

УДК 556.3:[536.24:519.6]

О. А. БУБНОВА¹, В. А. МІРОШНИК², Р. В. МАРКУЛЬ³, П. Б. МАШИХІНА^{4*},
О. В. БЕРЛОВ⁵

¹Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України, вул. Сімферопольська, 2а, Дніпро, Україна, 49005, тел. +38 (099) 654 44 40, ел. пошта bubnova@nas.gov.ua, ORCID 0000-0001-6064-5204

²Каф. «Транспортна інфраструктура», Український державний університет науки і технологій, ННІ ДІІТ, вул. Лазаряна, 2, Дніпро, Україна, 49010, тел. +38 (097) 828 64 87, ел. пошта v.a.miroshnyk@ust.edu.ua, ORCID 0000-0002-8115-0128

³Каф. «Транспортна інфраструктура», Український державний університет науки і технологій, ННІ ДІІТ, вул. Лазаряна, 2, Дніпро, Україна, 49010, тел. +38 (056) 373 15 53, ел. пошта guarangamr@gmail.com, ORCID 0000-0002-7630-8963

^{4*}Каф. «Гідравліка, водопостачання та фізика», Український державний університет науки і технологій, ННІ ДІІТ, вул. Лазаряна, 2, Дніпро, Україна, 49010, тел. +38 (056) 373 15 09, ел. пошта gidro_eko@ukr.net, ORCID 0000-0003-3057-9204

⁵Каф. «Охорона праці, цивільна та техногенна безпека», Український державний університет науки і технологій, ННІ ПДАБА, вул. Архітектора Олега Петрова, 24-а, Дніпро, Україна, 49005, тел. +38 (056) 756 34 57, ел. пошта berlov.oleksandr@pdaba.edu.ua, ORCID 0000-0002-7442-0548

Моделювання процесів фільтрації та тепломасопереносу в підземних водах: прикладні аспекти

Мета. Утилізація рідинних відходів є актуальною проблемою в багатьох країнах світу. Найбільш широко поширеним засобом їх утилізації є створення ставків-відстійників. Однак такий підхід вимагає значних площ землі, що виводяться з експлуатації, а також супроводжується інтенсивним забрудненням зони аерації та ґрунтових вод, які широко використовуються для водопостачання в сільській місцевості. Тому постійно здійснюється пошук альтернативних методів утилізації рідинних відходів для кожного конкретного регіону. Одним з шляхів утилізації рідинних відходів, що часто використовується, зокрема, за кордоном, є підземне заховання відходів. Такий підхід може бути дуже ефективним та не шкодить навколишньому середовищу, якщо є відповідні гідрологічні умови в регіоні, а саме – підземні горизонти, що розташовані глибоко та містять некондиційні підземні води. Використання такого підходу потребує використання спеціалізованих математичних моделей. Метою роботи є розробка швидкорозрахункових математичних моделей для оцінювання впливу підземного заховання рідинних стоків на забруднення підземних вод. **Методика.** Для рішення задач масопереносу домішки в підземному водоносному горизонті використовується рівняння масопереносу. Для моделювання динаміки ґрунтових вод використовується планова модель фільтрації. Для опису процесу геоміграції використовується двовимірне рівняння масопереносу. Процес теплового забруднення ґрунтових вод моделюється на базі рівняння енергії. Для чисельного інтегрування рівняння фільтрації використовується явна різницева схема. Чисельне інтегрування моделюючого рівняння масопереносу та енергії здійснюється на базі змінно-трикутної схеми розщеплення. **Результати.** Розглянуто побудову математичних моделей тепломасопереносу, що дозволяють оцінювати динаміку зміни режиму ґрунтових вод та процесів тепломасопереносу при підземному захованні рідинних відходів. **Наукова новизна.** Розглянуто побудову чисельних моделей для аналізу впливу підземного заховання рідинних відходів на підземні води. Чисельні моделі враховують конвективно-дифузійний процес поширення домішки та зміну теплового режиму в ґрунтових водах. **Практична значимість.** Розглянуті математичні моделі можуть бути використані при проектуванні систем підземного заховання рідинних відходів.

