

УДК 004.421:[519.6+519.87]

Т. А. ЗАЙЦЕВА^{1*}

^{1*}Каф. комп'ютерних технологій, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, пр. Науки, 72, Дніпро, Україна, 49045, тел. +38 (097) 534 29 68, ел. пошта ztan2004@ukr.net, ORCID 0000-0002-6346-3390

Обернене моделювання механіки конструкційного контакту із застосуванням методу скінченних елементів

Мета. Дослідження спрямовано на розробку і розв'язання оберненої контактної задачі для двох пружних тіл з різною жорсткістю, яка дозволяє ідентифікувати параметри взаємодії, включаючи зони тертя, зчеплення, ковзання та відриву. Формулюється варіаційна математична модель з урахуванням некоректності задачі за Адамаром, а також розробляється скінченно-елементна модель. Застосування ANSYS із автоматизацією через APDL забезпечує реалізацію оберненого моделювання, з урахуванням складної поведінки системи під зовнішнім навантаженням. **Методика.** Основою дослідження є поетапний підхід до побудови оберненої контактної задачі з урахуванням переходів між режимами взаємодії (зчеплення, ковзання, відрив), математичної формалізації та чисельного моделювання засобами скінченно-елементного аналізу в ANSYS. Спочатку формується пряма задача, на основі її аналізу – обернена, метою якої є визначення невідомих параметрів взаємодії. Далі розробляється скінченно-елементна модель та здійснюється аналіз результатів. **Результати.** У ході дослідження сформульовано обернену контактну задачу для двох деформівних тіл з різною жорсткістю, яка враховує режими зчеплення, ковзання та відриву. Розроблено скінченно-елементну модель у середовищі ANSYS з використанням контактних елементів, параметризації та автоматизації розрахунків. Отримані результати дали змогу ідентифікувати параметри взаємодії та оцінити механіку системи під навантаженням. **Наукова новизна.** У дослідженні запропоновано інтегрований аналітико-програмний підхід до розв'язання оберненої контактної задачі для тіл з різними механічними характеристиками, що враховує зони зчеплення, ковзання та відриву. Новизна полягає у поєднанні варіаційної математичної постановки задачі з регуляризациєю Тихонова та скінченно-елементним аналізом, автоматизованим через APDL-скрипти у середовищі ANSYS. **Практична значимість.** Розроблена методика вирішення оберненої контактної задачі на основі аналітичного підходу та реалізації в середовищі ANSYS є ефективним інструментом для аналізу складних механічних систем. Алгоритм дозволяє ідентифікувати параметри контактної взаємодії (тертя, зони зчеплення, ковзання, відриву) на основі фактичних умов навантаження. Інтеграція скриптової автоматизації через APDL забезпечує гнучке налаштування моделі та її застосування в практиці машинобудування, авіації, біомеханіки та інших галузях, де точність контактного моделювання є критично важливою.

Ключові слова: математична модель; обернене моделювання; скінченно-елементна модель; контактна взаємодія; тертя; ковзання; зчеплення; відрив; ANSYS; метод Ньютона

Вступ

У сучасному машинобудуванні та залізничному транспорті задачі контактної взаємодії конструктивних елементів відіграють ключову роль у забезпеченні довговічності та безпечної експлуатації технічних систем. Особливу складність становлять випадки взаємодії деталей із відмінними механічними характеристиками, що ускладнюється впливом технологічних допусків, агресивного середовища, а також геометричних змін, спричинених експлуатацією. В таких умовах виникає необхідність у застосуванні чисельного моделювання контактної механіки з урахуванням ефектів зчеплення, ковзання та відриву.

Зазначене моделювання дає змогу адекватно оцінити напружено-деформований стан відповідальних елементів конструкцій та забезпечити їхню надійність, зокрема, в умовах експлуатації рухомого складу. Особливу увагу привертають обернені контактні задачі, що дозволяють виконувати ідентифікацію геометрії об'єкта, параметрів контакту та особливостей взаємодії на підставі обмеженого обсягу вимірюваних даних [6, 7]. Складність математичного формулювання таких задач обумовлена неповнотою вхідної інформації, нелінійністю фізичних процесів, а також чутливістю до похибок вимірювань. У роботі [8] обґрунтовано підхід до оберненого моделювання задачі вдав-

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

лення штамп у пружний півпростір з урахуванням тертя, зчеплення та відриву, що має практичну цінність для інженерного аналізу зон контакту. Дослідження [5, 13] пропонують огляд механізмів адаптації контактної геометрії при фретинговому зношуванні, враховуючи режими ковзання та стабілізації зношення, а також акцентують увагу на можливостях тривимірного моделювання складних матеріалів [3].

Окрему групу становлять роботи, присвячені розвитку трибологічних моделей, включно з біотрибологією та методами вдосконалення поверхонь. Зокрема, у [4] розв'язано задачу взаємодії штамп з пружним середовищем, яке характеризується наявністю початкових напружень, а в [9, 11] – реалізовано оптимізаційні постановки задач контактної взаємодії.

