

## ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ ДЛЯ ТІЛ ОБЕРТАННЯ В НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ

На основі напіваналітичного методу скінчених елементів проведено дослідження вірогідності та ефективності визначення параметрів механіки руйнування для тіл обертання в нестационарних задачах динаміки. Представлено нові методики обчислення J-інтеграла та апроксимації тріщини при дії динамічних навантажень.

*Ключові слова:* скінчений елемент, вірогідність, скінчено-елементна модель, динамічні навантаження

В рамках полуаналитического метода конечных элементов проведены исследования достоверности и эффективности определения параметров механики разрушения для тел вращения в нестационарных задачах динамики. Представлены новые методики вычисления J-интеграла и аппроксимации трещины при действии динамических нагрузок.

*Ключевые слова:* конечный элемент, вероятность, конечно-элементная модель, динамические нагрузки

On the basis of semi-analytical finite elements method data validity research and research of effective determination of fracture mechanics parameters for bodies of revolution in non-stationary dynamics problems were conducted. New method of J-integral calculation and crack approximation under dynamic impact are presented.

*Keywords:* finite element, probability, finite-element model, dynamic loadings

### Вступ

Багато вузлів та деталей, що нині використовуються в машинобудуванні, енергетиці та інших галузях техніки представляють собою просторові тіла обертання складної форми та структури поперечного перерізу. До них відносяться елементи трубопроводів, посудини тиску, зразки для визначення динамічних параметрів механіки руйнування і ін. Нерідко вони перебувають під дією довільно розподілених у просторі і часі нестационарних динамічних навантажень різної тривалості. Прагнення до збільшення терміну їх експлуатації призводить до використання таких елементів і деталей при наявності в них тріщин. Найбільш поширений і універсальний чисельний метод для дослідження означеного класу об'єктів є напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ).

При визначенні тріщиностійкості об'єктів, як правило, використовують два параметри – J-інтеграл Черепанова-Райса та коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН). Питанням обчислення параметрів руйнування в просторових задачах статички присвячена значна кількість робіт. В той же час, основними об'єктами механіки руйнування при динамічному навантаженні залишаються двовимірні тіла. Питання механіки руйнування при динамічному навантаженні на основі напіваналітичного методу скінчених елементів взагалі не піднімалися.

Метою роботи є дослідження вірогідності та ефективності визначення параметрів механіки

руйнування для тіл обертання в нестационарних задачах динаміки на основі напіваналітичного методу скінчених елементів.

### НМСЕ в задачах динаміки просторових тіл обертання

Для дискретизації тіл обертання при динамічному навантаженні застосовується кільцевий скінчений елемент (СЕ) [7] (рис. 1).

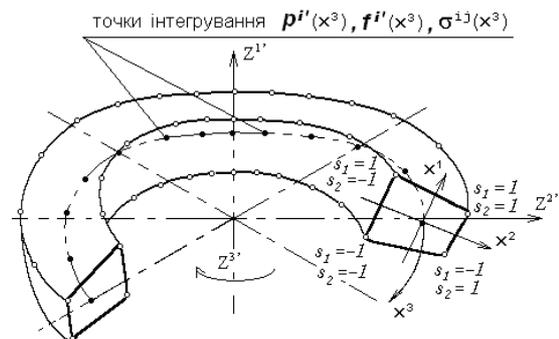


Рис. 1. Кільцевий замкнений скінчений елемент

$$\rho = \rho|_{x^\alpha=0}, \quad d^{ijkl} = d^{ijkl}|_{x^\alpha=0}, \quad \sqrt{g} = \sqrt{g}|_{x^\alpha=0}, \quad (1)$$

де  $\rho$  – щільність матеріалу,  $d^{ijkl}$  – компоненти тензора пружних постійних,  $g$  – визначник метричного тензора.

Зовнішнє навантаження і напруження довільно змінюються вздовж осі  $x^3$  і обчислюються в необхідній кількості точок інтегрування.

За невідомі при розв'язанні задачі приймаються компоненти переміщень, швидкостей та прискорень вузлів СЕ  $(u:\dot{u}:\ddot{u})_k$ , в базисній системі координат  $z^i$ , де  $k'$  – напрямок в базисній системі координат.

