

ЕКОЛОГІЯ ТА ПРОМИСЛОВА БЕЗПЕКА

UDC 502.174:[556.3:519.87]

O. A. BUBNOVA^{1*}, V. A. MIROSHNYK², R. V. MARKUL³, P. B. MASHYKHINA⁴,
L. H. TATARKO⁵

^{1*}M. S. Poliakov Institute of Geotechnical Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Simferopolska St., 2a, Dnipro, Ukraine, 49005, tel. +38 (099) 654 44 40, e-mail bubnova@nas.gov.ua, ORCID 0000-0001-6064-5204

²Dep. «Transport Infrastructure», Ukrainian State University of Science and Technologies, SEI DIIT, Lazaryana St., 2, Dnipro, Ukraine, 49010, tel. +38 (097) 828 64 87, e-mail v.a.miroshnyk@ust.edu.ua, ORCID 0000-0002-8115-0128

³Dep. «Transport Infrastructure», Ukrainian State University of Science and Technologies, SEI DIIT, Lazaryana St., 2, Dnipro, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 373 15 53, e-mail guarangamr@gmail.com, ORCID 0000-0002-7630-8963

⁴Dep. «Hydraulics, Water Supply and Physics», Ukrainian State University of Science and Technologies, SEI DIIT, Lazaryana St., 2, Dnipro, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 373 15 09, e-mail gidro_eko@ukr.net, ORCID 0000-0003-3057-9204

⁵Dep. «Power Engineering», Ukrainian State University of Science and Technologies, SEI USUCT, Nauky Av., 8, Dnipro, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 753 56 38, e-mail larisa.tatarko@gmail.com, ORCID 0000-0002-2080-6090

Mathematical Modeling of Filtration and Geomigration Under Conditions of Anthropogenic Load

Purpose. The aim of this study is to develop mathematical models for predicting the processes of contamination of the aeration zone and groundwater in the event of leachate leakage from a solid waste landfill. The mathematical models take into account typical hydrological parameters: porosity of the aeration zone, aquifer, filtration coefficient of the aeration zone, filtration coefficient of the underground aquifer, intensity of leachate infiltration into the aeration zone and underground aquifer. **Methodology.** A one-dimensional filtration equation and a one-dimensional mass transfer equation were used to model the process of infiltrate migration in the aeration zone. The modeling of the process of contamination of the underground aquifer, which receives infiltrate from the landfill, was carried out on the basis of a two-dimensional equation (planned model) of geomigration. For the numerical integration of the model equations, a variable-triangular finite-difference splitting scheme was used. The numerical integration of the two-dimensional geomigration equation is performed using the splitting scheme. The peculiarity of the proposed numerical models is that the value of the unknown function can be determined by an explicit formula.

Findings. Numerical models have been developed to solve the complex problem of predicting the contamination of the aeration zone and underground flow in the case of infiltration of an impurity from a solid waste landfill.

Originality. Numerical models of filtration and mass transfer of impurities in the case of migration of infiltrate from a municipal solid waste landfill through the aeration zone and into groundwater are proposed. To apply these mathematical models, standard hydrological information is required. The models are aimed at solving complex problems in the field of environmental safety and protection. They make it possible to determine the negative impact of landfills on the environment at the stage of justifying the location of future landfills and their size.

Practical value. The proposed mathematical models use standard hydrological information, which is important for serial calculations in design organizations, and can be useful for assessing the impact of landfills on environmental pollution.

Key words: solid waste landfill; pollution of the aeration zone; groundwater pollution; mathematical model; filtration equation; mass transfer equation

Introduction

Solid waste landfills are facilities located in all countries of the world (Fig. 1) and are powerful sources of environmental pollution [6, 9].

The amount of waste is increasing over time in countries around the world (Fig. 2), which leads to the need to expand existing landfills and create new ones.