Аналіз останніх досліджень засвідчує, що швидкий розвиток технічних систем породжує нові типи задач, які складно або взагалі неможливо розв'язати аналітично, хоча застосування математичного апарату для отримання аналітичних та чисельно-аналітичних рішень – не поодинокі випадки [4, 12, 11].

Взагалі широкого застосування набувають чисельні методи, зокрема метод скінченних елементів, незважаючи на їхні значні ресурсоємнісні характеристики. Застосування сучасних програмних комплексів, зокрема ANSYS [2], довело свою ефективність у моделюванні складних сценаріїв контактної взаємодії та обробці великомасштабних масивів даних [13].

Водночас ведеться активна розробка альтернативних підходів, спрямованих на підвищення точності результатів при зниженні витрат обчислювальних ресурсів. До перспективних напрямів належать інтелектуальні системи, зокрема експертні моделі, які забезпечують автоматизоване виявлення конфліктних сценаріїв використання та корекцію об'єктних моделей [10]. Значного поширення набули нейронні мережі, що успішно застосовуються для задач виявлення пошкоджень конструкцій – від будівельних об'єктів до складних машинобудівних елементів [1]. Синергія експертних систем і нейромереж відкриває нові можливості для високоточних діагностичних і прогностичних моделей технічного стану об'єктів.

Обернені контактні задачі відіграють фундаментальну роль у розвитку сучасних методів

моделювання складних технічних систем. Їхня математична складність, нечіткість вхідних параметрів та обмеженість вимірювань стимулюють розвиток інтелектуальних підходів – експертних систем і нейронних мереж. Особливої ефективності ці методи набувають у поєднанні з чисельними підходами, такими як метод скінченних елементів, що дозволяє деталізувати механіку взаємодії конструкцій. Така синергія сприяє створенню гібридних моделей високої точності для діагностики та прогнозування технічного стану. В результаті, обернені задачі стають основою цифровізації інженерного аналізу та інноваційного розвитку промисловості.

Мета

У межах дослідження необхідно сформулювати та розв'язати обернену контактну задачу для двох пружних тіл з різною жорсткістю, в якій визначаються параметри системи, що забезпечують відповідність контактних умов моделям з зонами тертя, зчеплення, ковзання та відриву.

Для досягнення цієї мети необхідно:

- побудувати математичну модель оберненої задачі як варіаційної;
- побудувати скінченно-елементну модель, яка описує контактну механіку тіл з урахуванням переходів між режимами взаємодії: зчеплення, ковзання, тертя;
- ітераційне уточнення геометрії та параметрів тертя за результатами чисельного аналізу, з урахуванням умов закону Кулона;
- реалізувати алгоритм у програмному середовищі ANSYS із застосуванням контактних елементів, параметризації геометрії та скриптової автоматизації через APDL.

Методика

Розглядається плоска контактна задача для двох прямокутних областей різної жорсткості. Один із прямокутників защемлений по одній із граней, на протилежній грані розташовується другий прямокутник, який притискається до першого нормальною силою.

Нехай $\Omega_k \in R^2$ – область з регулярною границею Γ , де $\Gamma = \Gamma_0^k \cup \Gamma_c^k, \Gamma_0^k$ – зовнішня, Γ_c – границя контакту, $k = 1, 2$,

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

$$\Omega: \{\Omega, x = (x_1, x_2), -l_1 \leq x_1 \leq l_1, -l/2 \leq x_2 \leq l/2\},$$

$$\Omega = \sum_k \Omega_k.$$

Крайова задача, що описує деформування розглядуваної системи, має вигляд:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(k)}}{\partial x_j} = f_i^{(k)} \text{ в } \Omega_k, \quad k=1,2.$$

де

$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(k)}}{\partial x_i};$$

$$\sigma_{ij}^{(k)} = C_{ijkm}^{(k)} \varepsilon_{km}^{(k)}(u); \quad (1)$$

$$C_{ijkm}^{(k)} = C_{jimk}^{(k)} = C_{kmij},$$

де i, j, k, m – тензорні індекси, які позначають напрямки в просторі та використовуються для опису компонент фізичних величин; $u^{(k)} = (u_1^{(k)}, u_2^{(k)})$ – вектор переміщень; $\{\sigma_{ij}^{(k)}\}$ – тензор напружень; $f_2^1 = A\delta(x_1 - l_1, x_2)$, де δ – дельта функція Дірака.

Прийнято виконувати сумування за повторюваними індексами.

Граничні умови мають вигляд:

$$u_1|_{\Gamma_0^1} = 0, \quad u_2|_{\Gamma_0^1} = 0. \quad (2)$$

На контактній поверхні $\Gamma_c (x_1 = 0)$:

$$u_2^{(k)} \leq 0, \quad \sigma_{22}^{(k)} \leq 0, \quad u_2^{(k)} \cdot \sigma_{22}^{(k)}|_{\Gamma_c} = 0. \quad (3)$$

У зоні зчеплення Γ_c :

$$u_2^1 = u_2^2, \quad u_1^1 = u_1^2 = 0; \quad (4)$$

$$|\sigma_{12}^{(k)}| < K |\sigma_{22}^{(k)}|, \quad (5)$$

де K – коефіцієнт тертя.