Ключові слова: динаміка підземних вод; тепломасоперенос в підземних водах; полігон відходів; підземне заховання відходів; математичне моделювання

Вступ

Зміна режиму руху підземних вод та їх якісних показників може мати різні сценарії при антропогенній дії, наприклад, при створенні полігонів для рідинних відходів (рис. 1), розта-

шуванні свердловин для систем водопостачання (рис. 2), дренажу територій, де має місце підтоплення (рис. 3).



Рис. 1. Полігон для рідинних відходів (Google Maps)

Fig. 1. Liquid waste landfill (Google Maps)

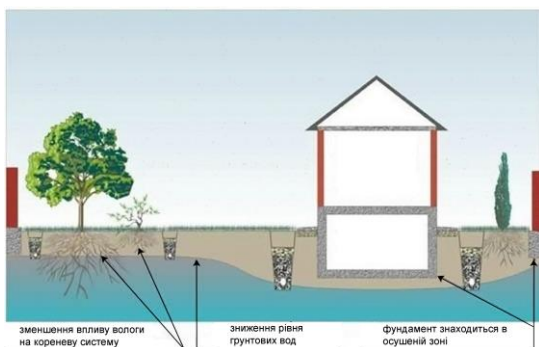
Рис. 2. Свердловина системи водопостачання (<https://kievbur.com.ua/uk/>)Fig. 2. Water supply system well (<https://kievbur.com.ua/uk/>)

Рис. 3. Дренаж підтопленої території

Fig. 3. Drainage of flooded territory

Тому при проектуванні полігонів для складування відходів, ділянок для підземного захоплення рідинних відходів, проектування систем водозабору з підземних джерел та створення системи дренажу на підтоплених територіях потрібно заздалегідь визначати зміну рівня ґрунтових вод, а також зміну їх якісних показників. Ефективним інструментом рішення таких задач є використання методу математичного моделювання [3, 6, 8, 9, 12]. Аналіз літературних джерел показує, що на практиці найчастіше використовуються емпіричні моделі, аналітичні моделі та чисельні моделі [1, 2, 4, 5, 7, 10, 11]. В багатьох країнах світу аналіз динаміки підземних вод здійснюється за допомогою пакету програм MODFLOW [5, 8, 10], що реалізує чи-

сельні моделі фільтрації та геоміграції. Але зараз існує певний дефіцит розрахункових методів для аналізу багатофакторних процесів динаміки підземних вод, що вказує на актуальність створення ефективних математичних моделей в задачах фільтрації та геоміграції.

Мета

Метою статті є розробка Screening Models для чисельного розв'язання задач в галузі динаміки ґрунтових вод та тепломасопереносу в підземних водах.

Методика

Розглядається рішення задач тепломасопереносу в підземних водах. Відомо, що для рішення задач даного класу потрібно:

1) розрахувати поле швидкості підземного потоку при роботі дренажу, свердловин систем водопостачання, інфільтрації стоків з полігонів відходів тощо (перший етап);

2) розв'язати задачу тепломасопереносу в підземних водах (другий етап).

Розглянемо математичні моделі, що використовуються для рішення задач на кожному етапі.

Для рішення задачі фільтрації в безнапірному потоці ґрунтових вод (водотрив – горизонтальний) використовується наступне рівняння:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = k h_m \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + \sum W_i \delta(x - x_i) \delta(y - y_i), \quad (1)$$

де h – глибина потоку; k – коефіцієнт фільтрації; μ – водовіддача; h_m – середня глибина потоку; W_i – інтенсивність інфільтрації води в потік; x_i, y_i – координати свердловин (полігону).

Відзначимо, що « $+W$ » відповідає подачі води в підземний потік, при « $-W$ » має місце виток води з підземного горизонту.

Моделювання динаміки підземного потоку здійснюється в області, що має прямокутну форму. Для рівняння (1) динаміки руху безнапірних підземних вод реалізуються такі крайові умови:

1. При $t = 0$ задається рівень ґрунтових вод в області дослідження.

ЕКОЛОГІЯ ТА ПРОМИСЛОВА БЕЗПЕКА

2. На межі, де потік входить в область дослідження, задається значення глибини $h = h_1$, де h_1 – відома глибина потоку підземних вод.

3. На межі, де потік виходить з області дослідження, задається значення глибини $h = h_2$, де h_2 – відома глибина потоку.