Розподіл невідомих в напрямку  $x^3$  описується  $2\pi$  – періодичними функціями на основі тригонометричних рядів Фур'є. При умові наявності хоча б однієї площини симетрії:

$$(u:\dot{u}:\ddot{u})_{k'(S_1,S_2)} = \sum_{l=0}^L (u:\dot{u}:\ddot{u})_{k'(S_1,S_2)}^l \Psi_{k'}^l \quad (2)$$

Для замкненого тіла обертання в циліндричній системі координат:

$$\Psi_{1'}^l = \Psi_{2'}^l = \cos lx^3, \quad \Psi_{3'}^l = \sin lx^3, \quad l_0 = 0, \quad 0 \leq x^3 \leq 2\pi \quad (3)$$

В площині перетину елемента прийнято білінійний розподіл переміщень, швидкостей і прискорень:

$$(u:\dot{u}:\ddot{u})_{k'} = \sum_{S_1} \sum_{S_2} \prod_{n=1}^2 \left( S_{(n)} x^{(n)} + \frac{1}{2} \right) (u:\dot{u}:\ddot{u})_{k'(S_1,S_2)} \quad (4)$$

Для подання деформацій використовується моменту схема скінченного елемента (МССЕ) [5], застосування якої дозволяє істотно підвищити ефективність чисельного дослідження просторових конструкцій на основі методу скінчених елементів [3, 6].

Слід зазначити, що компоненти тензорів напружень і деформацій приймають вигляд повних рядів Фур'є:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{l=0}^L \bar{\varepsilon}_{ij}^l \Psi_{1'}^l + \bar{\varepsilon}_{ij}^l \Psi_{3'}^l, \quad \sigma^{ij} = \sum_{l=0}^L \bar{\sigma}_l^{ij} \Psi_{1'}^l + \bar{\sigma}_l^{ij} \Psi_{3'}^l \quad (5)$$

Динамічні процеси в неоднорідному ізотропному тілі, об'ємом  $V$ , обмеженого поверхнею  $S$  описуються рівнянням:

$$\delta W + \delta T - \delta A = 0 \quad (6)$$

$$\text{де: } \delta W = \int_V \bar{\sigma}^{ij} \delta \bar{\varepsilon}_{ij} dV; \quad \delta T = \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV;$$

$$\delta A = \int_V f^i \delta u_i dV + \int_{S_p} p^i \delta u_i dS \quad (7)$$

Підставляючи апроксимації (2) до (7), можна представити варіації потенційної, кінетичної енергій та роботи зовнішніх як суму їх амплітудних складових:

$$\delta W = \sum_{l=0}^L \delta W_l, \quad \delta T = \sum_{l=0}^L \delta T_l, \quad \delta A = \sum_{l=0}^L \delta A_l \quad (8)$$

Для однорідних вздовж направляючої просторових тіл система рівнянь (6) розпадається на ряд незалежних амплітудних підсистем для кожної з гармонік [3]:

$$\delta W_l + \delta T_l - \delta A_l = 0 \quad (9)$$

Дискретна форма рівняння (9) має вигляд [4]:

$$[M]_{lm} \{\ddot{U}\}^{m,\tau} + [K]_{lm} \{U\}^{m,\tau} = \{Q\}_l^\tau \quad (10)$$

### Спеціальні скінчені елементи з тріщиною для задачі динаміки

Складнощі апроксимації тріщини, що виникають при розв'язанні нестационарних задач механіки руйнування для об'єктів із складною формою та конфігурацією поперечного перерізу, можуть бути подолані на основі використання спеціальних скінчених елементів, матеріал яких не сприймає дію нормальних та дотичних до траєкторії тріщини напружень.

Розглянемо кільцевий замкнений скінчений елемент з поперечним перерізом у вигляді чотирикутника довільного обрису, що перетинається тріщиною (рис. 2).