В зоні ковзання Γ_{cc} замість умови (5) виконуються умови:

$$|\sigma_{12}^{(k)}| - K |\sigma_{22}^{(k)}| \geq 0. \quad (6)$$

За виконання умов $\sigma_{22} > 0$ маємо відрив, і тоді маємо:

$$\sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{12} = 0. \quad (7)$$

Постановка оберненої задачі. Нехай у зоні контакту у результаті рішення задачі (1)–(4) в деякій області (областях) $\alpha_1^{(P)} \leq x_2 \leq \alpha_2^{(P)}$ умова (5) і (або) умова $\sigma_{22}^{(k)} \leq 0$ не виконується. Припускаємо, що для виконання закону Кулона (6) необхідно визначити зміну $\tilde{U}^{(m)}$ отриманого рішення $U^0(x)$ задачі (1)–(4) з урахуванням (6).

Подамо розв'язок задачі (1)–(4), (6) у вигляді суми двох станів:

$$U^{(m)}(x) = U^0(x) + \tilde{U}^{(m)}(x),$$

де $U^0(x)$ – вектор-функція, що описує напружено-деформівний стан при повному зчепленні; $\tilde{U}^{(m)}(x)$ – вектор-функція, що описує додатковий стан, який виникає внаслідок існування зон ковзання та відриву.

Значення дотичних напружень $\sigma_{12}^{(m)}(U^0(x), \tilde{U}^{(m)}(x))$, можуть бути обчислені з рівнянь (1)–(4). Ці напруження повинні задовольняти умовам $\sigma_{12}^{(m)} = K \sigma_{22}^{(m)}$ в зоні $\Gamma_{cc} (\alpha_1 \leq x_1 \leq \alpha_2, x_2 = 0)$ та умові (5) або (7) у областях – $L \leq x_1 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq x_1 \leq L$ (при $P=1$). Отже, розв'язання задачі зводиться до визначення координат α_1, α_2 і функцій $\tilde{U}^{(m)}(x)$.

Сформулюємо задачу визначення функції $\tilde{U}^{(m)}(x)$ як обернену, у якій додатковими умовами виступають (6), (7).

Функція $\tilde{U}^{(m)}(x)$ однозначно визначається крайовою задачею (1)–(4) при $f_1 = f_2 = 0$

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

і $\tilde{U}^{(m)}(x)|_{\Gamma_c} = \tilde{U}_{\Gamma_c}^{(m)}$, застосуємо як невідому функцію оберненої задачі функцію $\tilde{U}_{\Gamma_c}^{(m)}$.

Введемо множину W як:

$$W = \left\{ \tilde{U}_{\Gamma_c}^{(m)}(x) \in C_{\Gamma}^2, x \in \Gamma_c, \tilde{U}_{\Gamma_c}^{(m)} \in H_{\Gamma_c}^{(3/2)}, \frac{\partial \tilde{U}_{\Gamma_c}^{(m)}}{\partial n} \in H_{\Gamma_c}^{(1/2)}, \underline{u} \leq \tilde{U}_{\Gamma_c}^{(m)} \leq \bar{u} \right\}, \quad (8)$$

де n – нормаль к поверхні, $H_{\Gamma_k}^{(m/p)}$ – простір, що визначається як замикавання множини C_{Γ}^2 в нормі, де похідні задовольняють умові Гельдера.

Множина W (8) є компактом у просторі $H_{\Gamma_c}^{(m/p)}$, отже, з будь-якої послідовності $\{\tilde{U}_{\Gamma_c}^{(m)}\} \subset W$ можна вибрати хоча б одну послідовність $\{\tilde{U}_{\Gamma_c}^{(m_n)}\} \subset \{\tilde{U}_{\Gamma_c}^{(m)}\}$, яка сходиться в нормі просторів $H_{\Gamma_c}^{(m/p)}$ до деякого елементу $\tilde{U}_{\Gamma_c} \in W$.

Оскільки задача не задовольняє критеріям коректності в сенсі Адамара, до її розв'язання застосуємо концепцію квазірозв'язку, запропоновану Тихоновим [7, 8]. Тоді шукану функцію $\tilde{U}_{\Gamma_c}^{(m)}(x)$ визначаємо як таку, що задовольняє відповідну умову:

$$U_{\Gamma_c}^{(m)}(x) = \arg \min J(\tilde{U}_{\Gamma_c}^{(m)}), \tilde{U}_{\Gamma_c}^{(m)} \in W, \quad (9)$$

$$\text{де } J = \int_{\Gamma_{cc}} (\sigma_{12}^{(m)} - k\sigma_{22}^{(m)})^2 d\Gamma.$$

Скористаємося наступними твердженнями, аналогічно до [7, 8].