4. На бічних сторонах розрахункової області реалізується гранична умова $\partial h / \partial n = 0$, де n – одиничний вектор зовнішньої нормалі до межі.

Компоненти швидкості підземного потоку визначаються на базі закону Дарсі:

$$u = -k \frac{\partial h}{\partial x}, v = -k \frac{\partial h}{\partial y},$$

де k – коефіцієнт фільтрації.

Для чисельного розв'язання моделюючого рівняння (1) використовується прямокутна різницева сітка. Значення функції h розраховується всередині різницевих комірок.

Для розв'язку моделюючого рівняння (1) здійснюється його розщеплення:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = kh_m \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = \sum W_i \delta(x - x_i) \delta(y - y_i). \quad (3)$$

Чисельне рішення рівняння (2) здійснюється на прямокутній різницевій сітці. Розрахункова залежність для визначення глибини потоку має вигляд:

$$h_{ij}^{n+1} = h_{ij}^n + \Delta t a \frac{h_{i+1,j}^n - 2h_{ij}^n + h_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \Delta t a \frac{h_{i,j+1}^n - 2h_{ij}^n + h_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}, \quad (4)$$

$$\text{де } a = \frac{kh_m}{\mu}.$$

Для чисельного інтегрування рівняння (3) використовується метод Ейлера. Розрахункова залежність має вигляд:

$$h^{n+1} = h^n + \frac{\Delta t}{\mu} \sum W \delta(x - x_i) \delta(y - y_i). \quad (5)$$

Після визначення поля функції h в області дослідження визначаються компоненти вектора швидкості потоку на базі залежностей:

$$u_{ij} = -k \frac{h_{i,j} - h_{i-1,j}}{\Delta x}, v_{ij} = -k \frac{h_{i,j} - h_{i,j-1}}{\Delta y}.$$

Процес теплопереносу в підземних водах моделюється наступним рівнянням (рівняння енергії):

$$\begin{aligned} n \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial uT}{\partial x} + \frac{\partial vT}{\partial y} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(a_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \\ + Q_T \delta(x - x_i) \cdot \delta(y - y_i), \quad (6) \end{aligned}$$

де a_x, a_y – коефіцієнти температуропровідності; u, v – проекції вектора швидкості фільтрації на осі Декартової системи координат; n – пористість; Q_T – інтенсивність джерела емісії тепла; t – час; $\delta(x - x_i) \delta(y - y_i)$ – дельта-функція Дірака.

Для рівняння енергії (6) ставляться такі граничні умови:

1) на вході в розрахункову область: $T = T_{in}$, де T_{in} – відома температура;

2) на виході з розрахункової області:

$$T(i+1, j) = T(i, j),$$

де $T(i+1, j)$ – температура підземного потоку в останній обчислювальній комірці; $T(i, j)$ – температура в попередній обчислювальній комірці.

3) на твердих поверхнях:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0,$$

де n – одинична нормаль до твердої поверхні.

Для рівняння теплопереносу ставиться початкова умова: при $t = 0$ $T = T_0$, T_0 – відома температура води.

Для аналізу процесу поширення домішки в підземних водах використовується 2D рівняння масопереносу:

$$\begin{aligned} n \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial uC}{\partial x} + \frac{\partial vC}{\partial y} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \\ + Q \delta(x - x_i) \cdot \delta(y - y_i), \quad (7) \end{aligned}$$

ЕКОЛОГІЯ ТА ПРОМИСЛОВА БЕЗПЕКА

де C – концентрація домішки; u, v – проекції вектору швидкості фільтрації на вісі Декартової системи координат; μ_x, μ_y – коефіцієнти дисперсії; t – час; Q – інтенсивність емісії домішки; $\delta(x - x_i)\delta(y - y_i)$ – дельта-функція Дірака.

Для рівняння масопереносу ставляться такі граничні умови:

1) на вході в розрахункову область: $C = C_{in}$, де C_{in} – відома концентрація домішки;

2) на виході з розрахункової області:

$$C(i+1, j) = C(i, j),$$

де $C(i+1, j)$ – концентрація домішки в останній обчислювальній комірці; $C(i, j)$ – концентрація домішки в попередній обчислювальній комірці.

3) на твердих поверхнях:

$$\frac{\partial C}{\partial n} = 0,$$

де n – одинична нормаль до твердої поверхні.