Fig. 1. Waste landfill (<https://cutt.ly/8rsX9C4q>)

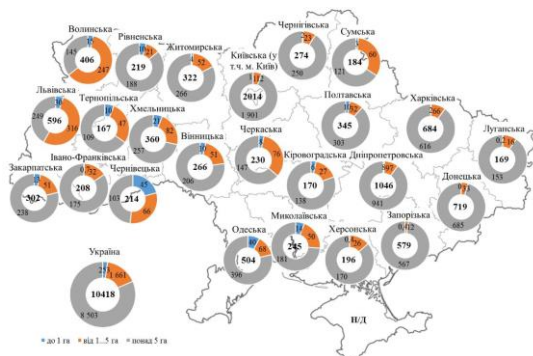


Fig. 2. Annual volumes of household waste disposal at landfills and dumps by regions of Ukraine in 2021, thousand tons [9]

The operation of solid waste landfills causes intense pollution of the air, as well as the aeration zone and groundwater. Precipitation filtering through the landfill «body» leaches out hazardous substances. This leachate contains a significant number of hazardous substances: sulfates, chlorides, nitrates, lead, zinc, cadmium, antimony, organic substances, etc. This leachate is partially discharged through the drainage system (Fig. 3), but despite the protection system, pollutants infiltrate into the aeration zone at almost every landfill. Since the landfills have been in operation for a long time, the pollutants contained in the leachate pass through the aeration zone and groundwater contamination begins.



Fig. 3. Drainage water from the waste landfill

Thus, a contamination zone is formed in the groundwater beneath the landfill, which migrates over time. In addition, it should be borne in mind that groundwater is «unloaded» into water bodies. Thus, the negative impact of landfills will be not only in the contamination of the aeration zone, groundwater, but also surface water.

In this regard, an important problem arises - assessment of the intensity of contamination, primarily of groundwater. It is necessary to have scientifically grounded information on the dynamics of development of contamination areas in groundwater during the landfill operation for a certain period of time, during further landfill development (increase in the size of the storage facility), and also to determine the «reaction» of groundwater to the landfill closure.

Determination of areas of chemical contamination of groundwater is a problem of modeling the processes of filtration and geomigration. To solve problems of this class, analytical and numerical models are most commonly used [1–5, 7, 8, 10, 13]. Analytical models make it possible to obtain an exact solution to the modeling equations. Such solutions are of great importance in scientific research. In addition, analytical solutions of modeling equations can be used to verify other models. Numerical models have a wide operating range and make it possible to obtain solutions to problems that cannot be obtained analytically. In practice, commercial codes are widely used, for example, the MODFLOW software package [11, 12].

Purpose

To develop a mathematical model for assessing the areas of chemical contamination of groundwater in case of leakage of leachate from a solid waste landfill.

Methodology

Sketch of the computational region is shown in Fig. 1.



Fig. 4. Sketch of the computational region:
1 – waste landfill; 2 – aeration zone; 3 – ground waters

The process of filtrate (contaminated liquid) movement in the aeration zone will be modeled by the following equations: the filtration equation (Darcy's law) (1) and the mass transfer equation (2):

$$\mu \frac{dz}{dt} = k \frac{H(t) + z}{z}, \quad (1)$$

$$n \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial uC}{\partial z} + \sigma C = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial C}{\partial z} \right), \quad (2)$$

where μ – the lack of saturation; z – the depth of soil wetting; k – the filtration coefficient; H – the level of the neutralizing solution on the ground surface; n – the active porosity; C – the concentration of the impurity in the filtered solution; σ – the sorption rate constant; u – the filtration rate; D – the dispersion coefficient.

Note that the z -axis is directed downward from the foot of the landfill in the direction of ground-water flow.

If the aeration zone consists of soil layers of different permeability, the model uses a generalized filtration coefficient determined by the formula of Kamensky G. N.:

$$k = \frac{m}{\sum_i \frac{m_i}{k_i}},$$

where m – the capacity of the aeration zone; m_i – the capacity of the i -th soil layer in the aeration zone with a filtration coefficient k_i .