1. Якщо $\tilde{U}_{\Gamma_c}^{(m)} \in W$ та $\tilde{U}_{\Gamma_c}^{(m)} \rightarrow \tilde{U}_{\Gamma_c}$ в нормі $H_{\Gamma_c}^{(m/p)}$ то послідовність $\{\tilde{U}_{\Gamma_c}^{(m)}(\tilde{U}_{\Gamma_c}^{(m)})\}$ задачі (1)–(5) слабо збігається до наближеного розв'язку цієї задачі та $\sigma_{ij}^{(m)}(\tilde{U}_{\Gamma_c}^{(m)})$ слабо збігається до $\sigma_{ij}(\tilde{U}_{\Gamma_c})$.

2. Функціонал J є неперервним, тобто при $\tilde{U}_{\Gamma_c}^{(m)} \rightarrow \tilde{U}_{\Gamma_c}$ має місце $J(\tilde{U}_{\Gamma_c}^{(m)}) \rightarrow J(\tilde{U}_{\Gamma_c})$, а отже, згідно з теоремою Вейерштраса, задача його мінімізації має щонайменше одне розв'язання.

3. Має місце топологічна лема, тобто якщо послідовність $\{\sigma_{12}^{(m)}(\tilde{U}_{\Gamma_c}^{(m)}) - K\sigma_{22}^{(m)}(\tilde{U}_{\Gamma_c}^{(m)})\}$ збігається до мінімального значення, то послідовність $\tilde{U}_{\Gamma_c}^{(m)} \rightarrow \tilde{U}_{\Gamma_c}$.

Узагальнена схема алгоритму.

1. Перший крок алгоритму передбачає встановлення необхідних початкових параметрів, серед яких P (де P – кількість допустимих станів системи), $U_1|_{\Gamma_c} = 0$, K – коефіцієнт тертя, $e \ll 1$, $d \ll 1$ (де d, e – заздалегідь визначені похибки), $n = 0$ (де n – крок розрахунку), α (де α – розрахунковий зональний коефіцієнт).

2. На наступному кроці здійснюється побудова множини допустимих станів системи – J . Визначаємо вектор U^0 , обчислення $\sigma_{12j}^0, \sigma_{22j}^0$ в точках j_p , $p = \overline{1, P}$.

$$3. \text{Здійснюємо визначення } K_{\max} = \max \left| \frac{\sigma_{22j}^0}{\sigma_{12j}^0} \right|.$$

$$4. \text{Визначаємо } \Delta_j^{(m)} = \left| \sigma_{12j}^{(m)} - K^{(n)} \sigma_{22j}^{(m)} \right|, j = \overline{1, P}$$

5. Формуємо відповідні множини j^0, j^T , обчислюємо вектор μ_{j_p} , $j = \overline{1, P}$.

$$6. \text{Формуємо вектор } \bar{U}^{(m)} = \{U_1^{(m)}, \dots, U_P^{(m)}\}$$

7. Визначаємо вектор $\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)}$ методом Н'ютона, перевіряємо виконання умов $\|\tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m)} - \tilde{U}_{\Gamma_k}^{(m-1)}\| \leq d$.

8. За умови виконання $|K^{(n)} - K| \leq e$, переходимо на кінець, якщо ні, то переходимо на 9.

9. Переходимо на новий крок розрахунків $n = n + 1$.

$$10. K_{nom}^{(n)} = K^{n-1} - \alpha K_{nom}^{n-1}$$

11. Перехід на п. 4.

Для зручності індекс (n) у функціях опущено.

Результати

Програмний комплекс ANSYS було обрано як базову платформу для реалізації оберненої задачі з огляду на його прийнятну точність у розрахунках, гнучкість у налаштуванні контактних умов, а також можливість інтеграції з методами оптимізації та регуляризації. Використовувалась академічна версія ANSYS STUDENT 2025 R2 [2], яка надає безкоштовний доступ до програмного комплексу. ANSYS забезпечив підтримку нелінійних контактних взаємодій, включаючи тертя, ковзання, зчеплення. Для реалізації оберненої задачі в ANSYS використовувалися контактні елементи (CONTA174, TARGE170) з налаштуванням коефіцієнта тертя, умов зчеплення та допуску на ковзання. CONTA174 – це 3D контактний елемент, який моделює контакт і ковзання між деформованими поверхнями. Він підтримує ізотропне та ортотропне тертя, а також дозволяє враховувати розрив зчеплення або деламінацію. Елемент TARGE170 такий що представляє цільову поверхню для контакту. Він може бути жорстким або деформованим, і використовується для парного контакту або загального контакту. У парному визначенні контакту ці елементи зв'язуються через спільний набір реальних констант, що дозволяє точно налаштувати коефіцієнт тертя, допуск на проникнення, умови зчеплення тощо.