Для рівняння масопереносу ставиться початкова умова: при $t = 0$ $C = C_0$, C_0 – відома концентрація домішки.

Для чисельного інтегрування рівняння (7) використовується наступна схема розщеплення:

– перший крок ($k = 1/4$):

$$\begin{aligned} \frac{C_{ij}^{n+k} - C_{ij}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}(L_x^+ C^k + L_y^+ C^k) + \frac{\sigma}{4} C_{ij}^k = \\ = \frac{1}{4}(M_{xx}^+ C^k + M_{xx}^- C^k + \\ + M_{yy}^+ C^n + M_{yy}^- C^n) + \sum_{l=1}^N \frac{Q_l}{4} \delta_l; \quad (8) \end{aligned}$$

– другий крок ($k = n+1/2$; $c = n+1/4$):

$$\begin{aligned} \frac{C_{ij}^k - C_{ij}^c}{\Delta t} + \frac{1}{2}(L_x^- C^k + L_y^- C^k) + \frac{\sigma}{4} C_{ij}^k = \\ = \frac{1}{4}(M_{xx}^- C^k + M_{xx}^+ C^c + \\ + M_{yy}^- C^k + M_{yy}^+ C^c) + \sum_{l=1}^N \frac{Q_l}{4} \delta_l; \quad (9) \end{aligned}$$

– третій крок ($k = n+3/4$; $c = n+1/2$):

$$\begin{aligned} \frac{C_{ij}^k - C_{ij}^c}{\Delta t} + \frac{1}{2}(L_x^+ C^k + L_y^+ C^k) + \frac{\sigma}{4} C_{ij}^k = \\ = \frac{1}{4}(M_{xx}^- C^c + M_{xx}^+ C^k + \\ + M_{yy}^- C^k + M_{yy}^+ C^c) + \sum_{l=1}^N \frac{Q_l}{4} \delta_l; \quad (10) \end{aligned}$$

– четвертий крок ($k = n+1$; $c = n+3/4$):

$$\begin{aligned} \frac{C_{ij}^k - C_{ij}^c}{\Delta t} + \frac{1}{2}(L_x^- C^k + L_y^- C^k) + \frac{\sigma}{4} C_{ij}^k = \\ = \frac{1}{4}(M_{xx}^- C^k + M_{xx}^+ C^c + \\ + M_{yy}^- C^c + M_{yy}^+ C^k) + \sum_{l=1}^N \frac{Q_l}{4} \delta_l. \quad (11) \end{aligned}$$

де $L_x, L_y, \dots$ – різницеві оператори, пояснення для яких наведено в [1].

Чисельне інтегрування рівняння теплопереносу (6) здійснюється аналогічно, використовуючи залежності (8)–(11).

Результати

Далі наведено результати обчислювального експерименту. Розглядається процес скиду забруднених стічних вод в підземний водоносний горизонт. Розрахунок було проведено при таких даних:

1. Скид здійснюється через дві свердловини (перший сценарій) та три свердловини (другий сценарій).

2. Інтенсивність скиду $W = 1$ (безрозмірне значення).

3. Глибина потоку на початку розрахункової області $h = 14$ м.

4. Глибина потоку в кінці розрахункової області $h = 13,6$ м.

5. Коефіцієнт фільтрації водоносного шару 5 м/доб.

6. Порозність 0,3.

7. Фонова концентрація домішки в підземному горизонті $C = 0$.

8. Довжина розрахункової області $L_x = 1$ (безрозмірне значення).

ЕКОЛОГІЯ ТА ПРОМИСЛОВА БЕЗПЕКА

9. Ширина розрахункової області $L_y = 0,5$ (безрозмірне значення).

Далі на рисунках показано динаміку розвитку областей забруднення в підземному водоносному горизонті для різних моментів часу.