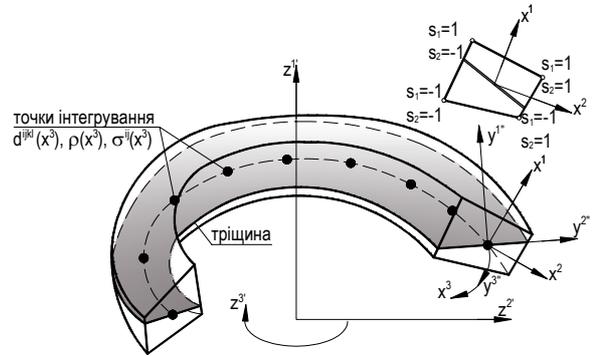


Рис. 2. Спеціальний кільцевий замкнений скінчений елемент з тріщиною

Для спеціальних скінчених елементів з тріщиною (ССЕТ) введемо ортогональну систему координат  $y^{i''}$  (див. рис. 2) таким чином, щоб  $y^{2''}$  проходила по дотичній до траєкторії тріщини, а  $y^{1''}$  – по нормалі і утворювала з додатнім напрямком осі  $z^{1'}$  кут  $\varphi$ . Вважається, що на берегах тріщини нормальні та дотичні напруження повинні дорівнювати нулю:

$$\sigma^{1'1'} = 0, \quad \sigma^{1'2''} = 0, \quad \sigma^{1'3''} = 0 \quad (11)$$

Необхідність виконання умов рівності нулю напружень на поверхні тріщини призводить до корекції тензора пружних констант:

$$\tilde{d}_*^{mnst} = \tilde{d}^{mnst} - \tilde{d}_p^{mnst} - \tilde{d}_c^{mnst} - \tilde{d}_q^{mnst} \quad (12)$$

Складники корегуючих членів тензора пружних констант обчислюються через коефіцієнти Ляме та тензори перетворень, які визначають зв'язок між базисною системою координат та системою координат тріщини:

$$d_p^{mnst} = \frac{2\mu}{1 + \frac{\lambda}{2\mu}} S^{mn} S^{st} \quad (13)$$

$$\text{де } S^{mn} = \frac{\lambda}{2\mu} g^{mn} + c_{1^n}^m c_{1^n}^n$$

$$d_c^{mnst} = \mu (r_{1^n}^{ns} r_{2^n}^{mt} + r_{1^n}^{ms} r_{2^n}^{nt} + r_{1^n}^{nt} r_{2^n}^{ms} + r_{1^n}^{mt} r_{2^n}^{ns}) \quad (14)$$

$$d_q^{mnst} = \mu (r_{1^n}^{ns} r_{3^n}^{mt} + r_{1^n}^{ms} r_{3^n}^{nt} + r_{1^n}^{nt} r_{3^n}^{ms} + r_{1^n}^{mt} r_{3^n}^{ns}) \quad (15)$$

$$c_{i^n}^m = c_k^m c_{i^n}^{k'}, r_{i^n}^{ms} = c_{(i^n)}^m c_{(i^n)}^s \quad (16)$$

$$c_{k'}^m = \partial x^m / \partial Z^{k'} \quad (17)$$

$$c_{i^n}^{k'} = \cos \beta, \beta \equiv (Z^{k'} \wedge y^{i^n}) \quad (18)$$

Важливою перевагою запропонованого підходу, заснованого на зміні відповідним способом механічних характеристик матеріалу, є те, що деформоване тіло з тріщиною апроксимується за допомогою повністю сумісних типів скінчених елементів. При цьому, обчислення коефіцієнтів ефективної матриці жорсткості спеціального скінченого елемента виконується по тим самим формулам, що і для звичайних СЕ, обмежуючись корекцією елементів матриць пружних сталей.

### Алгоритми визначення параметрів механіки руйнування в задачах динаміки

Визнаними основними параметрами механіки руйнування є коефіцієнт інтенсивності напружень та J-інтеграл Черепанова-Райса, які обчислюються на основі, так званих, прямих та енергетичних методів і мають однозначний зв'язок в межах лінійної механіки руйнування.