Також була застосована параметризація геометрії та матеріалів, що дозволило працювати з моделлю протягом ітераційного процесу. Геометрія моделі (положення зон тертя, ковзання, зчеплення) були задані як параметри, які можна змінювати на різних кроках ітерацій.

Це дозволило реалізувати обернену задачу: змінюючи параметри у Workbench через Design Parameters,

Скриптова автоматизація APDL (ANSYS Parametric Design Language) дозволила створити цикл ітерацій, у якому:

- мінювалися необхідні параметри моделі;
- виконувалися розрахунки;
- збиралися результати (контактні напруження, переміщення);
- обчислювався функціонал нев'язки;
- перевірялися умови збіжності.

Також у межах дослідження було здійснено альтернативний підхід до чисельного моделювання контактної взаємодії між двома тілами з урахуванням зон зчеплення, тертя та ковзання. Для цього було побудовано деталізовані геометричні моделі контактуючих поверхонь, які відображають майже реальні умови експлуатації. Контактні елементи в моделі дозволили врахувати нелінійність взаємодії, зокрема умови зчеплення до досягнення критичного рівня дотичних напружень, після чого спостерігалось ковзання. У зонах зчеплення дотичні переміщення були відсутні, що відповідало умовам повного контакту між тілами. У протилежному випадку, при перевищенні граничного тертя, виникали зони ковзання з наявністю відносного руху. Контактна взаємодія моделювалася з урахуванням тертя, описаного за законом Кулона, де коефіцієнт тертя задавався параметрично, що забезпечувало адаптивність моделі до змінних умов. Розподіл контактного тиску, дотичних сил та переміщень оцінювався на основі результатів скінченно-елементного аналізу. Особлива увага приділялася переходу між умовами контакту (рис. 1–4).

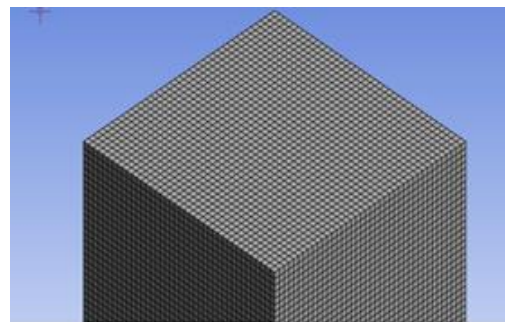


Рис. 1. Приклад контактної поверхні з елементами моделювання зон тертя, зчеплення та ковзання за рахунок вбудованих функціональних можливостей ANSYS

Fig. 1. Contact surface example with friction, adhesion, and sliding zones modeled via ANSYS's integrated functionality

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

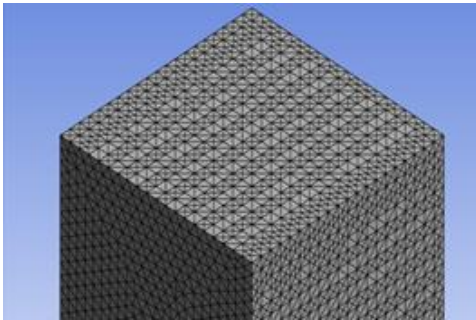


Рис. 2. Приклад деталізованої контактної поверхні з елементами моделювання зон тертя, зчеплення та ковзання за рахунок вбудованих функціональних можливостей ANSYS

Fig. 2. Detailed contact surface with friction, adhesion, and sliding zones modeled via ANSYS tools

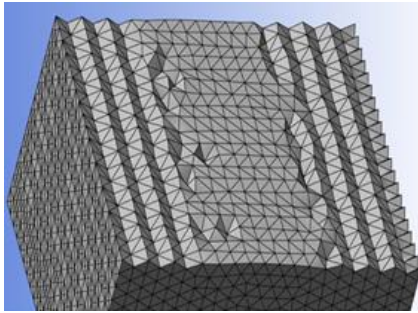


Рис. 3. Приклад контактної поверхні зі складними окремо фізично змодельованими зонами тертя, зчеплення та ковзання, а також за рахунок вбудованих функціональних можливостей ANSYS

Fig. 3. Contact surface example with distinct friction, adhesion, and sliding zones, modeled via ANSYS tools and complex interface geometry

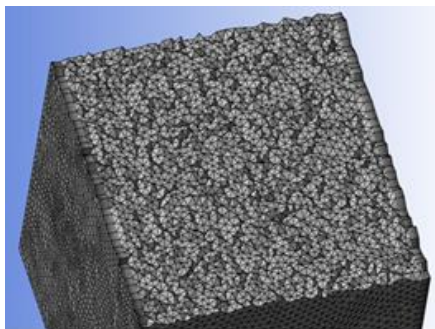


Рис. 4. Приклад відтворення складної поверхні контакту з елементами моделювання зон тертя, зчеплення та ковзання за рахунок вбудованих функціональних можливостей ANSYS

Fig. 4. Contact surface example with friction, adhesion, and sliding zones, modeled using ANSYS and complex interface geometry

Рисунки 1–4 ілюструють геометричну конфігурацію контактних поверхонь між двома деформівними тілами з різною жорсткістю, що моделюються в ANSYS з урахуванням зон зчеплення, ковзання та відриву. Використані комбінації контактних елементів різних типів, забезпечують реалізацію різних режимів взаємодії. Завдяки складній архітектурі поверхні та комбінації типів контактних елементів, досягається більш адекватне чисельне відтворення фізичних процесів, включаючи локальні переходи між режимами контакту. Таким чином, модель відтворює складну механічну поведінку контактної пари в умовах зовнішнього навантаження.

