

ЕКОЛОГІЯ ТА ПРОМИСЛОВА БЕЗПЕКА

УДК 556.3:624.131.6-047.58

М. М. БІЛЯЄВ^{1*}, В. В. КОЗАЧИНА²

^{1*}Каф. «Гідравліка, водопостачання та фізика», Український державний університет науки і технологій, вул. Лазаряна, 2, Дніпро, Україна, 49010, тел. +38 (056) 373 15 09, ел. пошта biliaiev.m@gmail.com, ORCID 0000-0002-1531-7882

²Каф. «Гідравліка, водопостачання та фізика», Український державний університет науки і технологій, вул. Лазаряна, 2, Дніпро, Україна, 49010, тел. +38 (056) 373 15 09, ел. пошта tsurkanvaleri1997@gmail.com, ORCID 0000-0002-7433-7306

Моделювання процесів фільтрації та тепломасопереносу в підземних водах

Мета. Важливим інструментом розв'язання складних задач, які полягають в аналізі динаміки підземних вод і процесів тепломасопереносу в них під час дослідження їх забруднення від різних техногенних джерел у разі аварійних розливів хімічно небезпечних речовин тощо, є метод математичного моделювання. Основною метою статті є розробка комплексу математичних моделей для розрахунку процесу фільтрації безнапірних підземних вод, масопереносу домішки та процесу теплопереносу в підземних водах. **Методика.** Для прогнозування динаміки підземних вод використано двовимірне рівняння фільтрації у формі Буссінеска. Для моделювання процесів масопереносу в підземних водах використано двовимірне рівняння конвективно-дифузійного переносу домішки. Процес заморожування окремих ділянок підземного потоку змодельовано за допомогою рівняння Лапласа для потенціалу швидкості (розрахунок поля швидкості потоку в умовах геометрії, що змінюється з часом) та двовимірного рівняння теплопереносу в підземних водах. Для розв'язання моделювальних рівнянь динаміки підземних вод і тепломасопереносу використано скінченнорізницевої схеми. **Результати.** Побудовано комплекс математичних моделей для розрахунку процесу фільтрації безнапірних ґрунтових вод та їх хімічного забруднення. Проведений експеримент підтвердив адекватність побудованої чисельної моделі фільтрації безнапірного потоку підземних вод. Побудовано ефективну математичну модель, що дозволяє визначати температурні поля в підземних водах під час роботи свердловини, яку використовують для заморожування окремих ділянок потоку. Результати комп'ютерного моделювання свідчать про ефективність розроблених математичних моделей. **Наукова новизна.** Запропоновано ефективні математичні моделі для прогнозування рівня хімічного забруднення підземних вод, її динаміки та теплового режиму. Побудовані математичні моделі дають можливість визначати динаміку зміни температурного режиму підземних вод під час роботи свердловин, через які подають холодоагент для заморожування окремих ділянок. Розроблено комп'ютерну програму, що дозволяє здійснювати комплексне оцінювання стану підземних вод. **Практична значимість.** Розроблено комплекс комп'ютерних програм для проведення обчислювального експерименту з дослідження процесів фільтрації, хімічного забруднення підземних вод та процесів теплопереносу в них. Цей комплекс програм можна використати для наукового обґрунтування інженерних рішень, спрямованих на захист підземних вод.

Ключові слова: динаміка підземних вод; масоперенос у ґрунтових водах; заморожування підземних вод; теплоперенос; математичне моделювання

Вступ

У багатьох країнах світу проблема підтоплення територій стоїть дуже гостро. Таке підтоплення має суттєві негативні наслідки: підземна вода потрапляє в підвали, фундаменти будівель,

неможливо здійснювати сільгоспроботи, має місце зниження родючості земель [3, 6, 7].

Крім цього, зниження рівня підземних вод є необхідним під час будівництва ряду споруд [1]. Тому цій проблемі приділяють значну увагу.