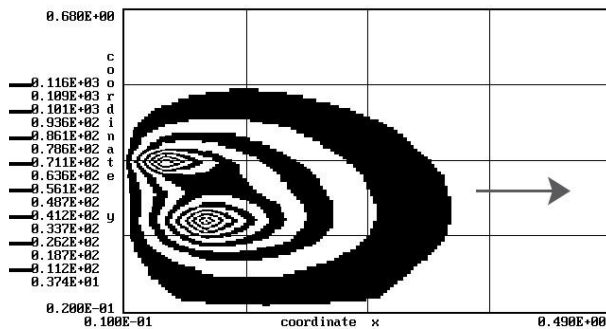


Рис. 4. Поле концентрації домішки в підземному потоці, $t = 0,17$ (сценарій № 1)

Fig. 4. Field of impurity concentration in underground flow, $t = 0.17$ (scenario No. 1)

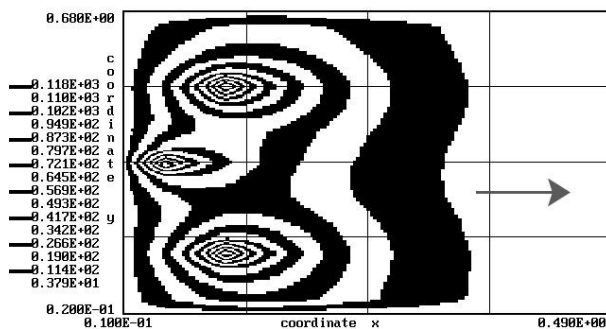


Рис. 5. Поле концентрації домішки в підземному потоці, $t = 0,17$ (сценарій № 2)

Fig. 5. Field of impurity concentration in underground flow, $t = 0.17$ (scenario No. 2)

Аналіз даних, що наведені на рис. 4–5, показує, що біля свердловин формуються зони з високим градієнтом концентрації домішки, що

обумовлено швидкою зміною поля швидкості потоку. Також можна бачити, як формуються області взаємовпливу свердловин. Концентрація домішки поступово зменшується при віддаленні від свердловин, що здійснюють закачування рідинних відходів в підземний горизонт.

Таким чином, розглянута чисельна модель дає можливість визначити розміри, форму та інтенсивність областей забруднення в підземному горизонті.

Наукова новизна та практична значимість

Запропоновано комплекс чисельних моделей для проведення обчислювального експерименту по дослідженню багатфакторних процесів фільтрації та тепломасопереносу в безнапірному потоці ґрунтових вод.

Побудовані чисельні моделі можуть бути використані на етапі ескізного проєктування систем дренажу, водопостачання; аналізу процесів геоміграції при інфільтрації забруднювачів з полігонів відходів в підземний водоносний горизонт.

Висновки

1. Розглянуто побудову чисельної моделі для рішення задачі фільтрації в безнапірному водоносному горизонті.
2. Розглянуто побудову чисельних моделей для розрахунку процесу тепломасопереносу в потоці ґрунтових вод.
3. Для побудови чисельних моделей використано явні схеми, що дозволяє реалізувати просту програмну реалізацію моделей.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Згуровский М. З., Скопецкий В. В., Хрущ В. К., Беляев Н. Н. *Численное моделирование распространения загрязнения в окружающей среде*. Киев : Наукова думка, 1997. 367 с.
2. Кошляков О. С., Мокієнко В. І. *Практикум з динаміки підземних вод*. Київ : Київський національний університет імені Т. Шевченка, 2006. 77 с.
3. AL-Hashmi, S. S. S. *Numerical simulation of groundwater flow and nitrate transport in Wadi Samail Catchment. A thesis for the degree Doctor of Philosophy in Civil Engineering*. Oman : Sultan Qaboos University, 2020. 116 p.
4. Ger M., Baran O. U., Manogl B. Numerical simulation of groundwater contamination. *Hydraulic Engineering Software*. 2000. № VIII. P. 337–352.