На рис. 5 наведено приклад ідентифікації зон контактної взаємодії між тілами під навантаженням, зокрема ділянок відриву, тертя, зчеплення та ковзання. Модель побудована з використанням вбудованих функціональних можливостей ANSYS, що дозволяє точно відтворити різні режими взаємодії. Зони тертя позначені кольоровими ділянками, які відображають характер контактної поведінки; область з найбільшим навантаженням візуалізована червоним кольором. Отримані результати є важливими для верифікації чисельної моделі та подальшого формулювання оберненої задачі, спрямованої на визначення параметрів системи.

У якості прикладу наведемо результати розв'язку класичної задачі про вдавнення і зсув жорсткого штампа в пружний півпростір (плоска задача) з механічними характеристиками $E = 200$ ГПа, $\nu = 0,3$. Навантаження здійснювалося кінематично, до визначеного заглиблення $\delta_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ мм та зміщення $\delta_2 = 10^{-3}$ мм. Відношення розмірів l/H склало 0,3, де H – розмір, що характеризує скінченно-елементну модель півпростору; l – розмір зони контакту.

Скінченно-елементне розбиття здійснювалося шляхом автоматичного вибору кроку сітки для досягнення заданої відносної похибки 0,02 з деталізованою контактною поверхнею з елементами моделювання зон тертя, зчеплення та ковзання за рахунок вбудованих функціональних можливостей ANSYS.

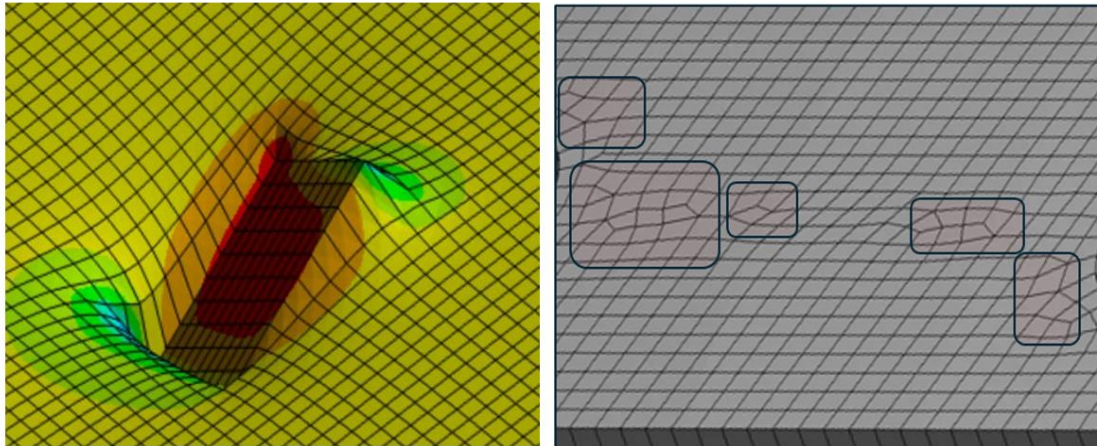


Рис. 5. Приклади ідентифікації ділянок відриву, зон тертя, зчеплення та ковзання

Fig. 5. Examples of contact surfaces between interacting bodies, incorporating elements of friction, adhesion and sliding zone modeling

На рис. 6 представлена залежність розміру зони зчеплення a від коефіцієнта тертя k (суцільна лінія). Цей результат достатньо близький з результатами, отриманими Л. І. Галінім і В. І. Мосаковським [8] (пунктирна крива).

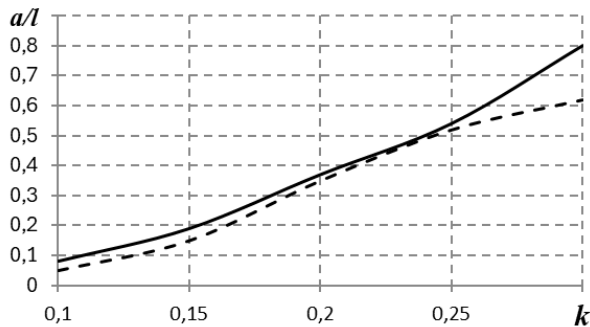


Рис. 6. Залежність розміру зони зчеплення від коефіцієнта тертя

Fig. 6. Dependence of the adhesion zone size on the coefficient of friction

Наукова новизна та практична значимість

У дослідженні запропоновано інтегрований аналітико-програмний підхід до розв'язання оберненої контактної задачі для тіл з різними механічними характеристиками, що враховує

зони зчеплення, тертя, ковзання та відриву. Новизна полягає у поєднанні варіаційної математичної постановки задачі з регуляризациєю Тихонова та скінченно-елементним аналізом, автоматизованим через APDL-скрипти у середовищі ANSYS. Створено ітераційний алгоритм адаптивного уточнення геометричних і фізичних параметрів моделі, який забезпечує ідентифікацію контактних умов та відтворення складної механіки взаємодії системи, з можливістю застосування в широкому класі інженерних задач.

