УДК 629.42.05

В. В. ЛАГУТА (ДІІТ)

ТЯГОВІ РОЗРАХУНКИ НА МНОЖИНІ ПАРЕТО ЗА ДВОМА ПОКАЗНИКАМИ

Задача тягових розрахунків розглядається як задача про розподіл ресурсу у векторній постановці. Рішення ґрунтується на динамічному програмуванні з використанням безлічі точок оптимальних за Парето значень цільової функції (енергія, час).

Ключові слова: оптимальні тягові розрахунки, динамічне програмування, векторна оптимізація в тягових розрахунках, ефективні траєкторії руху поїзда

Задача тяговых расчетов рассматривается как задача о распределении ресурса в векторной постановке. Решение основывается на динамическом программировании с использованием множества точек оптимальных по Парето значений целевой функции (энергия, время).

Ключевые слова: оптимальные тяговые расчеты, динамическое программирование, векторная оптимизация в тяговых расчетах, эффективные траектории движения поезда

The problem of train traction calculations is considered as the one of resource allocation in a vector formulation. The solution is based on dynamic programming using a set of points of the optimal Pareto objective function values (energy, time).

Keywords: optimum traction calculations, dynamic programming, vector optimization in traction calculations, effective paths of train motion

Тягові розрахунки дозволяють вирішувати численні практичні задачі, що виникають при проектуванні та експлуатації залізниць.

На залізничному транспорті методи розробки тягових розрахунків і необхідні для їх виконання нормативи регламентуються Правилами тягових розрахунків (ПТР) для поїзної роботи [1 – 6].

Для математичного формулювання задачі необхідно враховувати фізичну суть явищ, що супроводжують процес руху поїзда, основні прийоми та способи тягових розрахунків. У більшості випадків тягові розрахунки вимагають оперативності їх проведення.

Сьогодні найактуальнішою проблемою є проблема економії енергоресурсів. У той же час необхідно вантаж доставляти під час, а в багатьох випадках – в найкоротші терміни.

Запропонований підхід стосовно рішення задачі оптимальних тягових розрахунків розглядається як багатостадійний процес прийняття рішень. На кожній стадії необхідно прийняти рішення так, щоб його результат був оптимальним з точки зору всього процесу. В задачі стадіями є інтервали путі. Задача управління швидкістю і часом руху сформульована в термінах динамічного програмування.

Метою роботи є розробка прогнозу результатів і формування рекомендацій по можливим впливам на процес руху поїзда з метою ведення його в оптимальних умовах стосовно енергії і часу. Розробка чисельного методу оптимальних тягових розрахунків з використанням векторної оптимізації для двох показників.

Актуальність

Одним з радикальних способів, що забезпечує стійкість на ринку надання транспортних послуг, є економія енергоресурсів. Залізнична мережа України зливається з залізницями Росії, Білорусії, Польщі, Чехословаччини, Румунії та ін. Географічне розташування України має великий потенціал до транзитних перевезень. Незважаючи на істотне зниження обсягів перевезень, умови роботи залізничних підприємств України залишаються важкими і це в першу чергу пов’язано із щорічним зростанням цін на енергоносії. Значна частка використання енергії припадає на забезпечення тяги поїздів. Проблемі економії енергоресурсів приділяється постійна і пильна увага у всіх галузях промисловості і не тільки на транспорті.

Сьогодні важливою проблемою є створення компромісно-оптимальних режимів тяги поїздів для показників споживання та часу доставки вантажу. Вартісні показники ефективності руху поїздів вимагають нових підходів до розробки методів оптимального розрахунку режимних карт ведення поїздів. Для аналізу доцільності переходу на режими руху, оптимальні за вартістю електроенергії, необхідно виконати дослідження ефективних для вектора показників:

– витрати електроенергії;

– вартості електроенергії при заданому обсязі перевезень;

– графік руху.