For the numerical solution of the 1D mass transfer equation, a difference scheme is used. To develop it, the following transformations are performed:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t};$$

$$u = u^+ + u^-; u^+ = \frac{u + |u|}{2}; u^- = \frac{u - |u|}{2};$$

$$\frac{\partial uC}{\partial x} = \frac{\partial u^+ C}{\partial x} + \frac{\partial u^- C}{\partial x};$$

$$\frac{\partial u^+ C}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^+ C_i - u_i^+ C_{i-1}}{\Delta x} = L_x^+ C;$$

$$\frac{\partial u^- C}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^- C_{i+1} - u_i^- C_i}{\Delta x} = L_x^- C;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} &= \frac{C_{i+1} - 2C_i + C_{i-1}}{\Delta x^2} = \frac{C_{i+1} - C_i}{\Delta x^2} + \frac{-C_i + C_{i-1}}{\Delta x^2} = \\ &= M_{xx}^- C + M_{xx}^+ C. \end{aligned}$$

Next, to solve the equation, we split it into two steps:

– first step:

$$\begin{aligned} n \frac{C_i^{n+1/2} - C_i^n}{\Delta t} + L_x^+ C^{n+1/2} + \frac{\sigma}{2} C^{n+1/2} = \\ = \frac{1}{2} M_{xx}^- C^n + \frac{1}{2} M_{xx}^+ C^{n+1/2}; \end{aligned}$$

– second step:

$$\begin{aligned} n \frac{C_i^{n+1} - C_i^{n+1/2}}{\Delta t} + L_x^- C^{n+1} + \frac{\sigma}{2} C^{n+1} = \\ = \frac{1}{2} M_{xx}^- C^{n+1} + \frac{1}{2} M_{xx}^+ C^{n+1/2}. \end{aligned}$$

From these dependencies, the unknown value of the impurity concentration on the upper time layer is found by an explicit running-count formula.

The rate of infiltration is determined as follows (analytical solution by Polubarinova-Kochina P.Y.)

$$u = \frac{k(1-\mu)}{2\mu} + \sqrt{\frac{k^2(1-\mu)^2}{4\mu^2} + \frac{kq}{\mu}}, \quad (3)$$

where q – the infiltration rate from the landfill.

The modeling of leachate spreading from the landfill in groundwater is based on the following mass transfer equation (equation averaged over the depth of the groundwater flow, planned model):

$$n \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial uC}{\partial x} + \frac{\partial vC}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \sum Q(t) \cdot \delta(x - x_i) \delta(y - y_i), \quad (4)$$

where C – is the average value of the concentration of a hazardous substance in the groundwater flow; u, v – are the components of the groundwater flow velocity vector in the projection on the x, y coordinate axes, respectively; x_i, y_i – are the Cartesian coordinates of the i -th source of infiltration of a hazardous substance into the groundwater flow; t – time; μ_x, μ_y – dispersion coefficients; $\delta(x_i, y_i)$ – Dirac's delta function, which is used in the model to set the location of the hazardous substance from the landfill into the groundwater flow; Q – intensity of infiltration of a hazardous substance from the infiltration zone.

For equation (1), the boundary conditions are as following:

1) at $t = 0$, the concentration of the impurity in the area of study is set;

2) at the boundary where the flow enters the study area, the condition $C = C_1$ is set, where C_1 is a known known concentration of an impurity.

3) at the boundary where the flow leaves the study area, $\frac{\partial C}{\partial n} = 0$ is set, where n is a unit vector of the normal to the boundary.

For the numerical integration of equation (4), a rectangular difference grid is used. To build a numerical model, the following physical splitting of the equation is performed:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial uC}{\partial x} + \frac{\partial vC}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_y \frac{\partial C}{\partial y} \right).$$

The splitting scheme for the convective transport equation is written as follows:

– at the first step of the splitting, the difference equation is as follows:

$$\frac{C_{i,j}^k - C_{i,j}^n}{\Delta t} + L_x^+ C^k + L_y^+ C^k = 0;$$

– in the second step of the splitting, the difference equation is as follows:

$$\frac{C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^k}{\Delta t} + L_x^- C^{n+1} + L_y^- C^{n+1} = 0.$$

The unknown value of C in each equation is determined by the «running account» formula.

For the numerical integration of the diffusion equation, a two-stage difference splitting scheme (A. A. Samarsky's scheme) is used, which has the form:

$$\frac{C_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - C_{i,j}^n}{\Delta t} = \left[\mu_x \frac{-C_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} \right] + \left[\mu_y \frac{-C_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y^2} \right],$$

$$\frac{C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \left[\mu_x \frac{C_{i+1,j}^{n+1} - C_{i,j}^{n+1}}{\Delta x^2} \right] + \left[\mu_y \frac{C_{i,j+1}^{n+1} - C_{i,j}^{n+1}}{\Delta y^2} \right].$$

The unknown value of C in each equation is determined by the «running account» formula.