В даній роботі пропонується комбінація ССЕТ, як моделі із прямою корекцією тензора напружень звичайного СЕ, та алгоритму усереднення отриманих розв'язків по ефективній привершинній підобласті [1, 8, 9], що дозволяє зберегти регулярну структуру дискретної моделі і значно зменшити чисельні витрати:

$$K_\zeta^l(t) = \frac{1}{2} \left( \overset{\sigma}{K}_\zeta^l(t) + \overset{u}{K}_\zeta^l(t) \right) \quad (19)$$

$$\overset{\sigma}{K}_\zeta^l(t) = \frac{\overset{\sigma}{\sigma}_{i^n}^{j'n} \Psi_{1'}^l}{\overset{\sigma}{H}_\zeta^{i^n}{}^{j'n}(r, \theta)}, \overset{u}{K}_\zeta^l(t) = \frac{u_{i^n}^l \Psi_{1'}^l}{\overset{u}{H}_\zeta^{i^n}(r, \theta)} \quad (20)$$

де  $\overset{\sigma}{H}_\zeta^{i^n}{}^{j'n}(r, \theta)$ ,  $\overset{u}{H}_\zeta^{i^n}(r, \theta)$  – відомі функції асимптотичних формул компонент тензора напружень і переміщень в області вершини тріщини.

Координатні величини динамічних КІН визначаються за формулою:

$$K_\zeta(t) = \sum_{l=l_0}^L K_\zeta^l(t), \zeta = I, II, III \quad (21)$$

та використанням усереднення значень як за напруженнями, так і за переміщеннями по привершинній області 6×6 елементів.

Визначенню величини J-інтеграла на основі методу скінчених елементів присвячена численна кількість робіт. Ефективність запропонованих методик великою мірою залежить від мірності задачі, певних обмежень на форму і розміри області інтегрування. При цьому постають питання задоволення фундаментальним властивостям J-інтеграла: його інваріантності відносно області інтегрування та рівності нулю при інтегруванні по замкнутому контуру. Класична формула J-інтеграла має вигляд:

$$J_k = \frac{1}{\Delta_F} \int \left[ (W + T) n_k - \tilde{\sigma}^{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x^k} n_j \right] dF \quad (22)$$

$$K_I = \sqrt{J_I \hat{E}}, K_{II} = \sqrt{J_{II} \hat{E}}, K_{III} = \sqrt{2\mu J_{III}} \quad (23)$$

В роботах [1, 2] показано високу ефективність застосування нової методики (метод реакцій) обчислення J-інтеграла в задачах статки на основі величин, що безпосередньо входять до рівнянь методу скінчених елементів – вузлових реакцій та переміщень скінчено елементної моделі. Крім того, запропонований підхід задовольняє фундаментальним властивостям J-інтеграла. Для лінійних задач динаміки [9]:

$$J_k^l = \sum_{j=1}^{N_3} \frac{1}{2(\Delta x_\alpha)_j} \{u\}_{l_j}^T \{R\}_{l_j} - \sum_{j=1}^{N_1} \frac{1}{2(\Delta x_\alpha)_j} \{u\}_{l_j}^T \{R\}_{l_j} - \sum_{j=1}^{N_1} \left( \frac{(R_{l_q}^k + R_{l_q'}^k)(u_{l_q}^k - u_{l_q'}^k)}{2\Delta x_\alpha} \right)_j -$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=1}^{N_2} \left( \frac{(R_{lq}^k + R_{lq'}^k)(u_{lq}^k - u_{lq'}^k)}{2\Delta x_\alpha} \right)_j - \\
& - \sum_{j=1}^{N_3} \left( \frac{(R_{lq}^k + R_{lq'}^k)(u_{lq}^k - u_{lq'}^k)}{2\Delta x_\alpha} \right)_j - \\
& - \sum_{j=1}^{N_4} \left( \frac{(R_{lq}^k + R_{lq'}^k)(u_{lq}^k - u_{lq'}^k)}{2\Delta x_\alpha} \right)_j
\end{aligned} \quad (24)$$

$$J_k^{t+\Delta t} = \sum_{l=l_0}^L J_k^{l,t+\Delta t} \quad (25)$$

Вузлові реакції в задачах динаміки із стаціонарною тріщиною при використанні прямого метода інтегрування рівнянь руху будуть обчислюватись на основі виразу:

$$\{R\}_l^\tau = \{R_\sigma\}_l^{t+\Delta t} + \{\bar{R}_p\}_l^{t+\Delta t} - \{\bar{R}_p\}_l^t \quad (26)$$

