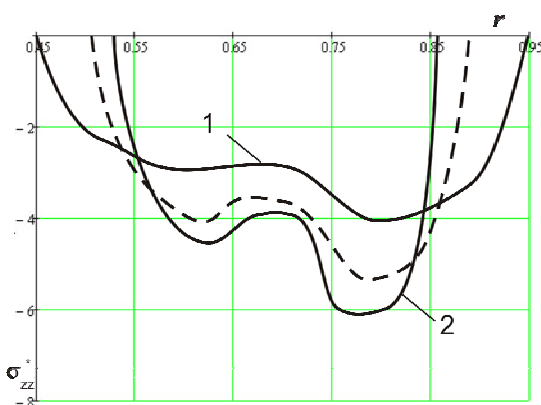


Рис. 3. Розподіл контактних напружень

На рис. 3 зображено графіки функції σ_{zz}^* для наступних значень параметрів $r_a = 0.65$,

$$r_b = 0.75, R_1 = \frac{\pi}{14} \frac{1}{\omega_1 P}, R_2 = \frac{\pi}{24} \frac{1}{\omega_1 P}.$$

Проаналізувавши одержані результати можна зробити висновок, що поява у основі штамп-па прямолинійної ділянки $[r_a, r_b]$ викликає зменшення абсолютної величини контактних напружень та зміщення точок екстремуму до межі ділянки контакту. Достовірність зроблених висновків підтверджує їх узгодження із результатами одержаними іншими авторами [4].

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Бабич, С. Ю. Контактные задачи для упругих тел. С начальными напряжениями применительно к жестким и упругим штампам [Текст] / С. Ю. Бабич, А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий // Прикл. механика. – 2004. – Т. 40, № 7. – С. 41-69.
2. Гузь, А. Н. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями [Текст] / А. Н. Гузь, В. Б. Рудницкий. – Хмельницький, 2006. – 710 с.
3. Гузь, А. Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями [Текст] / Александр Николаевич Гузь – К.: Наук. думка, 1983. – 296 с.
4. Гузь, О. М. Контактна взаємодія тіл з початковими (залишковими) напруженнями [Текст] / О. М. Гузь, В. Б. Рудницкий // Проблеми математичного моделювання сучасних технологій: Зб. наук. пр. за матеріалами міжнар. наук.-техн. конф. – Хмельницький: ХДУ, 2004. – С. 5-35.
5. Lapusta, Y. Three-dimensional FE model for fiber interaction effects during microbuckling in composites with isotropic and anisotropic fibers [Текст] / Y. Lapusta, J. Harich, W. Wagner // Communications in numerical methods in engineering – 2008 – Volume: 24 – Issue: 12 – P. 2206-2215.
6. Harich, J. 3D FE-modeling of surface and anisotropy effects during micro-buckling in fiber composites / J. Harich, Y. Lapusta, W. Wagner // Composite structures – 2009 – Volume: 89 – Issue: 4 – P. 551-555.

Надійшла до редколегії 15.05.2011.

Прийнята до друку 25.05.2011.