

УДК 004.92:[530.191:514.7]

В. І. ШИНКАРЕНКО^{1*}, В. О. МАСЛЮК^{2*}, А. В. СТАДНІК^{3*}

^{1*}Каф. «Комп'ютерних інформаційних технологій», Український державний університет науки і технологій, ННІ ДІТ, вул. Лазаряна, 2, Дніпро, Україна, 49010, тел. +38 (056) 373 15 35, ел. пошта shinkarenko_vi@ua.fm, ORCID 0000-0001-8738-7225

^{2*}Каф. «Комп'ютерних інформаційних технологій», Український державний університет науки і технологій, ННІ ДІТ, вул. Лазаряна, 2, Дніпро, Україна, 49010, тел. +38 (056) 373 15 35, ел. пошта viramasluk843@gmail.com, ORCID 0009-0008-4658-9806

^{3*}Каф. «Комп'ютерних інформаційних технологій», Український державний університет науки і технологій, ННІ ДІТ, вул. Лазаряна, 2, Дніпро, Україна, 49010, тел. +38 (056) 373 15 35, ел. пошта a.v.stadnik@ust.edu.ua, ORCID 0009-0002-9907-1740

Визначення фрактальної розмірності часткових геометричних фракталів

Мета. Дослідження спрямовано на визначення залежності фрактальної розмірності часткових геометричних фракталів від ступеня спотворення структури фракталу. Такий аналіз є важливим для розуміння поведінки складних об'єктів у випадку часткового порушення властивості самоподібності, що часто трапляється у реальних задачах комп'ютерної графіки, моделювання природних процесів, біомедичних зображень та аналізу матеріалів. **Методика.** У дослідженні використано методику побудови фракталів на основі L-систем з проміжним мультисимвольним представленням із підсівом дефектів шляхом випадкового видалення певного відсотка символів зі сформованої послідовності. Аналіз здійснювався за допомогою методу box-counting: фрактальна структура багаторазово покривалася квадратною сіткою зі змінною довжиною сторін квадратів, після чого визначалась кількість квадратів, необхідних для покриття фігури. Фрактальна розмірність визначалася через логарифмічну залежність між кількістю квадратів і довжиною сторони квадратів (метод нахилу прямої на логарифмічному графіку). Графічні зображення фракталів зберігалися у форматі BMP з високою роздільною здатністю для мінімізації похибок, спричинених растріванням. Для підвищення достовірності кожна структура аналізувалася шляхом десятиразового повторного покриття сіткою зі змінними параметрами. **Результати.** Запропонована методика була апробована на відомих геометричних фракталах: сніжинка Коха, квадратний острів Коха, крива Серпінського, крива дракона, крива Леві без спотворень. Для них отримане значення фрактальної розмірності узгоджується з теоретичним. Для цих фракталів була визначена залежність фрактальної розмірності від ступеня пошкодження (відсотка видалених елементів). Зокрема, зі зростанням кількості дефектів, як правило, спостерігається зменшення значення фрактальної розмірності, що свідчить про втрату самоподібності та спрощення геометричної структури. Такі результати дозволяють кількісно описати процес деградації фрактальних структур та встановити критичні межі стійкості самоподібності. **Наукова новизна** роботи полягає у визначенні нових об'єктів дослідження, а саме часткових геометричних фракталів. Отримані нові дані про ступінь самоподібності часткових фракталів з різним ступенем пошкодження. **Практична значимість** полягає у можливості використання отриманих результатів у комп'ютерній графіці, обробці зображень, створенні 3D-моделей, а також у матеріалознавстві та інших науках, де важливе врахування складності та структури матеріалів. Результати роботи розширюють сучасні підходи до аналізу фрактальних структур і пропонують нові методи їхнього дослідження та застосування.

Ключові слова: фрактальна розмірність; фрактал; L-системи (Lindenmayer system); об'єктно-орієнтоване програмування; програмне забезпечення; інформаційні технології.