The computer code was created on the basis of the developed numerical model. The programming language is FORTRAN.

To conduct a computational experiment based on the developed computer code, the following data need to be specified:

- 1) the size of the calculation area;
- 2) the location of the landfill;
- 3) step by step;
- 4) values of dispersion coefficients;
- 5) hydrological parameters of the underground flow;
- 6) intensity of infiltrate emission into the groundwater flow;
- 7) capacity of the aeration zone;
- 8) filtration coefficient of aeration zones;
- 9) permeability (for aeration zone and aquifer).

In the computational experiment, the modeling is performed as follows:

ЕКОЛОГІЯ ТА ПРОМИСЛОВА БЕЗПЕКА

1) calculate the infiltrate migration in the aeration zone for the time step Δt . The intensity of contamination of the aeration zone is determined the boundary of the soaking zone within the aeration zone is determined.

2) determine the time when the infiltrate seeps to the boundary «aeration zone – free groundwater surface». This will be the time when the contamination of the groundwater flow under the landfill begins.

3) Determine the rate of infiltration of the impurity from the landfill into the underground stream.

4) the calculation of the dynamics of the formation of the contamination area in groundwater begins.

Findings

The developed numerical models were used to solve the modeling problem. The leachate leakage from the landfill was considered and the task was to study the dynamics of the contamination zone formation in the groundwater under the landfill.

The results of the computational experiment are shown in Figs. 5–8. The time and concentration of chlorides in groundwater are shown in a dimensionless form.