ЕКОЛОГІЯ ТА ПРОМИСЛОВА БЕЗПЕКА

У наш час використовують різні методи зниження рівня підземних вод. Часто для вирішення цієї проблеми використовують свердловини [1]. Також широко застосовують метод заморожування ділянки підземних вод із подальшим відкачуванням води з цієї ділянки.



Рис. 1. Спеціальне обладнання для подачі холодоагента в підземні води (<https://www.geofrost.no/en/>)

Fig. 1. Special equipment for refrigerant supply to groundwater (<https://www.geofrost.no/en/>)

Для цього використовують спеціальне обладнання (рис. 1) та свердловини, що забезпечують постійний режим подачі холодоагента в потік, де здійснюється охолодження (рис. 2) [5, 10, 14].

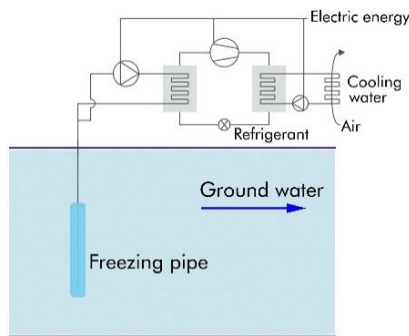


Рис. 2. Свердловини з холодоагентом у підземному потоці (<https://www.geofrost.no/en/>)

Fig. 2. Wells with refrigerant in the underground flow (<https://www.geofrost.no/en/>)

Лід, що утворюється в підземному потоці, створює завісу, яка працює як «затвор» на окремій ділянці (рис. 3). Це дозволяє на цій ділянці потоку здійснювати відкачування підземних вод (рис. 4).

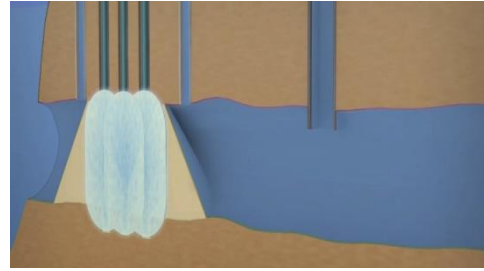


Рис. 3. Льодова «завіса» в підземному потоці (<https://www.geofrost.no/en/>)

Fig. 3. Ice «curtain» in an underground stream (<https://www.geofrost.no/en/>)

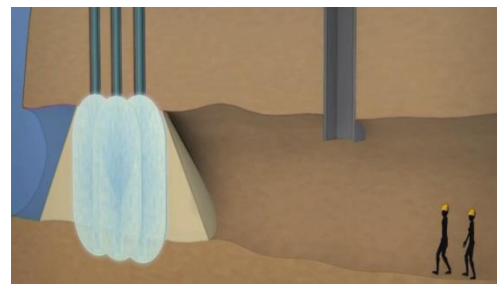


Рис. 4. Створення «сухої» зони в підземному потоці (<https://www.geofrost.no/en/>)

Fig. 4. Creating a «dry» zone in an underground stream (<https://www.geofrost.no/en/>)

Особливо важливою проблемою в цій галузі є створення розрахункових методів для аналізу ефективності використання різних інженерних технологій зниження рівня підземних вод.

Найбільш широко використовують емпіричні та аналітичні методи розрахунку для задач цього класу, що дають можливість прогнозувати процеси геоміграції, теплопереносу та динаміки підземних вод під час роботи дренажних систем тощо [1, 4, 11, 12]. Але використання таких методів дозволяє отримати інформацію лише для «спрощених» сценаріїв. Високі вимоги щодо прогнозних даних потребують створення більш удосконалених математичних моделей для розв'язування складних задач у галузі динаміки підземних вод та процесів тепломасопереносу в них. Альтернативою є використання чисельних моделей [2, 8, 9, 13]. Але проблема розробки швидкорозрахункових чисельних моделей для аналізу складних процесів динаміки підземних вод та процесів тепломасопереносу в них залишаться актуальною.