5. Harbaugh A. W. *MODFLOW-2005 : the U. S. Geological Survey modular ground-water model – the ground-water flow process*. USA : U. S. Geological Survey, Reston, Virginia, 2005. 253 p.
DOI: <https://doi.org/10.3133/tm6A16>
6. Koohestani N., Halaghi M. M., Dehghani A. A. Numerical Simulation of Groundwater Level Using MODFLOW Software (a Case Study: Narmab Watershed, Golestan Province). *International Journal of Advanced Biological and Biomedical Research*. 2013. № 8. P. 858–873.
7. Masood Z. B., Abd Ali Z. T. Numerical modeling of two-dimensional simulation of groundwater protection from lead using different sorbents in permeable barriers. *Environmental Engineering Research*. 2019. Vol. 25(4). P. 605–613. DOI: <https://doi.org/10.4491/eer.2019.237>
8. Pilechi A., Mohammadian A., Murphy E. A numerical framework for modeling fate and transport of microplastics in inland and coastal waters. *Marine Pollution Bulletin*. 2022. Vol. 184. P. 1–15.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.marpolbul.2022.114119>
9. Sherzod D., Abdullaeva B., Kubyasev K., Abdullaev O. Numerical study of filtration process of ground and pressure waters in multilayer porous media. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2020. 896. P. 1–15. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/896/1/012069>
10. Tizro A. T., Sarhadi B., Mohamadi M. MODFLOW/MT3DMS based modeling of leachate pollution transfer in solid waste disposal of Bahar plain deep aquifer. *Iranian Journal of Health Sciences*. 2018. 6(2). P. 11–30.
DOI: <https://doi.org/10.18502/jhs.v6i2.46>
11. Wali S. U., Umar K. J., Abor I. G. Modelling Flow And Fate Of Contaminants In Groundwater Using A Version Of The Five Steady-State Pollutant Transport Models. *Journal of Electronics, Computer Networking and Applied Mathematics*. 2021. Vol. 1(1). P. 1–30. DOI: <https://doi.org/10.55529/jecnam.11.1.30>
12. Zio S., Lamien B., Beidari M., Inoussa T. Numerical simulation of pollutants transport in groundwater using deep neural networks informed by physics. *Gulf Journal of Mathematics*. 2024. Vol. 16(2). P. 315–323.
DOI: <https://doi.org/10.56947/gjom.v16i2.1863>

O. A. BUBNOVA¹, V. A. MIROSHNYK², R. V. MARKUL³, P. B. MASHYKHINA^{4*},
O. V. BERLOV⁵

¹M.S. Poliakov Institute of Geotechnical Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Simferopolska St., 2a, Dnipro, Ukraine, 49005, tel. +38 (099) 654 44 40, e-mail bubnova@nas.gov.ua, ORCID 0000-0001-6064-5204

²Dep. «Transport Infrastructure», Ukrainian State University of Science and Technologies, SEI DIIT, Lazaryana St., 2, Dnipro, Ukraine, 49010, tel. +38 (097) 828 64 87, e-mail v.a.miroshnyk@ust.edu.ua, ORCID 0000-0002-8115-0128

³Dep. «Transport Infrastructure», Ukrainian State University of Science and Technologies, SEI DIIT, Lazaryana St., 2, Dnipro, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 373 15 53, e-mail guarangamr@gmail.com, ORCID 0000-0002-7630-8963

^{4*}Dep. «Hydraulics, Water Supply and Physics», Ukrainian State University of Science and Technologies, SEI DIIT, Lazaryana St., 2, Dnipro, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 373 15 09, e-mail gidro_eko@ukr.net, ORCID 0000-0003-3057-9204

⁵Dep. of Labor Protection, Civil and Technogenic Safety, Ukrainian State University of Science and Technologies, SEI PSACEA, Architect Oleh Petrov St., 24-a, Dnipro, Ukraine, 49005, tel. +38 (056) 756 34 57, e-mail berlov.oleksandr@pdaba.edu.ua, ORCID 0000-0002-7442-0548

Modelling of Filtration and Heat and Mass Transfer Processes in Groundwater: Applied Aspects

Purpose. Liquid waste disposal is an urgent problem in many countries around the world. The most widely used method of liquid waste disposal is the creation of sedimentation ponds. However, this approach takes a significant amount of land out of use and, in combination with intensive pollution of the aeration zone and groundwater, is widely used for water supply in rural areas. Therefore, alternative methods of liquid waste disposal are constantly being sought for each specific region. One of the ways to dispose of liquid waste that is often used, in particular abroad, is underground disposal. This approach can be very effective and environmentally friendly if there are suitable hydrological conditions in the region, namely deep underground horizons containing substandard groundwater. This approach requires the use of specialised mathematical models. The aim of this study is to develop fast-calculating mathematical models for assessing the impact of underground disposal of liquid wastewater on groundwater pollution. **Methodology.** The mass transfer equation is used to solve the problems of mass transfer of impurities in the underground aquifer. A planned filtration model is used to model groundwater dynamics. A two-dimensional mass transfer equation is used to describe the geomigration process. The process of thermal contamina-