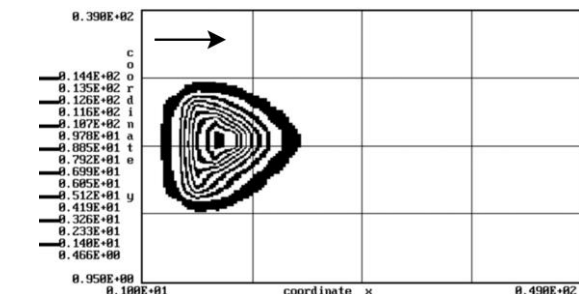


Fig. 5. Contaminated zone in ground waters, $t = 2.2$

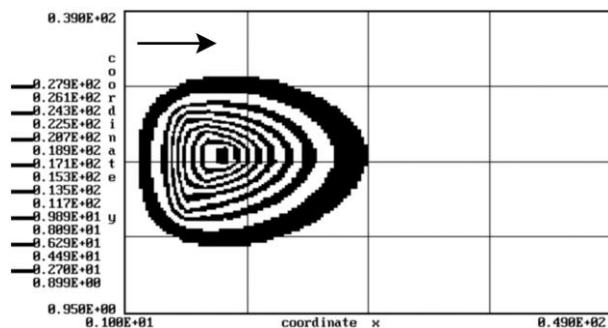


Fig. 6. Contaminated zone in ground waters, $t = 2.6$

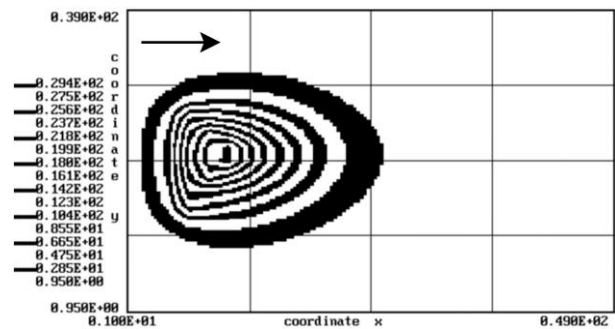


Fig. 7. Contaminated zone in ground waters, $t = 2.9$

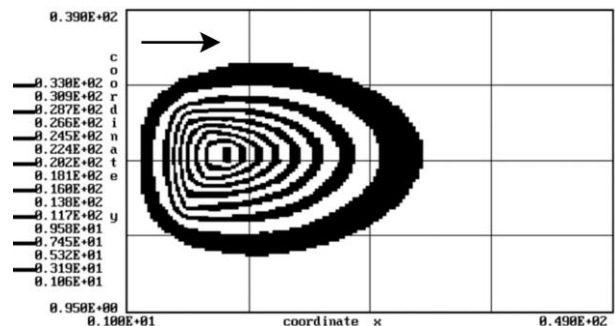


Fig. 8. Contaminated zone in ground waters, $t = 3.4$

The analysis of the data in Figs. 5–8 shows that over time, the contamination zone increases in size and «stretches» in the direction of groundwater flow. The width of the contamination zone increases due to dispersion.

Worthy of note that computational time was 4 sec.

Originality and practical value

Numerical models of filtration and mass transfer of impurities during the migration of infiltrate from a solid waste landfill through the aeration zone and into groundwater have been developed.

A special feature of the proposed mathematical models is the use of standard hydrological information. The models are aimed at solving complex problems in the field of environmental safety and protection. The developed models make it possible to determine the negative impact of landfills on the environment at the stage of justifying the location of future landfills and their size.

Conclusions

1. A mathematical model has been developed to analyze the dynamics of contamination of the aeration zone during the infiltration of an impurity from a solid waste landfill. The modeling is based

on the equations of new-dimensional filtration and mass transfer.

2. A mathematical model for predicting groundwater contamination by infiltrate from a solid waste landfill was developed.

3. The proposed mathematical models use standard hydrological information, which is important for serial calculations in design organizations.

LIST OF REFERENCES

1. Біляєв, М. М., Козачина, В. В. Моделювання нестационарного процесу масопереносу в підземних водах. *Наука та прогрес транспорту*. 2024. № 2 (106). С. 18–25. DOI: <https://doi.org/10.15802/stp2024/305701>
2. Бомба А. Я., Булавацький В. М., Скопечкий В. В. *Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки*: монографія. Київ : Наукова думка, 2007. 308 с.
3. Бомба А. Я., Каштан С. С., Пригорницький Д. О., Ярошак С. В. *Методи комплексного аналізу*: монографія. Рівне : НУВГП, 2013. 415 с.
4. Власюк А. П., Остапчук О. П. *Математичне моделювання переносу сольових розчинів при фільтрації підземних вод у ґрунтових масивах*: монографія. Рівне : НУВГП, 2015. 214 с.
5. Власюк А. П., Остапчук О. П., Шмендрук А. Ю. Чисельне моделювання масопереносу при плановій стаціонарній фільтрації сольових розчинів в двозв'язних кільцевих областях. *Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. Серія: технічні науки*. 2012. Вип. 2 (58). С. 204–211.
6. Орлова Т. О. *Оцінки екологічного стану земельних ділянок, зайнятих відходами та об'єктами поводження з ними* : дис. ... канд. техн. наук. Київ : КНУБА, 2008. 148 с.
7. Пшинько А. Н., Беляев Н. Н., Калашников И. В. *Эколого-гидрогеологическое обоснование природоохранных мероприятий при ликвидации последствий аварийных разливов*: монографія. Днепропетровск : Нова ідеологія, 2011. 173 с.
8. Рудаков Д. В. *Математичні методи в охороні підземних вод*. Дніпропетровськ : НГУ, 2012. 158 с.
9. Сатін І. В., Куций Д. В. Емісії парникових газів з місць видалення побутових відходів та заходи щодо їх скорочення. *Наукові доповіді національного університету біоресурсів і природокористування України*. 2024. № 3 (109). С. 1–31. DOI: [https://doi.org/10.31548/dopovidi.3\(109\).2024.003](https://doi.org/10.31548/dopovidi.3(109).2024.003)
10. Bonelli S. Approximate solution to the diffusion equation and its application to seepage-related problems. *Applied Mathematical Modeling*. 2009. Vol. 33. Iss. 1. P. 110–126. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2007.10.017>
11. Harbaugh A. W. *MODFLOW-2005: the U.S. Geological Survey modular ground-water model--the ground-water flow process*. USA : U. S. Geological Survey, Reston, Virginia, 2005. 253 p. DOI: <https://doi.org/10.3133/tm6A16>
12. Koohestani N., Halaghi M. M., Dehghani A. A. Numerical Simulation of Groundwater Level Using MODFLOW Software (a Case Study: Narmab Watershed, Golestan Province). *International Journal of Advanced Biological and Biomedical Research*. 2013. Vol. 1. Iss. 8. P. 858–873.
13. Zhangxin C., Yuanle M. *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*. USA, Philadelphia : SIAM, 2006. 531 p. DOI: <https://doi.org/10.1137/1.9780898718942>