Мета

Автори ставлять за основну мету цієї роботи створення комплексу математичних моделей для розрахунку фільтрації ґрунтових вод та процесів тепломасопереносу в аспекті розв'язання інженерних задач захисту підземних вод.

Методика

Для розрахунку динаміки ґрунтових вод та процесів тепломасопереносу в них використовують фундаментальні рівняння механіки суцільного середовища.

Моделювання процесу фільтрації. Для опису руху безнапірного потоку підземних вод використовуємо рівняння Буссінеска:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = kh_m \left(\frac{\partial h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial h^2}{\partial y^2} \right), \quad (1)$$

де h – глибина безнапірного підземного потоку; k – коефіцієнт фільтрації водоносного шару; μ – недостача насичення (водовіддача); h_m – середня глибина підземного потоку.

У разі використання рівняння (1) водотривкість вважають горизонтальною.

Компоненти вектора швидкості підземного потоку розраховуємо на базі закону Дарсі:

$$u = -k \frac{\partial h}{\partial x}; \quad v = -k \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (2)$$

Крайові умови для моделювального рівняння (1) розглянуто в [3].

Слід відзначити, що для реальних задач динаміки підземних вод знайти розв'язок рівняння фільтрації (1) можна лише шляхом використання чисельних методів. Чисельне розв'язання цього рівняння розглянуто нижче.

Моделювання процесу геоміграції. Значна кількість задач у галузі динаміки підземних вод пов'язана з аналізом руху домішки в цих водах. Домішки можуть потрапляти в підземний потік під час фільтрації забруднених вод із відстійників-накопичувачів, під час аварійних розливів тощо. Тому часто постає проблема визначення розмірів та інтенсивності зон забруднення в підземних водах, що формуються з часом. Для дослідження процесів руху домішки в підземних водах використовуємо усереднене за глибиною потоку рівняння масопереносу [2]:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial uS}{\partial x} + \frac{\partial vS}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_x \frac{\partial S}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_y \frac{\partial S}{\partial y} \right) + \sum_{i=1}^n Q_{Si}(t) \delta(x-x_i) \delta(y-y_i), \quad (3)$$

де u, v – компоненти швидкості потоку ґрунтових вод; S – концентрація домішки в підземному потоці; Q – інтенсивність емісії домішки в підземний потік; μ_x, μ_y – коефіцієнти дисперсії; t – час.

Положення джерела емісії (ставка-відстійника) моделюємо за допомогою дельта-функції Дірака $\delta(x-x_i)(y-y_i)$, де x_i, y_i – декартові координати джерела емісії.

Постановку крайових умов для рівняння (3) розглянуто в [2].

Моделювання процесу теплопереносу в підземних водах. Для моделювання процесу заморожування підземних вод та розрахунку динаміки зміни їх температури використовуємо таке рівняння теплопереносу:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial uT}{\partial x} + \frac{\partial vT}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(a_y \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (4)$$

де u, v – компоненти швидкості потоку ґрунтових вод; T – температура в потоці; a_x, a_y – коефіцієнти температуропровідності; t – час.

Для моделювання гідродинаміки підземного потоку в задачах про його заморожування пропонуємо використати рівняння потенціалу швидкості:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0, \quad (5)$$

де P – потенціал швидкості.

Якщо визначено поле потенціалу швидкості, то компоненти вектора швидкості потоку визначаємо так:

$$u = \frac{\partial P}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial P}{\partial y}. \quad (6)$$

Розв'язок рівняння (5) та визначення компонент вектора швидкості підземного потоку на базі залежностей (6) дають можливість визначити швидкість потоку підземних вод під час

ЕКОЛОГІЯ ТА ПРОМИСЛОВА БЕЗПЕКА

формування зони охолодження (льоду) біля свердловин, що використовують спеціальний розчин для охолодження води.