де

$$\{R_\sigma\}_l^\tau = \left\{ \sum_{\beta=1}^2 [B_\beta]_{l\beta}^T \{\sigma_\beta\}_l^\tau + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 [B_\beta]_{l\alpha}^T \{\sigma_\beta\}_{\alpha l}^\tau \right\} \sqrt{g}$$

$$\{\bar{R}_p\}_l^{t+\Delta t} = a_0 [M]_{lm} \{U\}^{m,t+\Delta t}$$

$$\{\bar{R}_p\}_l^t = [M]_{lm} \left\{ a_0 \{U\}^{m,t} + a_2 \{\dot{U}\}^{m,t} + a_3 \{\ddot{U}\}^{m,t} \right\}$$

У випадку, коли динамічний розв'язок задачі базується на розкладі розшукуваного рішення по формам власних коливань конструкції:

$$\{R\}_l^\tau = \{R_\sigma\}_l^\tau + \{R_p\}_l^\tau \quad (27)$$

$$\text{де } \{R_\sigma\}_l^\tau = [K]_{lm} \{U\}_m^\tau; \quad \{R_p\}_l^\tau = -[\Lambda][M]_{lm} \{U\}_m^\tau$$

### Вірогідність та ефективність запропонованих алгоритмів в з задачах динаміки

Вірогідність обчислення параметрів механіки руйнування при апроксимації тріщини спеціальними СЕ для різних швидкостей навантаження об'єкту продемонстровано на прикладі пластини з центральною тріщиною, що знаходиться під дією змінного у часі рівнорозподіленого розтягуючого імпульсу тиску [10].

Розглянуто два випадки імпульсного навантаження: миттєво прикладений імпульс тиску, який зберігається на всьому часовому інтервалі дослідження (рис. 4), та у вигляді функції, що має профіль трикутника (рис. 5).

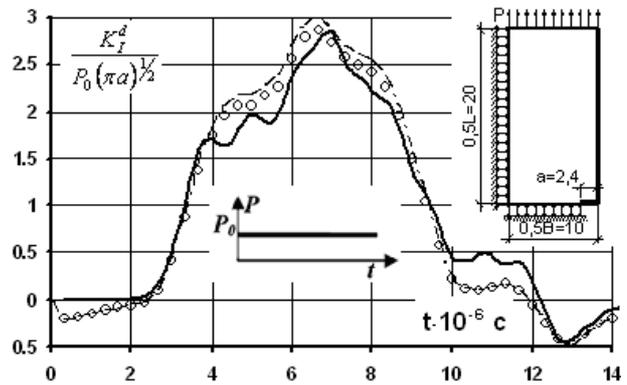


Рис. 4. Миттєво прикладений імпульс тиску

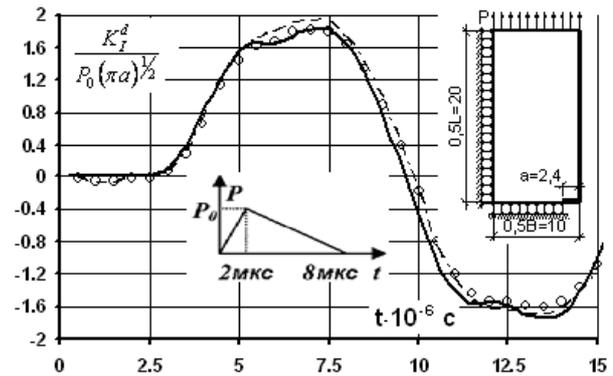


Рис. 5. Навантаження у вигляді функції, що має профіль трикутника

Графіки отримані в [10] показано кружками, за допомогою представленої методики – суцільною лінією, прямим методом – штрихпунктирною. Відмінність результатів, отриманих при використанні енергетичного методу (J-інтеграла) не перевищує 1,5...2% у порівнянні з [10], а величини ДКІН, визначені прямим методом, не перевищують 1% в області максимальних значень та 3% в областях розвантаження.