О. А. БУБНОВА^{1*}, В. А. МІРОШНИК², Р. В. МАРКУЛЬ³, П. Б. МАШИХІНА⁴,
Л. Г. ТАТАРКО⁵

^{1*}Інститут геотехнічної механіки ім. М. С. Полякова НАН України, вул. Сімферопольська, 2а, Дніпро, Україна, 49005, тел. +38 (099) 654 44 40, ел. пошта bubnova@nas.gov.ua, ORCID 0000-0001-6064-5204

²Каф. «Транспортна інфраструктура», Український державний університет науки і технологій, ННІ ДІПТ, вул. Лазаряна, 2, Дніпро, Україна, 49010, тел. +38 (097) 828 64 87, ел. пошта v.a.miroshnyk@ust.edu.ua, ORCID 0000-0002-8115-0128

³Каф. «Транспортна інфраструктура», Український державний університет науки і технологій, ННІ ДІПТ, вул. Лазаряна, 2, Дніпро, Україна, 49010, тел. +38 (056) 373 15 53, ел. пошта guarangamr@gmail.com, ORCID 0000-0002-7630-8963

⁴Каф. «Гідравліка, водопостачання та фізика», Український державний університет науки і технологій, ННІ ДІПТ, вул. Лазаряна, 2, Дніпро, Україна, 49010, тел. +38 (056) 373 15 09, ел. пошта gidro_eko@ukr.net, ORCID 0000-0003-3057-9204

⁵Каф. енергетики, Український державний університет науки і технологій, ННІ УДХТУ, пр. Науки, 8, Дніпро, Україна, 49010, тел. +38 (056) 753 56 38, ел. пошта larisa.tatarko@gmail.com, ORCID 0000-0002-2080-6090

Математичне моделювання фільтрації та геоміграції в умовах техногенного навантаження

Мета. У роботі передбачено розробити математичні моделі для прогнозування процесів забруднення зони аерації та підземних вод у разі витоку фільтрату з полігону твердих побутових відходів. Математичні моделі враховують типові гідрологічні параметри: пористість зони аерації, водоносного горизонту, коефіцієнт фільтрації зони аерації, коефіцієнт фільтрації підземного водоносного горизонту, інтенсивність інфільтрації фільтрату в зону аерації та підземний водоносний горизонт. **Методика.** Для моделювання процесу міграції інфільтрату в зоні аерації використано одновимірне рівняння фільтрації та одновимірне рівняння масопереносу. Моделювання процесу забруднення підземного водоносного горизонту, до якого надходить інфільтрат з полігону, проведено на базі двовимірного рівняння (планова модель) геоміграції. Для чисельного інтегрування рівнянь моделі використано зміннотрикутну скінченнорізницеvu схему розщеплення. Чисельне інтегрування двовимірного рівняння геоміграції виконано за схемою розщеплення. Особливістю запропонованих чисельних моделей є те, що значення невідомої функції можна визначити за явною формулою. **Результати.** Розроблено чисельні моделі для розв'язання комплексної задачі прогнозування забруднення зони аерації та підземного потоку в разі інфільтрації домішки з полігону твердих побутових відходів. **Наукова новизна.** Запропоновано чисельні моделі фільтрації та масопереносу домішок у випадку міграції інфільтрату з міського полігону твердих побутових відходів через зону аерації та в підземні води. Для застосування цих математичних моделей потрібно стандартна гідрологічна інформація. Моделі спрямовані на розв'язання комплексних задач у сфері екологічної безпеки та охорони довкілля. Вони дають можливість визначати негативний вплив полігонів ТПВ на навколишнє середовище на етапі обґрунтування місця розташування майбутніх полігонів та їх розмірів. **Практична значимість.** Запропоновані математичні моделі використовують стандартну гідрологічну інформацію, що важливо для серійних розрахунків у проєктних організаціях, і можуть бути корисними для оцінки впливу полігонів ТПВ на забруднення навколишнього середовища.