Чисельні моделі. Для чисельного інтегрування розглянутих моделювальних рівнянь використовуємо прямокутну різницеву сітку.

Під час побудови чисельних моделей їх параметри на різницевій сітці визначаємо таким чином:

1) глибину підземного потоку визначаємо в центрах різницевої комірки;

2) концентрацію домішки визначаємо в центрах прямокутних різницевої комірки;

3) компоненти швидкості фільтраційного потоку визначаємо на сторонах різницевої комірки;

4) температуру водного потоку визначаємо в центрах прямокутних різницевої комірки.

Формування вигляду розрахункової області здійснюємо за допомогою маркерів. Маркери визначають положення свердловин, річок (зона розвантаження підземного потоку), сховищ із рідинними відходами тощо.

Для побудови чисельної моделі фільтраційного потоку рівняння (1) зводимо до вигляду:

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = kh_m \left(\frac{\partial h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial h^2}{\partial y^2} \right); \quad (7)$$

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = W. \quad (8)$$

Для чисельного розв'язання рівняння (7) використовуємо різницеву схему сумарної апроксимації:

– перший крок розщеплення:

$$\frac{h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - h_{i,j}^n}{\Delta t} = \left[a \frac{-h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + h_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} \right] + \left[a \frac{-h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + h_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y^2} \right];$$

– другий крок розщеплення:

$$\frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \left[a \frac{h_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} \right] + \left[a \frac{h_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - h_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y^2} \right],$$

$$\text{де } a = \frac{kh_m}{\mu}.$$

Для чисельного розв'язання рівняння геоміграції (3) здійснюємо його розщеплення таким чином [1]:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial uS}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_x \frac{\partial S}{\partial x} \right); \quad (9)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial vS}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_y \frac{\partial S}{\partial y} \right); \quad (10)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \sum_{i=1}^n Q_{Si}(t) \delta(x - x_i)(y - y_i). \quad (11)$$

Для чисельного розв'язання рівняння (9) застосуємо двокрокову схему розщеплення [2]:

– на першому кроці:

$$S_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = S_{i,j}^n - \Delta t \frac{u_{i+1,j}^+ S_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^+ S_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \Delta t \mu_x \frac{-S_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + S_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2} + \Delta t \mu_x \frac{-S_{i,j}^n + S_{i+1,j}^n}{2\Delta x^2};$$

– на другому кроці:

$$S_{i,j}^{n+1} = S_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t \frac{u_{i+1,j}^- S_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^- S_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} + \Delta t \mu_x \frac{-S_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + S_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2} + \Delta t \mu_x \frac{-S_{i,j}^{n+1} + S_{i+1,j}^{n+1}}{2\Delta x^2},$$

$$\text{де } u^+ = \frac{u + |u|}{2}; \quad u^- = \frac{u - |u|}{2}.$$

Для чисельного розв'язання рівняння (10) застосуємо таку двокрокову схему розщеплення [2]:

– на першому кроці:

$$S_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = S_{i,j}^n - \Delta t \frac{v_{i,j+1}^+ S_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - v_{i,j}^+ S_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \Delta t \mu_y \frac{-S_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + S_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta y^2} + \Delta t \mu_y \frac{-S_{i,j}^n + S_{i,j+1}^n}{2\Delta y^2};$$

ЕКОЛОГІЯ ТА ПРОМИСЛОВА БЕЗПЕКА

– на другому кроці:

$$S_{i,j}^{n+1} = S_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t \frac{v_{i,j+1}^- S_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j}^- S_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} + \Delta t \mu_y \frac{-S_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + S_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta y^2} + \Delta t \mu_y \frac{-S_{i,j}^{n+1} + S_{i,j+1}^{n+1}}{2\Delta y^2},$$

$$\text{де } v^+ = \frac{v + |v|}{2}; \quad v^- = \frac{v - |v|}{2}.$$

Для чисельного інтегрування рівняння (11) використовуємо метод Ейлера.