Ефективні (компромісно-оптимальні) режими представляють набір умовно-оптимальних режимів руху (або ж дільничних швидкостей), які застосовуються залежно від заданої переваги характеристик векторної цільової функції [7].

Аналіз літературних джерел

Дослідження в області оптимізації управління тягою транспортних засобів початі ще Охоцимським («К теории движения ракет», 1946 г.). Практичні застосування теорії оптимального керування почались після виходу робіт Л. С. Понтрягіна [8], Болтянського [9], Беллмана [10].

В розвиток теорії тяги поїздів внесли А. М. Бабичков, В. Ф. Єгорченко, Д. А. Штанге, Д. К. Мінов, І. П. Ісаєв та інші. Динаміка тяги розвивалась в роботах С. А. Чаплигіна, В. А. Лазаряна, Н. А. Панькіна, В. В. Дєєва, Є. П. Блохіна, А. А. Босова, Г. К. Гетьмана.

Характерною особливістю робіт за оптимальними тяговими розрахунками є пристосування схем і методів до обчислювальної техніки. В основу багатьох алгоритмів покладено принцип Беллмана. Експериментальні розрахунки сьогодні дозволили накопичити певний досвід з оптимізації.

Одним з напрямів впровадження методів управління на транспорті, є розробка таких обчислювальних систем, які дозволяли б оптимально управляти поїздом, як в замкнутому циклі (автоматичне керування), так і в режимі рекомендацій (підказок). Практика показала, що для більшої ефективності необхідно розробити досить дієві математичні методи розв’язання задач оптимальних тягових розрахунків, на підставі яких можна було б розробити ті чи інші алгоритми для конкретних інженерних задач, з наступним уточненням і доробкою на реальних процесах керування поїздами або в системах управління. Дана проблема висвітлена в роботах [11 – 14].

У роботах Костроміна А. М. [15 – 17] використовується як класичне варіаційне числення, так і методи математичної теорії оптимального управління, що з’явилися у фундаментальних працях Понтрягіна і Беллмана. Проблема оптимальних режимів управління локомотивом розглядається як інженерне завдання. В основу методів рішення покладений в більшості випадків принцип максимуму.

Роботи [18 – 20] присвячені, в основному, розробці методів оптимізації режимів водіння поїздів, заснованих на використанні сучасної математичної теорії управління і обчислювальних засобів. Критерієм оптимальності в більшості виконаних робіт служить мінімум витрат енергії на тягу поїздів, хоча зустрічається також застосування інших показників ефективності організації перевізного процесу, наприклад час руху поїзда по ділянці, що використовується в задачах на швидкодію або точність виконання заданого часу ходу і т.п. Проте незалежно від прийнятого критерію і параметра оптимізації задача вибору оптимальних режимів водіння поїзда розглядалися в однокритеріальній постановці.

Застосування методів векторної оптимізації до вирішення двокритеріальної задачі оптимізації тягових розрахунків викладені в роботах [21 – 23]. У роботах досліджується рішення двокритеріальних задач методом векторної оптимізації. Для аналізу можливих шляхів вирішення використовується метод параметризації, проводиться аналіз завдання тягових розрахунків як завдання векторної оптимізації. Запропонований метод оптимізації ґрунтується на якісному дослідженні режимів руху на елементарному відрізку колії. До недоліків можна віднести відсутність чисельних методів векторної оптимізації орієнтованих до використання обчислювальної техніки що реалізують даний метод.

1. Постановка задачі

Розглядається задача, яка змістовно відома як задача оптимальних тягових розрахунків. Величини $f(s)$, $t(s)$ – показники, що відображають перевізний процес і являють собою витрати енергоресурсів (електроенергія, паливо) і часу на доставку вантажу;

s – координата колії. Поїзд розглядається як тверде тіло з масою зосередженої в його центрі. Рівняння руху потягу враховуються як в [24].