Вступ

Вивчення фракталів набирає популярності у різних наукових сферах. Фрактальні моделі знаходять застосування не лише в природних системах, а й у таких галузях, як економіка, медицина, хімія, логістика тощо. У комп'ютерних

науках фрактали активно використовуються для створення графіки в іграх та програмах для обробки зображень. Оптимізація цифрової графіки та роботи із зображеннями, включно з 3D-моделями, є важливим напрямом дослідження фракталів [5, 12–13].

Фрактали – це математичні структури, які характеризуються самоподібністю і мають дробове значення розмірності [2–4]. У складних структурах ідеальна самоподібність може бути відсутньою, що обумовлює необхідність вивчення часткових фракталів. Часткові фрактали – це фрактальні структури, які мають самоподібні властивості, проте не є типовими фракталами в повному розумінні цього терміну [1, 11].

Мета

Метою даної роботи є визначення фрактальних розмірностей [6–8] часткових геометричних фракталів з використанням адаптованих методів аналізу. Дослідження спрямоване на аналіз поведінки фрактальної розмірності залежно від ступеня спотворення структури фракталу. Приклад спотворення сніжинки Коха наведено на рис. 1, де перший фрактал без спотворення, інші з різним ступенем спотворення.

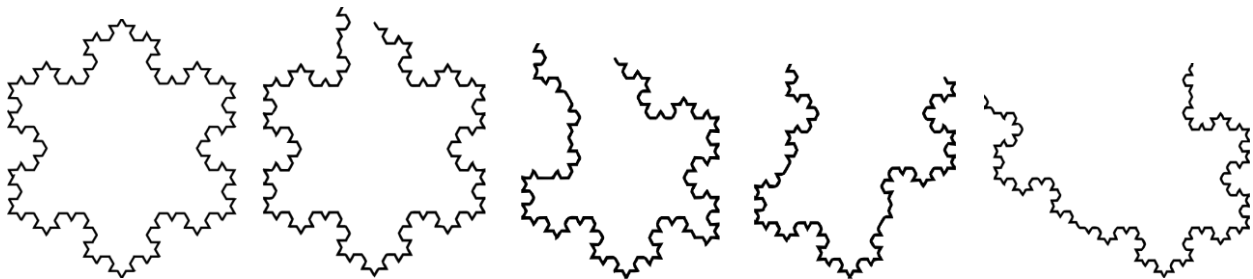


Рис. 1. Дефекти формування фракталів

Fig. 1. Defects of fractal formation

Методика

У роботі за основу взято типові геометричні фрактали, сформовані методом L-систем [10]. Цей метод базується на рекурсивному заміщенні символів у строках згідно з визначеними правилами. Оскільки усі елементи фігури представлені символами, то не складно було ввести в цей рядок деякі зміни, для отримання частково пошкодженого фракталу, що й треба було виконати. Дефектом (змiнами) виступала деяка кількість випадково видалених символів з рядка. Цими символами можуть бути такі що визначають відображення лінії та кут повороту наступної лінії. Кількість символів для видалення визначена в залежності від заданого відсотку дефектів.

Для розрахунку розмірності використано метод Мінковського – зображення фракталу покривається деякою кількістю однакових квадратів [14]. Операція повторюється десять разів зі зміною довжини сторони квадрата. Оскільки в розпорядженні є лише піксельне зображення фігури, то для виконання описаної процедури

умовно розрізаємо зображення на квадрати потрібного розміру. Ті квадрати, що містять у собі лінію фігури (тобто мають хоча б один чорний піксель), зараховуються як «покриваючі». Візуальне представлення одного з етапів цього процесу показано на рис. 2.

Довжина сторони квадрата для покриття розраховується наступним чином:

– визначається менша сторона зображення (після обрізання зображення по розмірам фігури);

– за стартове значення довжини сторони квадрата для покриття береться двадцять відсотків від меншої довжини зображення;

– кожне наступне значення знаходиться шляхом ділення поточного значення на $1/3$, округлюючи до меншого.

Як відомо [9] фрактальна розмірність визначається із залежності:

$$\log M = \log c - s \cdot \log \delta, \quad (1)$$

де M – кількість покриваючих квадратів; c – деякий коефіцієнт; s – шукана розмірність; δ – довжина сторони покриваючого квадрата.