Аналіз впливу апроксимації тріщини спеціальними скінченими елементами на точність обчислення параметрів механіки руйнування проведено на прикладі розтягу квадратної пластини з центральною тріщиною [8].

Виконані дослідження точності обчислення параметрів руйнування із застосуванням як ССЕТ, так і СЕ, жорсткість яких дорівнює нулю. Отримані результати (рис. 6) вказують на перевагу використання ССЕТ (точність обчислень приблизно в два с половиною рази вища) на всьому діапазоні зміни розмірів сіткової області.

Для обґрунтування достовірності результатів, отриманих при розрахунку тіл обертання з кільцевими тріщинами, що перебувають під дією динамічного несиметричного навантажен-

ня, вирішена задача про динамічний згин тонкостінного циліндра з кільцевою тріщиною.

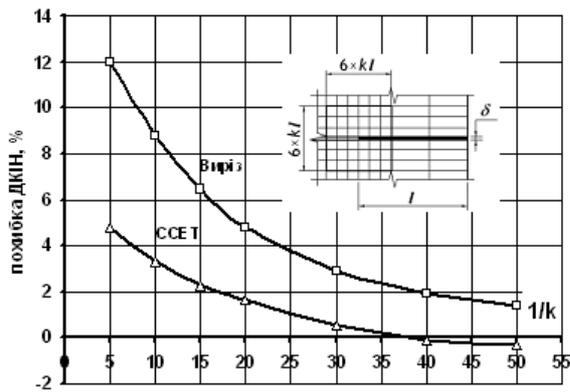


Рис. 6. Дослідження збіжності ДКІН за розмірами СЕ

На першому етапі запропоновано результати статичного розрахунку моделі, що характеризують залежність максимальних по окружній координаті КІН від відносної довжини тріщини  $\delta = 2L_{cr} / (D - d)$  (рис. 7).

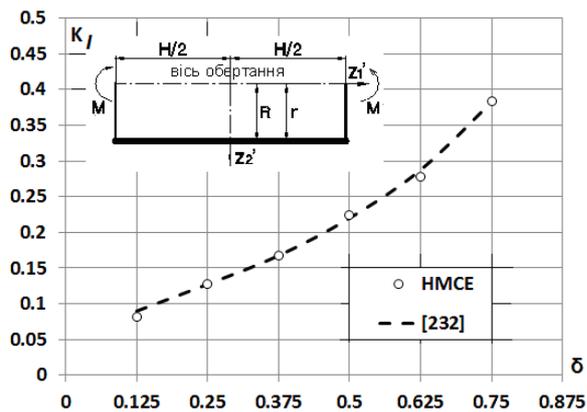


Рис. 7. Графік зміни максимальних значень КІН

Спостерігається добра узгодженість значень КІН з отриманими в роботі [3].

На другому етапі досліджень розглядалась задача динаміки з навантаженням у вигляді миттєво прикладеного імпульсу тиску.

Як видно з графіків зміни КІН у часі (рис. 8) спостерігається гарна узгодженість результатів, які отримані на основі прямого та енергетичного методів.

На рис. 9 відображається розподілення динамічного КІН вздовж твірної циліндра для різних відносних довжин тріщини.

### Висновки

Таким чином, на основі напіваналітичного методу скінчених елементів розроблена ефективна методика дослідження перехідних процесів динамічного деформування просторових тіл

обертання з тріщинами. В процесі досліджень застосовувалися нові типи спеціальних скінчених елементів, що апроксимують тріщину, та нова методика (метод реакцій) визначення J-інтеграла з урахуванням інерційних сил. Вірогідність отриманих результатів і ефективність підходу підтверджені розв'язанням контрольних прикладів.