Вважаються заданими:

– поздовжній профіль колії;
– обмеження швидкості по колії проходження;
– маса поїзда;
– тип вагонів, навантаження на вісь;
– маса електровоза;
– тягові характеристики електровоза;
– обмеження часу проходження;
– початкова і кінцева швидкість;
– довжина ділянки колії.

З точки зору витрат енергоресурсів на рух виникає задача про побудову закону керування потягом, де критерієм оптимальності є витрата енергоресурсів. Критичним залишається вимога витрат часу на проходження поїзда для даної ділянки.

Нехай s – координата колії, $0 \le s \le l$;

l – довжина ділянки колії (значення кінцевої координати ділянки);

$v(s)$ – швидкість руху поїзда;

$f(v(s))$ – витрати енергоресурсів;

$t(v(s))$ – функція витрат часу в залежності від обраної швидкості руху;

$\overline{T}$ – час руху по ділянці.

Задача на оптимальне управління рухом поїзда з мінімальною витратою енергії коротко можна сформулювати так: знайти таке допустиме управління $v(s)$, при якому відповідний витрат енергоресурсів був би мінімальним і виконувався графік руху на даній ділянці.

Зазвичай задача оптимального управління руху поїзда з мінімальним витратами енергоресурсів має вигляд

$$\min_{v(s)} f(s) \qquad (2)$$

за умови

$$t(v(s)) = \overline{T}\ , \quad 0 \le s \le l\ . \qquad (3)$$

Управлінням є швидкість руху.

Модель (2)–(3) враховує не всі обмеження. Необхідно при розрахунках ще врахувати й інші чинники: початкову та кінцеву швидкість, характеристики локомотива (обмеження на питому дотичну силу, обмеження на питому гальмівну силу, ККД й ін.), обмеження швидкісного режиму, перегрів тягового двигуна.

Пом’якшимо жорстку умову щодо часу проходження (3) і замість рівності (2) будемо розглядати обмеження

$$t(v(s)) \le \overline{T}\ , \quad 0 \le s \le l\ . \qquad (3')$$

Модель (2)–(3′) є неперервною. Для побудови схеми розв’язку задачі перейдемо до відповідної дискретної моделі.

Розіб’ємо ділянку колії $0 \le s \le l$ на N елементарних ділянок $\{[s_{j-1}, s_j]\}$, $j = 1, \ldots, N$. У точках розбиття s_j швидкість $v = v(s_j)$ може приймати кінцеву безліч значень V_j, $j = 1, \ldots, N$:

$$V_j = \{v_i(s_j)\}\ , \quad i = 1 \ldots m_j\ ,$$

де m_j – кількість елементів у множині V_j.

Величина m_j визначається обмеженнями на швидкість руху в точці s_j та у спосіб дискретизації $v(s_j)$ (регулярний крок розбиття, нерегулярний крок розбиття, величина кроку розбиття). Залежно від вибраної швидкості руху $v \in V_j$ в точці розбиття колії s_j елементарна ділянка $[s_{j-1}, s_j]$ може бути прослідувана за час $t_j = t(V_j)$ – невід’ємна величина, при цьому витрати енергоресурсів складуть $f_j = f(V_j)$ – також невід’ємна величина. Витрати енергоресурсів на ділянці $0 \le s \le l = s_N$ являють собою суму всіх витрат на елементарних ділянках. Витрати часу для $0 \le s \le l = s_N$ представляють суму часу відповідних встановленому енергоресурсу на елементарних ділянках. Інакше, функція витрат енергоресурсів і функція витрат часу є адитивні функції, визначені на кінцевих множинах V_j.

Потрібно вибрати такий режим руху потягу v_k, $k = 0 \ldots N$ (v_0 и v_N надані), при якому сумарні витрати енергоресурсів були б мінімальними, і при цьому загальні витрати часу не виводили з встановленого графіка руху (сумарні витрати часу не перевершували заданої величини $\bar{T}$).