Виконаємо наступні заміни:

$$z = \log M; \quad (2)$$

$$b = \log c; \quad (3)$$

$$x = \log \delta; \quad (4)$$

$$a = -s; \quad (5)$$

Виходячи з (1) отримаємо рівняння:

$$z = b + ax. \quad (6)$$

Методом найменших квадратів визначимо коефіцієнти у (6) та за оберненими підстановками знаходимо шукану розмірність s .

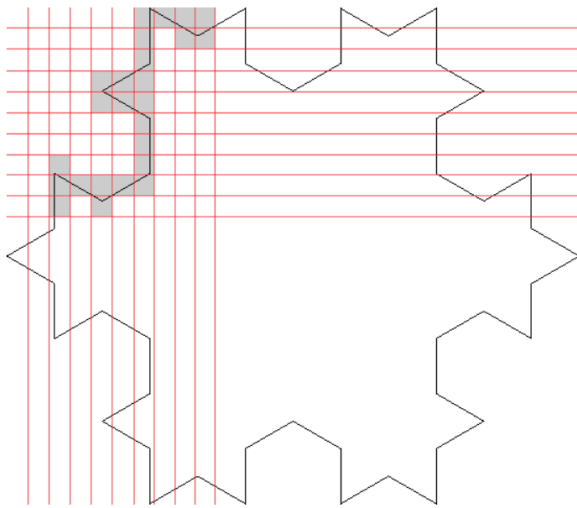


Рис. 2. Візуалізація покриття геометричного фракталу квадратами заданого розміру

Fig. 2. Visualization of covering a geometric fractal with squares of specified size

Запропонована методика була апробована на відомих геометричних фракталах: сніжинка Коха, квадратний острів Коха, крива Серпінського, крива дракона, крива Леві без спотворень. Були визначені довжина лінії та кількість ітерацій, при яких досягнуто найбільший збіг з теоретичними значеннями. Встановлені параметри були використані при подальших дослідженнях залежності фрактальної розмірності від ступеня спотворення. Були згенеровані геометричні фрактали з певним відсотком внесених дефектів, а саме: 1 %, 3 %, 5 %, 8 %, 10 %, 15 %, 20 %, 25 %, 30 %, 35 %, 40 %. Одиночний дослід не

показав чітких результатів, тому розрахунок розмірності для кожного відсотку пошкоджень виконується сто разів з однаковими умовами, на графік виносяться мінімальне, максимальне та середнє значення.

Для реалізації алгоритмів побудови та аналізу фракталів було використано об'єктно-орієнтовану парадигму програмування. Ключові компоненти, такі як генератор L-систем, модуль спотворення структури, візуалізатор фракталів і модулі для обчислення фрактальних розмірностей, були реалізовані у вигляді окремих класів. Такий підхід забезпечує модульність, повторне використання коду, зручність масштабування та подальшої модифікації програми для дослідження інших типів фракталів чи методів аналізу. ООП також сприяло ефективній організації процесу розробки, полегшило налагодження програмного забезпечення та інтеграцію з бібліотеками для обробки зображень.

Таблиця 1

Вхідні дані для виконання досліджень

Table 1

Input data for conducting research

Фрактал	Ітерація	Довжина лінії (в пікселях)	Розмірність без дефектів
Сніжинка Коха	3	60	1,2604
Квадратний острів Коха	2	40	1,3613
Крива Серпінського	3	90	1,4257
Крива дракона	10	40	1,5988
Крива Леві	10	50	1,4251

Результати

В ході експерименту було отримано графік залежності фрактальної розмірності від кількості дефектів (рис. 3–7). Зеленим позначено максимальну розмірність, червоним – середню, синім – мінімальну.