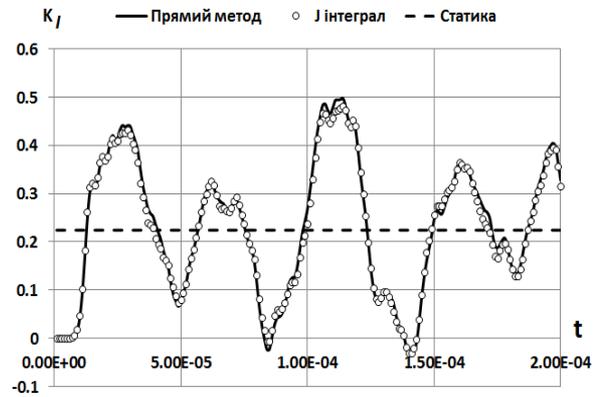


Рис. 8. Еволюція ДКІН у часі

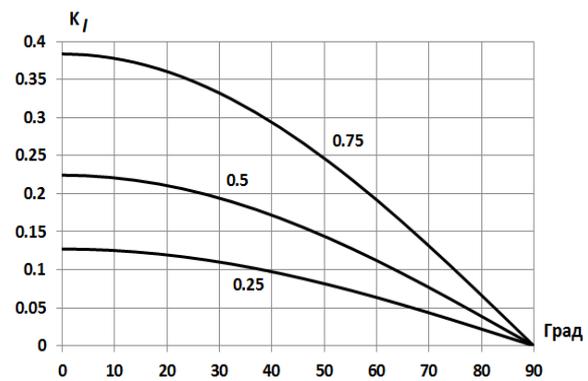


Рис. 9. Розподілення ДКІН по твірній

### БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування простових тіл [Текст]: монографія / В. А. Баженов, О. І. Гуляр, С. О. Пискунов, О. С. Сахаров. – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
2. Баженов, В. А. Особливості визначення J-інтеграла в дискретних моделях метода скінчених елементів [Текст] / В. А. Баженов і ін. // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. зб. – К.: КНУБА, 2005. – № 76. – С. 86-97.
3. Баженов, В. А., Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел [Текст] / В. А. Баженов, А. И. Гуляр, А. С. Сахаров, А. Г. Топор. – К.: Випол, 1993 – 376 с.
4. Баженов, В. А. Алгоритми розв'язання рівнянь рівноваги для динамічних задач напіваналітичним методом скінчених елементів [Текст] / за ред. В. А. Баженова // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. зб. – К.: КНУБА, 2005. – № 76. – С. 86-97.

- рія споруд: наук.-техн. зб. – К.: КНУБА, 2006. – Вип.79. – С.43-62.
5. Сахаров, А. С. Моментная схема конечных элементов МСКЭ с учетом жестких смещений [Текст] / А. С. Сахаров // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1974. – Вып.24. – С.147-156.
  6. Сахаров, А. С. Метод конечных элементов в механике твердых тел [Текст] / А. С. Сахаров и др. – К.: Вища школа, 1982. – 479 с.
  7. Солодей, І. І. Ефективність скінченоелементної бази напіваналітичного метода скінчених елементів для апроксимації тіл обертання та призматичних тіл в задачах динаміки [Текст] / І. І. Солодей // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. зб. – К.: КНУБА, 2008. – Вип. 82. – С. 154-163.
  8. Солодей, І. І., Розв'язання нестационарних задач механіки руйнування на основі апроксимації тріщини спеціальними скінченими елементами [Текст] / І. І. Солодей, М. О. Вабіщевич, О. І. Гуляр // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. зб. – К.: КНУБА, 2009. – № 85 – С. 86-97.
  9. Солодей, І. І. Обчислення коефіцієнта інтенсивності напружень в нестационарних задачах динаміки просторових тіл на основі енергетичного підходу [Текст] / І. І. Солодей і ін. // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. зб. – К.: КНУБА, 2009. – № 84. – С. 86-97.
  10. Yang, Z. J., Transient Dynamic Fracture Analysis Using Scaled Boundary Finite Element Method [Текст]: a Frequency-Domain Approach / Z. J. Yang, A. J. Deeks, H. Hao // Engineering Fracture Mechanics 74, 2007. – P. 669-687.

Надійшла до редколегії 28.04.11.

Прийнята до друку 12.05.2011.