Розглянута задача про оптимальний рух поїзда з мінімальними витратами енергоресурсів (2)–(3′) є канонічною задачею про розподіл ресурсу [25, 26]. Для її рішення пропонується схема методу динамічного програмування. Замість рекурентних рівнянь використовується покрокове обчислення безлічі точок, оптимальних за Парето, на площині значень цільової функції й ресурсу.

У прийнятих позначеннях формальна постановка задачі запишеться так. Знайти мінімум суми:

$$\sum_{j=1}^{N} f_j(v_i), \quad v_i \in V_j, \quad j = 1 \ldots N \tag{4}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{N} t_j(v_i) \le \bar{T}, \quad v_i \in V_j, \quad j = 1 \ldots N. \tag{5}$$

Передбачається, що безліч (5) допустимих рішень не порожня.

2. Схема динамічного програмування

Задача (4)–(5) представляє собою відому задачу оптимального розподілу ресурсу, для вирішення якої використовується метод динамічного програмування [11, 12]. Наведемо основні співвідношення цього методу. Позначимо через $B_j(u)$ оптимум наступної задачі: знайти мінімум суми

$$\sum_{k=1}^{j} f_k(v_k)$$

при обмеженнях $\sum_{i=1}^{j} t_i(v_i) \le u \quad v_i \in V_i, \ j = 1 \ldots N$,

де j приймає значення $1, \ldots, N$, $0 < u \le \bar{T}$. Очевидно, величина $B_N(\bar{T})$ дорівнює оптимуму вихідної задачі (4), (5). Її розрахунок проводиться за рекурентним рівнянням

$$\begin{cases} B_j(u) = \min\limits_{v_j \in V_j \setminus t_j(v_j) \le u} \left\{ B_{j-1}[u - t_j(v_j)] + f_j(v_j) \right\} \\ 0 < u \le \bar{T} \quad j = 1, \ldots, N. \end{cases} \tag{6}$$

При такій організації обчислень необхідно покласти $B_0(u) = +\infty$, $0 < u \le \bar{T}$, і $B_j(u) = 0$, якщо мінімум в (6) береться по порожній безлічі.

При великих значеннях $\bar{T}$ і N розрахунок з використанням рівнянь (6) вимагає значного обсягу пам'яті і часу рахунку. Нижче пропонується підхід, який дозволяє істотно заощаджувати обчислювальні ресурси.

На площині двох змінних введемо відношення часткового порядку

$$(x, y) \prec (z, w) \Leftrightarrow x \le y, \quad z \le w.$$

Нехай A – деяка безліч точок на площині. Точки з A, мінімальні щодо часткового порядку, називають оптимальними за Парето або просто паретовськими. Розглянемо безліч точок вигляду

$$F = \sum_{i=1}^{j} f_i(v_i), \quad T = \sum_{i=1}^{j} t_i(v_i),$$

де вектор $(v_1, v_2, \ldots, v_j)$ пробігає всі значення, що задовольняють умовам

$$\sum_{i=1}^{j} t_i(v_i) \le \bar{T}, \quad v_i \in V_i, \quad i = 1 \ldots j.$$

Сукупність паретовських точок цієї множини позначимо через S_j. З кількох рівних паретовських точок у безліч S_j включається тільки одна. Позначимо через $\left(F_{jk}, T_{jk}\right)$, $k = 1, \ldots, K_j$ точки безлічі S_j, нумеруючи їх за зростанням координат, тобто

$$F_{j1} < F_{j2} < \ldots F_{jK_j}, \quad T_{j1} < T_{j2} < \ldots T_{jK_j}.$$

Неважко бачити, що $B_j(T_{jk}) = F_{jk}$, $k = 1, \ldots, K_j$. Функція $B_j(u)$ є неспадною по аргументу u при даному j. Її графік складається з ділянок постійності і точок зростання, які і складають безліч S_j. Таким чином, безліч S_j містить всю необхідну інформацію про функції в мінімальному обсязі.