Розроблена методика вирішення оберненої контактної задачі на основі аналітичного підходу та програмної реалізації в середовищі ANSYS є сучасним інструментом для інженерного аналізу складних механічних систем. Алгоритм дозволяє ідентифікувати контактні параметри (коефіцієнти тертя, зони зчеплення та ковзання) на основі фактичних умов навантаження, що має значення для оптимізації конструкцій, підвищення їх надійності та оцінки залишкового ресурсу. Інтеграція скриптової автоматизації через APDL забезпечує гнучке налаштування моделі та її застосування в практиці машинобудування, авіатехніки, біомеханіки та інших галузях, де точність контактної взаємодії є важливою.

Висновки

Проведене дослідження підтвердило ефективність запропонованого підходу до розв'язання оберненої контактної задачі для пружних тіл із різними механічними характеристиками, що моделюються у середовищі ANSYS. Формалізація задачі як варіаційної крайової проблеми з урахуванням її некоректності дозволила застосувати Тихонівську регуляризацию, забезпечивши стійкість та збіжність отриманих розв'язків.

Реалізована скінченно-елементна модель з параметризацією геометрії та фізичних властивостей, поєднана з автоматизованим циклом обчислень через APDL, дала змогу:

– ідентифікувати зони зчеплення, ковзання та відриву;

– обчислювати контактні напруження, переміщення та розподіл дотичних сил.

Запропонована методика продемонструвала можливість для застосування в галузях машинобудування, залізничній, у біомеханіці та інших сферах, де контактна взаємодія відіграє критично важливу роль у забезпеченні точності та надійності конструкцій.

Таким чином, створена модель та алгоритм розв'язання оберненої задачі становлять інструмент для аналізу механіки контактних процесів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Abambres M., Marcy M., Doz G. Potential of Neural Networks for Structural Damage Localization. *Archive ouverte HAL*. 2018. URL: <https://hal.science/hal-02074844v2>
2. Ansys Free Student Software Downloads. *Ansys Inc.* 2025. URL: <https://www.ansys.com/academic/free-student-products>
3. Argatov I., Chai Y. S. Contact Geometry Adaptation in Fretting Wear: A Constructive Review. *Frontiers in Mechanical Engineering*. 2020. Vol. 6. 51. DOI: <https://doi.org/10.3389/fmech.2020.00051>
4. Babych S. Yu. Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*. 2021. Vol. 57. P. 297–305. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01081-7>
5. Meng Y., Xu J., Jin Z., Prakash B., Hu Y. A review of recent advances in tribology. *Friction*. 2020. Vol. 8(2). P. 221–300. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40544-020-0367-2>
6. Morassi A., Kawano A. Inverse Problems for Mechanical Systems. *Springer*. 2025. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-031-89979-9>
7. Obodan N. I., Guk N. A. *Inverse Problems in the Theory of Thin Shells*. London : LAP LAMBERT Academic Publishing. 2012. 252 p.
8. Obodan N. I., Zaitseva T. A., Fridman O. D. Contact Problem for a Rigid Punch and an Elastic Half Space as an Inverse Problem. *Journal of Mathematical Sciences*. 2019. Vol. 240. P. 184–193. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04346-2>
9. Páczelt I., Mróz Z. Optimized punch contact action related to control of local structure displacement. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2019. Vol. 60(5). P. 1921–1936. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00158-019-02300-z>
10. Poole D. L., Mackworth A. K. *Artificial Intelligence*. Cambridge : Cambridge University Press. 2010. 622 p. URL: <https://www.cs.ubc.ca/~poole/aibook/html/index.html>
11. Shyshkanova G., Walther A. Simple layer potential expansion for optimization of contact interaction taking into account friction and adhesion. *Journal of Physics : Conference Series*. 2023. Vol. 2675(1). 012033. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2675/1/012033>
12. Shyshkanova G., Zaytseva T., Zhushman V., Levchenko N., Korotunova O. Solving three-dimensional contact problems for foundation design in green building. *Journal of Physics : Conference Series*. 2023. Vol. 2609. № 1. 012001. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2609/1/012001>
13. Yue T., Abdel Wahab M. A review on fretting wear mechanisms, models and numerical analyses. *Computers. Materials & Continua*. 2019. Vol. 59(2). P. 405–432. DOI: <https://doi.org/10.32604/cmc.2019.04253>