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

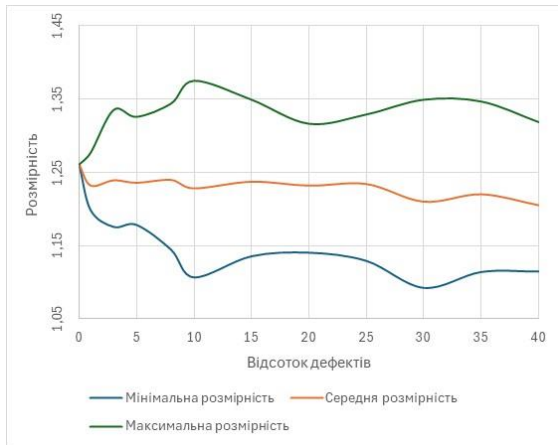


Рис. 3. Залежність фрактальної розмірності від кількості дефектів сніжинки Коха

Fig. 3. Dependence of fractal dimension on Koch snowflake defects.

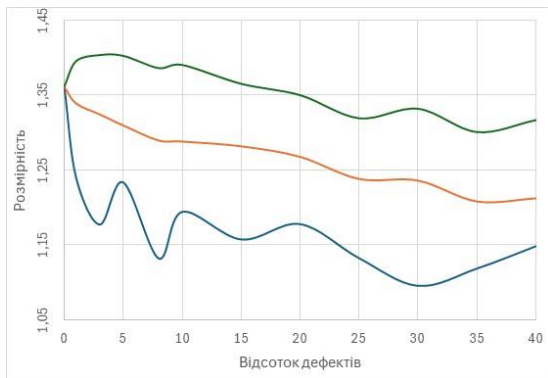


Рис. 4. Залежність фрактальної розмірності від кількості дефектів квадратного острова Коха

Fig. 4. Dependence of fractal dimension on Koch square island

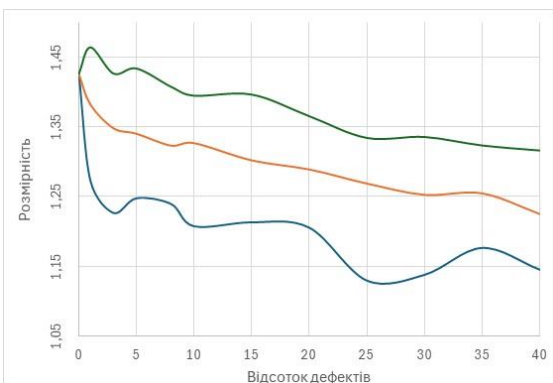


Рис. 5. Залежність фрактальної розмірності від кількості дефектів кривої Серпінського