tion of groundwater is modeled on the basis of the energy equation. An explicit difference scheme is used to numerically integrate the filtration equation. Numerical integration of the modeling equation of mass transfer and energy is carried out on the basis of a variable-triangular splitting scheme. **Findings.** The development of mathematical models of heat and mass transfer, which allow to estimate the dynamics of changes in the groundwater regime and heat and mass transfer processes during underground disposal of liquid waste, is considered. **Originality.** The article considers the development of numerical models for analyzing the impact of underground disposal of liquid waste on groundwater. Numerical models take into account the convective-diffusion process of impurity propagation and changes in the thermal regime in groundwater. **Practical value.** The considered mathematical models can be used in the design of underground liquid waste disposal systems.

Keywords: groundwater dynamics; heat and mass transfer in groundwater; landfill; underground disposal of waste; mathematical modeling

REFERENCES

1. Zghurovskiy, M. Z., Skopetskiy, V. V., Khrushch, V. K., & Beliaev, N. N. (1997). *Chyslennoe modelyrovanye rasprostraneniya zahriazneniya v okruzhaiushchei srede*. Kyev: Naukova dumka. (in Russian)
2. Koshlyakov, O. E., & Mokienko, V. I. (2006). *Workshop on the dynamics of groundwater*. Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv. (in Ukrainian)
3. AL-Hashmi, S. S. S. (2020). *Numerical simulation of groundwater flow and nitrate transport in Wadi Samail Catchment*, A thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree Doctor of Philosophy in Civil Engineering. Oman: Sultan Qaboos University. (in English)
4. Ger, M., Baran, O. U., & Manogl, B. (2000). Numerical simulation of groundwater contamination. *Hydraulic Engineering Software*, VIII, 337-352. (in English)
5. Harbaugh, A. W. (2005). *MODFLOW-2005: the U. S. Geological Survey modular ground-water model - the ground-water flow process*. USA: U. S. Geological Survey, Reston, Virginia. DOI: <https://doi.org/10.3133/tm6A16> (in English)
6. Koohestani, N., Halaghi, M. M., & Dehghani, A. A. (2013). Numerical Simulation of Groundwater Level Using MODFLOW Software (a Case Study: Narmab Watershed, Golestan Province). *International Journal of Advanced Biological and Biomedical Research*, 8, 858-873. (in English)
7. Masood, Z. B., & Abd Ali, Z. T. (2019). Numerical modeling of two-dimensional simulation of groundwater protection from lead using different sorbents in permeable barriers. *Environmental Engineering Research*, 25(4), 605-613. DOI: <https://doi.org/10.4491/eer.2019.237> (in English)
8. Pilechi, A., Mohammadian, A., & Murphy, E. (2022). A numerical framework for modeling fate and transport of microplastics in inland and coastal waters. *Marine Pollution Bulletin*, 184, 1-15. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.marpolbul.2022.114119> (in English)
9. Sherzod, D., Abdullaeva, B., Kubyasev, K., & Abdullaev, O. (2020). Numerical study of filtration process of ground and pressure waters in multilayer porous media. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 896, 1-15. DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/896/1/012069> (in English)
10. Tizro, A. T., Sarhadi, B., & Mohamadi, M. (2018). MODFLOW/MT3DMS based modeling of leachate pollution transfer in solid waste disposal of Bahar plain deep aquifer. *Iranian Journal of Health Sciences*, 6(2), 11-30. DOI: <https://doi.org/10.18502/jhs.v6i2.46> (in English)
11. Wali, S. U., Umar, K. J., & Abor, I. G. (2021). Modelling Flow and Fate of Contaminants in Groundwater Using a Version of the Five Steady-State Pollutant Transport Models. *Journal of Electronics, Computer Networking and Applied Mathematics*, 1(1), 1-30. DOI: <https://doi.org/10.55529/jecnam.11.1.30> (in English)
12. Zio, S., Lamien, B., Beidari, M., & Inoussa, T. (2024). Numerical simulation of pollutants transport in groundwater using deep neural networks informed by physics. *Gulf Journal of Mathematics*, 16(2), 315-323. DOI: <https://doi.org/10.56947/gjom.v16i2.1863> (in English)

Надійшла до редколегії: 01.05.2025

Прийнята до друку: 15.09.2025