Безлічі S_j, $j = 1, \ldots, N$ перераховуються по кроках, аналогічно рівнянням (6). На початковому кроці вважаємо $S_0 = \{(0,0)\}$. Опишемо спільний крок. Нехай вже побудовано безліч

$$S_{j-1} = \left\{ F_{j-1,k}, T_{j-1,k}, \quad k = 1, \ldots, K_{j-1} \right\}.$$

Розглянемо безліч точок (F,T) вигляду

$$F = F_{j-1,k} + f_j(v_j)\ , \quad T = T_{j-1,k} + t_j(v_j)\ ,$$

де $k = 1,\ldots,K_{j-1}$, а змінна v_j пробігає всі значення, що задовольняють умовам:

$$T_{j-1,k} + t_j(v_j) \le \overline{T}\ , \quad v_j \in V_j\ .$$

Виділяючи з цієї множини паретовські точки і залишаючи з рівних точок тільки одну, отримуємо безліч

$$S_j = \left\{ \left(F_{j,k}, T_{j,k} \right), \quad k = 1,\ldots,K_j \right\}.$$

Цей процес завершується побудовою безлічі

$$S_N = \left\{ \left(F_{N,k}, T_{N,k} \right),\ k = 1,\ldots,K_N \right\}.$$

Величина F_{NK_N} дорівнює оптимуму початкової задачі. Відповідне вказаному оптимуму значення T_{NK_N} є витратами часу. Тут використано таку властивість рішення: перспективні пари (F,T) утворюють безліч Парето, а всі інші можна видалити (але можна і залишити). У реальній реалізації представленого алгоритму попередньо виділяються для кожного значення індексу $j = 1,\ldots,N$ паретовські точки безлічі

$$\left\{ f_j(v_j), t_j(v_j)\ , v_j \in V_j \right\}$$

і використовуються в розрахунках тільки вони.

Якщо перспективні пари (F,T) не вилучати, то серед безлічі пар (F,T) можна знайти такі, які оптимізують час. У самому сприятливому випадку серед безлічі паретовських пар можна вибрати найбільш підходящі до умов графіку руху за витратами часу та енергоресурсів.

Ефективним рішенням багатокритеріальної задачі називають оптимальне по Парето рішення [27]. Пошук ефективного рішення називають ще програмуванням на множині Парето. Чисельна реалізація методу динамічного програмування на множинах Парето дозволяє застосовувати обмеження на використання ресурсу.

Наведемо приклад пошуку ефективних траєкторій по Парето. Процедуру побудови ефективного рішення надамо для багатостадійного процесу, що моделюється графом (рис. 1), аналогічному топології сітки, яка використовується при оптимальних тягових розрахунках з допомогою динамічного програмування. Граф (сітка) відображає процес руху від стадії D_k до D_{k+1}, $k = 1,\ldots,11$ (відрізок путі $[D_k, D_{k+1}]$) і змін стану (від швидкості v_i до швидкості v_j) в напрямках, що задані стрілками (дуги). Процеси переходу від однієї стадії руху до іншої характеризується парами (e,t), де e – витрати енергії при переході від швидкості v_i до швидкості v_j, t – відповідні витрати часу для подолання відрізку путі $[D_k, D_{k+1}]$. Формально можна сказати, що кожній дузі графа поставлено відповідно пару чисел (вектор). Для наданого графа необхідно визначити оптимальні траєкторії по Парето (ефективні траєкторії), що ведуть з початкової вершини v_1 до кінцевої v_{12} на множені паретовських точок $(\overline{e}_p, \overline{t}_p)$, що характеризують процес руху.

На графі в кожній вершині проставлено незрівнянні по Парето варіанти, які вказують напрямок руху (зміни станів для кожної стадії) з даної вершини в початок путі (покажчик на попередню вершину $\to v_m$) і які витрати енергії $\overline{e}$ и ресурсу часу $\overline{t}$ при цьому будуть.