Fig. 5. Dependence of fractal dimension on Sierpinski curve

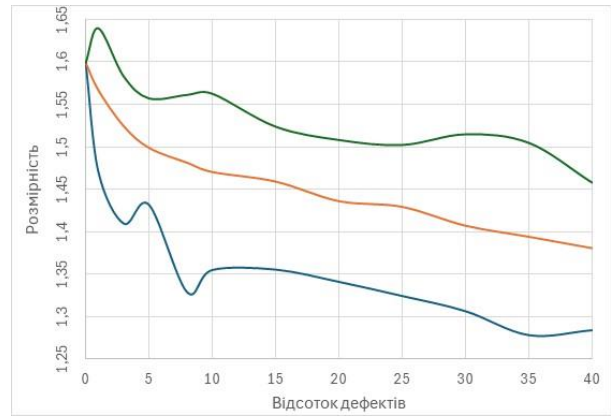


Рис. 6. Залежність фрактальної розмірності від кількості дефектів кривої дракона

Fig. 6. Dependence of fractal dimension on Dragon curve

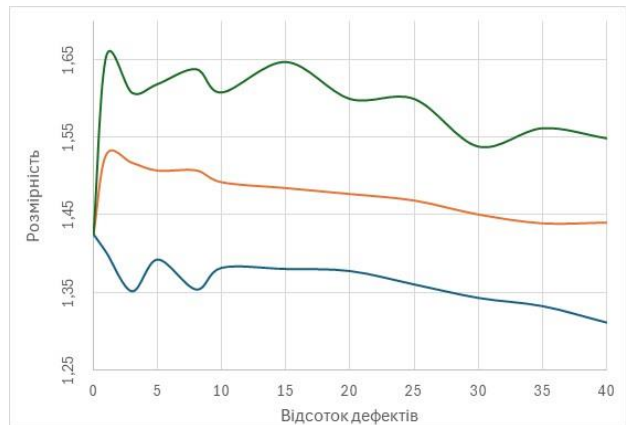


Рис. 7. Залежність фрактальної розмірності від кількості дефектів кривої Леві

Fig. 7. Dependence of fractal dimension on Levy curve

Розрахунки розмірності показали зміну поведінки фрактальної розмірності залежно від ступеня спотворення структури. Для перевірки точності методики був проведений аналіз таких фракталів як сніжинка Коха, квадратний острів Коха, крива Серпінського, крива дракона, крива Леві. Наприклад, для сніжинки Коха, отримане значення фрактальної розмірності приблизно 1,26, для кривої дракона – 1,59, для кривої Леві – 1,42. Отримані результати демонструють малі розбіжності з відомим значенням, що підтверджує правильність використаного методу.

Наукова новизна та практична значимість

Наукова новизна роботи полягає у дослідженні фрактальної розмірності часткових геометричних фракталів з урахуванням ступеня їхніх спотворень. Розроблений метод розрахунку може бути адаптований для аналізу фрактальних структур у різних наукових галузях. Практична значимість полягає в можливості оптимізації обробки зображень, розробки графіки та створення ефективних 3D-моделей у комп'ютерних програмах.

Висновки

Розроблений метод аналізу та дослідження часткових фракталів і їхніх розмірностей має значний практичний потенціал у різних галузях. Основні напрями практичного застосування включають:

- створення нових моделей часткових фракталів шляхом формування дефектів і дослідження їхнього впливу на складність і форму структур;

- аналіз впливу різних типів і кількості дефектів на структуру фракталів може сприяти покращенню характеристик матеріалів, де важлива точність і надійність структури;

- визначення змін у фрактальній розмірності при різних рівнях пошкоженості фракталів може мати широке практичне застосування в технологіях і природничих науках;

- результати досліджень розширюють сучасні підходи до аналізу та вимірювання фрактальних структур;

- розроблене програмне забезпечення для генерації та аналізу фракталів є інноваційним інструментом, що відкриває нові можливості для дослідження фрактальної геометрії.

Дослідження не лише пропонує новий підхід до аналізу фракталів, але й забезпечує практичні інструменти для їхнього застосування в різних наукових і технологічних сферах.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Адашевська І. Ю., Краєвська О. О. Конструктивні фрактали як результуюче стискуєче відображення подібності. *CORE*. 2019. 8 с. URL: <https://core.ac.uk/download/pdf/286927257.pdf>
2. Кветний Р. Н., Богач І. В., Бойко О. Р., Софіна О. Ю., Шушура О. М. *Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень* : навч. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2013. Ч. 1. 191 с.
3. Кветний Р. Н., Богач І. В., Бойко О. Р., Софіна О. Ю., Шушура О. М. *Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень* навч. посіб. Вінниця : ВНТУ, 2013. Ч. 2. 235 с.
4. Рудик О. *Основи фрактальної геометрії* : навч.-метод. матеріал. 2020. URL: <https://www.kievoi.ippo.kubg.edu.ua/kievoi/dynsys/fractals.html>
5. Шинкаренко В. І., Чигир Р. Р. Конструктивно-продукційне моделювання тривимірних фрактальних поверхонь. *Системні технології*. 2025. Т. 1, № 156. С. 78–88. DOI: <https://doi.org/10.34185/1562-9945-1-156-2025-09>
6. Avcı E. Contribution of Fractal Dimension Theory into the Uniaxial Compressive Strength Prediction of a Volcanic Welded Bimrock. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*. 2020. Vol. 79, Iss. 7. P. 3605–3619. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10064-020-01778-y>
7. Datseris G., Kottlarz I., Braun A. P., Parlitz U. Estimating Fractal Dimensions: A Comparative Review and Open Source Implementations. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2023. Vol. 33, Iss. 10. Art. 102101. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0160394>
8. Husain A., Reddy J., Bisht D., Sajid M. Fractal Dimension of Coastline of Australia. *Scientific Reports*. 2021. Vol. 11, Iss. 1. Art. 6304. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-021-85405-0>
9. Kleinbock D. *FalconerCh3*. 2017. 1 p. URL: <https://people.brandeis.edu/~kleinbock/211a/FalconerCh3.pdf>
10. Lindenmayer A. Mathematical models for cellular interactions in development I. Filaments with one-sided inputs. *Journal of Theoretical Biology*. 1968. Vol. 18, Iss. 3. P. 280–299. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5193\(68\)90079-9](https://doi.org/10.1016/0022-5193(68)90079-9)
11. Mandelbrot B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. New York : W. H. Freeman and Company, 1982. 460 p. URL: https://archive.org/details/fractalgeometry0000mand_i0s3/page/n7/mode/2up