T. A. ZAYTSEVA^{1*}

^{1*}Dep. of Computer Technologies, Oles Honchar Dnipro National University, Nauky Av., 72, Dnipro, Ukraine, 49045, tel. +38 (097) 534 29 68, e-mail ztan2004@ukr.net, ORCID 0000-0002-6346-3390

Inverse Modeling of Structural Contact Mechanics Using the Finite Element Method

Purpose. The research aims to develop and solving an inverse contact problem for two elastic bodies with different stiffnesses, enabling the identification of interaction parameters including friction zones, adhesion, sliding, and separation. A variational mathematical model is formulated, A finite element model is constructed. The use of ANSYS, automated via APDL, allows for the implementation of inverse modeling, considering the complex behavior of the system under external loading. **Methodology.** The study is based on a step-by-step approach to constructing the inverse contact problem, considering transitions between interaction modes (adhesion, sliding, separation), mathematical formalization, and numerical modeling using finite element analysis in ANSYS. First, a direct problem is formulated; based on its analysis, an inverse problem is constructed to identify unknown interaction parameters. A finite element model is then created, followed by result analysis. **Findings.** An inverse contact problem for two deformed bodies with different stiffnesses is formulated, taking into account the modes of adhesion, sliding, and separation. A finite element model is created in the ANSYS. **Originality.** The study proposes an integrated analytical-programmatic approach to solving the inverse contact problem for bodies with varying mechanical characteristics, considering zones of adhesion, sliding, and separation. The novelty lies in the combination of a variational mathematical problem formulation with Tikhonov regularization and finite element analysis, automated through APDL scripts within the ANSYS environment. **Practical value.** The developed methodology for solving inverse contact problems based on the analytical approach and its implementation in the ANSYS environment proves to be an effective tool for analyzing complex mechanical systems. The algorithm allows for the identification of contact interaction parameters (friction, adhesion zones, sliding, separation) based on actual loading conditions.

Keywords: mathematical model; inverse modeling; finite element model; contact interaction; friction; sliding; adhesion; separation; ANSYS; Newton's method

REFERENCES

1. Abambres, M., Marcy, M., & Doz, G. (2018). Potential of Neural Networks for Structural Damage Localization. *Archive ouverte HAL*. Retrieved from <https://hal.science/hal-02074844v2> (in English)
2. Ansys Inc. (2025). *Ansys Free Student Software Downloads*. Retrieved from <https://www.ansys.com/academic/free-student-products> (in English)
3. Argatov, I., & Chai, Y. S. (2020). Contact Geometry Adaptation in Fretting Wear: A Constructive Review. *Frontiers in Mechanical Engineering*, 6, 51. DOI: <https://doi.org/10.3389/fmech.2020.00051> (in English)
4. Babysh, S. Yu., & Yarets'ka, N. O. (2021). Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses. *International Applied Mechanics*, 57, 297–305. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-021-01081-7> (in English)
5. Meng, Y., Xu, J., Jin, Z., Prakash, B., & Hu, Y. (2020). A review of recent advances in tribology. *Friction*, 8(2), 221–300. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40544-020-0367-2> (in English)
6. Morassi, A., & Kawano, A. (2025). *Inverse Problems for Mechanical Systems*. Springer. Retrieved from <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-031-89979-9> (in English)
7. Obodan, N. I., & Guk, N. A. (2012). *Inverse Problems in the Theory of Thin Shells*. London: LAP LAMBERT Academic Publishing. (in English)
8. Obodan, N. I., Zaitseva, T. A., & Fridman, O. D. (2019). Contact Problem for a Rigid Punch and an Elastic Half Space as an Inverse Problem. *Journal of Mathematical Sciences*, 240, 184–193. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04346-2> (in English)
9. Páczelt, I., & Mróz, Z. (2019). Optimized punch contact action related to control of local structure displacement. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 60(5), 1921–1936. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00158-019-02300-z> (in English)
10. Poole, D. L., & Mackworth, A. K. (2010). *Artificial Intelligence*. Cambridge: Cambridge University Press. Retrieved from <https://www.cs.ubc.ca/~poole/aibook/html/index.html> (in English)

11. Shyshkanova, G., & Walther, A. (2023). Simple layer potential expansion for optimization of contact interaction taking into account friction and adhesion. *Journal of Physics: Conference Series*, 2675(1), 012033. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2675/1/012033> (in English)
12. Shyshkanova, G., Zaytseva, T., Zhushman, V., Levchenko, N., & Korotunova, O. (2023). Solving three-dimensional contact problems for foundation design in green building. *Journal of Physics: Conference Series*, 2609(1), 012001. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2609/1/012001> (in English)
13. Yue, T., & Abdel Wahab, M. (2019). A review on fretting wear mechanisms, models and numerical analyses. *Computers, Materials & Continua*, 59(2), 405–432. <https://doi.org/10.32604/cmc.2019.04253> (in English)

Надійшла до редколегії: 22.05.2025

Прийнята до друку: 29.09.2025