Оптимальні по Парето траєкторії на графі виділено товстими лініями. Процедура оптимізації проводилася ручними розрахунками і з допомогою розробленого програмного забезпечення. Для наданого прикладу ефективними траєкторіями є:

- перша траєкторія проходить через послідовність вершин

$$v_1 \to v_2 \to v_4 \to v_9 \to v_{11} \to v_{12}\ ,$$

відповідні витрати енергії $\overline{e}_{12} = 7$, часу $\overline{t}_{12} = 7$;

- друга траєкторія проходить через послідовність вершин

$$v_1 \to v_3 \to v_5 \to v_9 \to v_{11} \to v_{12}\ ,$$

відповідні витрати енергії $\overline{e}_{12} = 6$, часу $\overline{t}_{12} = 10$.

Даний приклад несе тільки демонстративний характер. Показники процесу (e,t) і кількість вершин в графі вибрано випадково. Задачі тягових розрахунків відповідає лише топологія графу.

Слід зазначити, що в випадку не виконання обмеження на ресурс часу $\overline{t} < T$ (взагалі якогонебудь ресурсу), така траєкторія не розглядається, Стосовно прикладу, якщо мається обмеження $t < 9$, друга траєкторія до розгляду як ефективна не береться.

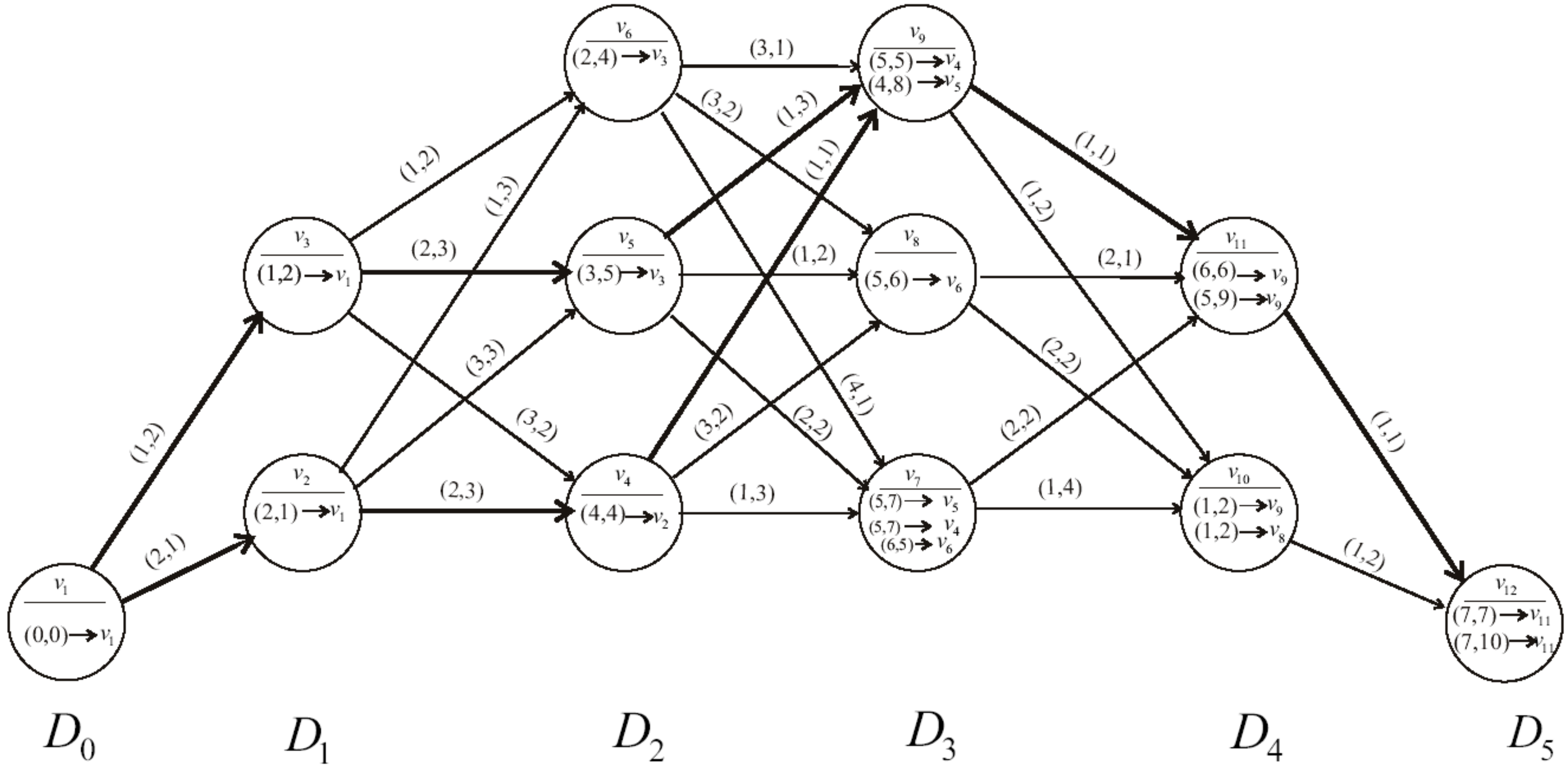

Рис. 1. Граф багатостадійного процесу задачі тягових розрахунків. Ефективні траєкторії процесу.

– Парето-оптимальні (ефективні) траєкторії руху; v_i – швидкість руху; (e, t) – показники руху при переході зі стану v_i в стан v_j; D_k – стадії руху; $(\overline{e}, \overline{t}) \to v_m$ – покажчик (зворотний) руху по «паретовській» траєкторії та відповідні значення витрат енергії $\overline{e}$ і часу $\overline{t}$ в напрямку початкової вершини v_1