12. Shynkarenko V. I. Constructive-Synthesizing Representation of Geometric Fractals. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55, Iss. 2. P. 189–199. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-019-00123-w>
13. Shynkarenko V., Letuchyi O., Chyhir R. Constructive-synthesizing modeling of fractal crystal lattices. *2023 IEEE 18th International Conference on Computer Science and Information Technologies (CSIT)* (Lviv, 19–21 October 2023). Lviv, 2023. P. 1–4. DOI: <https://doi.org/10.1109/csit61576.2023.10324251>
14. Wu M., Wang W., Shi D., Song Z., Li M., Luo Y. Improved Box-Counting Methods to Directly Estimate the Fractal Dimension of a Rough Surface. *Measurement*. 2021. Vol. 177. P. 109303. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.109303>

V. I. SHYNKARENKO^{1*}, V. O. MASLIUK^{2*}, A. V. STADNIK^{3*}

^{1*}Dep. «Computer information technology», Ukrainian State University of Science and Technologies, SEI DIIT, Lazaryana St., 2, Dnipro, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 373 15 35, e-mail shinkarenko_vi@ua.fm, ORCID 0000-0001-8738-7225

^{2*}Dep. «Computer information technology», Ukrainian State University of Science and Technologies, SEI DIIT, Lazaryana St., 2, Dnipro, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 373 15 35, e-mail viramasluk843@gmail.com, ORCID 0009-0008-4658-9806

^{3*}Dep. «Computer information technology», Ukrainian State University of Science and Technologies, SEI DIIT, Lazaryana St., 2, Dnipro, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 373 15 35, e-mail a.v.stadnik@ust.edu.ua, ORCID 0009-0002-9907-1740

Determination of Fractal Dimension of Partial Geometric Fractals

Purpose. Research aims on determining the dependence of the fractal dimension of partial geometric fractals on the degree of distortion of the fractal structure. Such analysis is important for understanding behavior of complex objects in cases of partial violation of self-similarity, which frequently occurs in real-world tasks of computer graphics, modeling of natural processes, biomedical imaging, and materials analysis. **Methodology.** Research employed fractal construction technique based on L-systems with intermediate multi-symbol representation and defect seeding by randomly removing a certain percentage of symbols from generated sequence. Analysis was performed using box-counting method: fractal structure was repeatedly overlaid with square grids of variable side lengths, after which number of squares required to cover figure was determined. Fractal dimension was calculated from logarithmic relationship between number of squares and side length of squares (slope method on logarithmic plot). Graphical representations of fractals were saved in high-resolution BMP format to minimize rasterization errors. To improve reliability, each structure was analyzed through tenfold repeated grid coverage with varying parameters. **Findings.** Proposed methodology was tested on well-known geometric fractals: Koch snowflake, Koch square island, Sierpinski curve, dragon curve, and Lévy curve without distortions. Obtained fractal dimension values corresponded to theoretical predictions. For these fractals, relationship between fractal dimension and degree of damage (percentage of removed elements) was determined. In particular, increasing number of defects generally led to decrease in fractal dimension, indicating loss of self-similarity and simplification of geometric structure. These results allow quantitative description of fractal structure degradation and identification of critical limits of self-similarity stability. **Originality.** Research introduces new objects of study, namely partial geometric fractals, and provides new data on self-similarity levels of partial fractals with varying degrees of damage. **Practical value.** Results can be applied in computer graphics, image processing, 3D modeling, as well as in materials science and other fields where complexity and structure of materials are important. Study expands current approaches to fractal structure analysis and proposes new methods for their investigation and application.