Ключові слова: полігон твердих побутових відходів (ТПВ); забруднення зони аерації; забруднення підземних вод; математична модель; рівняння фільтрації; рівняння масопереносу

REFERENCES

1. Biliaiev, M. M., & Kozachyna, V. V. (2024). Modeling of Non-Stationary Mass Transfer Process in Groundwater. *Science and Transport Progress*, 2(106), 18-25. DOI: <https://doi.org/10.15802/stp2024/305701> (in Ukrainian)
2. Bomba, A. Y., Bulavatsky, V. M., & Skopetsky, V. V. (2007). *Neliniini matematychni modeli protsesiv heohidrodynamiky: monohrafiia*. Kyiv: Naukva Dumka. (in Ukrainian)
3. Bomba, A., Kashtan, S., Pryhodnytskyi, D., & Yaroshchak, S. (2013). *Metody kompleksnoho analizu: monohrafiia*. Rivne: NUWEE. (in Ukrainian)
4. Vlasiuk, A. P., & Ostapchuk, O. P. (2015). *Matematychni modeliuvannia perenosu solovykh rozchyniv pry filtratsii pidzemnykh vod u gruntovykh masyvakh: monohrafiia*. Rivne: NUWGP. (in Ukrainian)
5. Vlasiuk, A. P., Ostapchuk, O. P., & Shmendruk, A. Yu. (2012). Chyselne modeliuvannia masoperenosu pry planovii statsionarnii filtratsii solovykh rozchyniv v dvozviaznykh kiltsevykh oblastiakh. *Bulletin of National University of Water and Environmental Engineering*, 2(58), 204-211. (in Ukrainian)
6. Orlova, T. O. (2008). *Otsinky ekolohichnoho stanu zemelnykh dilianok, zainiatykh vidkhodamy ta obiektyamy povodzhennia z nymy* (PhD dissertation). Kyiv: KNUCA. (in Ukrainian)
7. Pshinko, A. N., Belyaev, N. N., & Kalashnikov, I. V. (2011). *Ekologo-gidrogeologicheskoe obosnovanie prirodokhrannykh meropriyatiy pri likvidatsii posledstviy avariynykh razlivov: monografiya*. Dnepropetrovsk: Nova ideolohiia. (in Russian)
8. Rudakov, D. V. (2012). *Matematychni metody v okhroni pidzemnykh vod*. Dnipropetrovsk: National Mining University. (in Ukrainian)
9. Satin, I. V., & Kutsyi, D. V. (2024). Greenhouse gas emissions from municipal waste disposal sites and measures for its reduction. *Naukovi Dopovidi Nacional'nogo Universitetu Bioresursiv i Prirodokoristuvannâ Ukraïni*, 109(3), 110-126. DOI: [https://doi.org/10.31548/dopovidi.3\(109\).2024.003](https://doi.org/10.31548/dopovidi.3(109).2024.003) (in Ukrainian)

10. Bonelli, S. (2009). Approximate solution to the diffusion equation and its application to seepage-related problems. *Applied Mathematical Modelling*, 33(1), 110-126. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2007.10.017> (in English)
11. Harbaugh, A. W. (2025). *MODFLOW-2005: the U.S. Geological Survey modular ground-water model-the ground-water flow process*. USA: U. S. Geological Survey, Reston, Virginia. DOI: <https://doi.org/10.3133/tm6A16> (in English)
12. Koohestani, N., Halaghi, M. M., & Dehghani, A. A. (2013). Numerical Simulation of Groundwater Level Using MODFLOW Software (a Case Study: Narmab Watershed, Golestan Province). *International Journal of Advanced Biological and Biomedical Research*, 1(8), 858-873. (in English)
13. Zhangxin, C., & Yuanle, M. (2006). *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*. USA, Philadelphia: SIAM. DOI: <https://doi.org/10.1137/1.9780898718942> (in English)

Надійшла до редколегії: 12.02.2025

Прийнята до друку: 11.06.2025