Висновки

Задача на оптимальне управління рухом поїзда з мінімальною витратою енергії та обмеженням часу можна звести до задачі оптимального розподілу ресурсу, для вирішення якої використано метод динамічного програмування на сукупності паретовських точок безлічі пар $(F, T) = (енергія, час)$. Рішення, засноване на паретовських точках, не єдине. На безлічі рішень по Парето вибирається одне, що найбільш підходить за компромісом щодо організації перевізного процесу для даної ділянки.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Подвижной состав и тяга поездов [Текст] / под ред. Н. А. Фуфрянского и В. В. Деева. – М.: Транспорт, 1979.
2. Правила тяговых расчётов для поездной работы [Текст]. – М.: Транспорт, 1985.
3. Справочник по тяговым расчётам [Текст] / П. Т. Гребенюк [и др.]. – М.: Транспорт, 1987.
4. Подвижной состав и тяговое хозяйство железных дорог [Текст] / под ред. А. П. Третьякова. – М., 1971.
5. Кокурин, И. М. Эксплуатационные основы устройств железнодорожной автоматики и телемеханики [Текст] / И. М. Кокурин, Л. Ф. Кондратенко. – М.: Транспорт, 1989.
6. Тяговые расчёты [Текст]: методические указания к курсовому проектированию / под ред. Ю. Н. Ликратова. – Новосибирск, 1989.
7. Рекомендации по обеспечению энергооптимального процесса перевозок на основе информационных технологий управления системами электрической тяги: решение комиссии ОСЖД от 30 октября 2003 г. [Текст].
8. Математическая теория оптимальных процессов [Текст] / Л. С. Понтрягин [и др.]. – М.: Наука, 1983. – 392 с.
9. Болтянский, В. Г. Математические методы оптимального управления [Текст] / В. Г. Болтянский. – М.: Наука, 1966. – 307 с.
10. Беллман, Р. Динамическое программирование [Текст] / Р. Беллман. – М.: ИЛ, 1960. – 400 с.
11. Ковальський, А. Н. Система автоматического управления поездом метрополитена (САУ-М) и ее модернизация [Текст] / А. Н. Ковальский // Тр. МИИТ. – 1968. – Вып. 276. – С. 3-13.
12. Система автоведения пассажирского поїзда [Текст] / Е. В. Ерофеев [и др.] // Тр. МИИТ. – Вып. 492. – С. 3-10.
13. Гаккель Е. Я. Автомашинист для грузового тепловоза [Текст] / Е. Я. Гаккель // Тр. ЛИИЖТ. – 1964. – Вып. 232. - С. 3–8.
14. Зимарьков, Б. Д. Локомотивом управляет автомат [Текст] / Б. Д. Зимарьков // Электрическая и тепловозная тяга. – 1973. – № 7. – С. 21-22.
15. Костромин, А. М. Методы определения оптимальных режимов вождения поездов [Текст] / А. М. Костромин. – Гомель: БелИИЖТ, 1974. – 43 с.
16. Костромин, А. М. Об интегрировании уравнений движения поезда и расчете оптимальной траектории [Текст] / А. М. Костромин // Тр. БелИИЖТ. – 1974. – Вып. 132. – С. 3-11.
17. Костромин, А. М. Об оптимальном управлении локомотивом при электрической тяге [Текст] / А. М. Костромин // Тр. БелИИЖТ. – Вып. 156. – 1977. – С. 3-23.
18. Погосов, В. Ю. Прогнозирование расхода электроэнергии на тягу поездов с учетом выброса параметров грузовых поездов и условий эксплуатации [Текст] : автореф. дис. … канд. техн. наук: 05.09.93 / В. Ю. Погосов. – М.: МИИТ, 1990. – 23 с.
19. Гетьман, Г. К. Определение оптимальной по минимуму расхода энергии на движение поезда мощности локомотива [Текст] / Г. К. Гетьман // Вісник ХарДАЗТ. – Х., 2000. – Вип. 39. – С. 41-48.
20. Беляев, А. В. Алгоритм оптимального по расходу электроэнергии управления движения поезда [Текст] / А. В. Беляев, А. Г. Вольвич, Н. Ю. Федорова // Сб. науч. тр. Всерос. научн.-иссл. и проектно-конструкт. ин-та электровозостр. – М., 1998. – № 39. – С. 160-169.
21. Босов, А. А. Векторная оптимизация в задачах тяговых расчетов [Текст] / А. А. Босов, Г. К. Гетьман // Вісник Харківського держ. політехн. ун-ту. – Вип. 73. –Х.: ХДПУ, 1999. – С. 23-27.
22. Гетьман, Г. К. Применение векторной оптимизации для решения задачи тяговых расчетов / Г. К. Гетьман // Вісник Харківського держ. політехн. ун-ту. – Вип. 62. – Х.: ХДПУ, 1999. – С. 12-19.
23. Босов, А. А. Параметризация в задачах векторной оптимизации [Текст] / А. А. Босов, Г. К. Гетьман // Транспорт: зб. наук. пр. – Вип. 5. – Д.: Наука і освіта, 2000. – С. 62-65.
24. Тяга поездов [Текст] / В. В. Деев [и др.]. – М.: Транспорт, 1987.
25. Беллман, Р. Прикладные задачи динамического программирования [Текст] / Р. Беллман, Дрейфус. – М.: Наука, 1965. – 458 с.
26. Вентцель, Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология [Текст] / Е. С. Вентцель. – М.: Дрофа, 2004. – 208 с.
27. Подиновский, В. В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач [Текст] / А. В. Подиновский, В. Д. Ногин. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

Надійшла до редколегії 11.05.2011.
Прийнята до друку 19.05.2011.