Keywords: fractal dimension; fractal; L-systems (Lindenmayer systems); object-oriented programming; software; information technologies

REFERENCES

1. Adashevska, I. Yu. (2019). Konstruktyvni fraktaly yak rezultuiuche styskujuche vidobrazhennia podibnosti. *CORE*. Retrieved from <https://core.ac.uk/download/pdf/286927257.pdf> (in Ukrainian)
2. Kvietyi, R. N., Bohach, I. V., Boiko, O. R., Sofyna, O. Yu., & Shushura, O. M. (2013). *Kompiuterne modeliuвання system ta protsesiv. Metody obchyslen.* (Vol. 1). Vinnytsia: VNTU. (in Ukrainian)
3. Kvietyi, R. N., Bohach, I. V., Boiko, O. R., Sofyna, O. Yu., & Shushura, O. M. (2013). *Kompiuterne modeliuвання system ta protsesiv. Metody obchyslen.* (Vol. 2). Vinnytsia: VNTU. (in Ukrainian)
4. Rudyk, O. (2020). *Osnovy fraktalnoi heometrii*. Retrieved from <http://www.kievoi.ippo.kubg.edu.ua/kievoi/dynsys/fractals.html> (in Ukrainian)

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

5. Shynkarenko, V. I., & Chyhyr, R. R. (2025). Constructive-synthesizing modelling of three-dimensional fractal surfaces. *System Technologies*, 1(156), 78-88. DOI: <https://doi.org/10.34185/1562-9945-1-156-2025-09> (in Ukrainian)
6. Avşar, E. (2020). Contribution of fractal dimension theory into the uniaxial compressive strength prediction of a volcanic welded bimrock. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*, 79(7), 3605-3619. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10064-020-01778-y> (in English)
7. Datsersis, G., Kottlarz, I., Braun, A. P., & Parlitz, U. (2023). Estimating fractal dimensions: A comparative review and open source implementations. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 33(10), 102101. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0160394> (in English)
8. Husain, A., Reddy, J., Bisht, D., & Sajid, M. (2021). Fractal dimension of coastline of Australia. *Scientific Reports*, 11(1), 6304. DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-021-85405-0> (in English)
9. Kleinbock, D. (2017). *FalconerCh3*. Retrieved from <https://people.brandeis.edu/~kleinboc/211a/FalconerCh3.pdf> (in English)
10. Lindenmayer, A. (1968). Mathematical models for cellular interactions in development I. Filaments with one-sided inputs. *Journal of Theoretical Biology*, 18(3), 280-299. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-5193\(68\)90079-9](https://doi.org/10.1016/0022-5193(68)90079-9) (in English)
11. Mandelbrot, B. B. (1982). *The fractal geometry of nature*. New York, USA: W. H. Freeman and Company. Retrieved from https://archive.org/details/fractalgeometry0000mand_i0s3/page/n7/mode/2up (in English)
12. Shynkarenko, V. I. (2019). Constructive-synthesizing representation of geometric fractals. *Cybernetics and Systems Analysis*, 55(2), 189-199. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-019-00123-w> (in English)
13. Shynkarenko, V., Letuchy, O., & Chyhir, R. (2023, October). Constructive-synthesizing modeling of fractal crystal lattices. In *2023 IEEE 18th International Conference on Computer Science and Information Technologies (CSIT)* (pp. 1–4). Lviv, Ukraine. DOI: <https://doi.org/10.1109/csit61576.2023.10324251> (in English)
14. Wu, M., Wang, W., Shi, D., Song, Z., Li, M., & Luo, Y. (2021). Improved box-counting methods to directly estimate the fractal dimension of a rough surface. *Measurement*, 177, 109303. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.109303> (in English)

Надійшла до редколегії: 24.11.2025

Рекомендовано до публікації: 26.12.2025

Дата публікації: 27.03.2026