Слід зазначити, що розв'язання задачі заморожування потоку належить до особливо складних задач динаміки підземних вод. Це пов'язано з тим, що потрібно здійснювати пошук рішення (поле температури, швидкості підземного потоку) в області, вигляд якої змінюється з часом, що обумовлено появою зони заморожування – тобто зони, де немає руху рідини. Таким чином, у потоці з'являється зона, що є непроникливою та змінює свій розмір і форму з часом.

Під час розв'язання задач, пов'язаних із процесом заморожування потоку підземних вод, на першому етапі здійснюємо чисельне інтегрування рівняння Лапласа за явною формулою. Для цього виконуємо таку апроксимацію похідних:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{P_{i+1,j} - 2P_{i,j} + P_{i-1,j}}{\Delta x^2};$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{P_{i,j+1} - 2P_{i,j} + P_{i,j-1}}{\Delta y^2},$$

де Δx , Δy – крок різничевої сітки в напрямку осей Ox , Oy відповідно.

З урахуванням цих апроксимацій рівняння Лапласа можна записати так:

$$\frac{P_{i+1,j} - 2P_{i,j} + P_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{P_{i,j+1} - 2P_{i,j} + P_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0.$$

Значення потенціалу швидкості визначаємо таким чином:

$$P_{i,j} = \left[\frac{P_{i+1,j} + P_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{P_{i,j+1} + P_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right] / Z,$$

$$\text{де } Z = \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} \right).$$

Розщеплення рівняння (4) має вигляд [5]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial u T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a_x \frac{\partial T}{\partial x} \right); \quad (12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial v T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(a_y \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (13)$$

Для чисельного розв'язання рівняння (12) застосовуємо двокрокову схему розщеплення [2]:

– на першому кроці:

$$T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = T_{i,j}^n - \Delta t \frac{u_{i+1,j}^+ T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^+ T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \Delta t a_x \frac{-T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2} + \Delta t a_x \frac{-T_{i,j}^n + T_{i+1,j}^n}{2\Delta x^2};$$

– на другому кроці:

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t \frac{u_{i+1,j}^- T_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^- T_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} + \Delta t a_x \frac{-T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x^2} + \Delta t a_x \frac{-T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1}}{2\Delta x^2},$$

$$\text{де } u^+ = \frac{u + |u|}{2}; \quad u^- = \frac{u - |u|}{2}.$$

Для чисельного розв'язання рівняння (13) застосовуємо таку двокрокову схему розщеплення [2]:

– на першому кроці:

$$T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = T_{i,j}^n - \Delta t \frac{v_{i,j+1}^+ T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - v_{i,j}^+ T_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} + \Delta t a_y \frac{-T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta y^2} + \Delta t a_y \frac{-T_{i,j}^n + T_{i,j+1}^n}{2\Delta y^2};$$

– на другому кроці:

$$T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t \frac{v_{i,j+1}^- T_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j}^- T_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} + \Delta t a_y \frac{-T_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + T_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta y^2} + \Delta t a_y \frac{-T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}}{2\Delta y^2},$$

$$\text{де } v^+ = \frac{v + |v|}{2}; \quad v^- = \frac{v - |v|}{2}.$$

Алгоритм розв'язання задач цього класу такий:

1. Формуємо вигляд розрахункової області.
2. Вводиться інформація про фізичні параметри задачі.
3. Задаємо положення свердловин, які використовують для заморожування підземного потоку.
4. Розв'язуємо рівняння Лапласа для потенціалу швидкості.
5. Визначаємо компоненти вектора швидкості потоку.
6. Здійснюємо розрахунок поля температури в потоці.
7. Визначаємо область, де температура потоку дорівнює 0, тобто відбулось заморожування води.

Поява льоду в потоці змінює геометрію розрахункової області, оскільки в зоні, де є лід, уже відсутній рух води. Тому потрібно нову розв'язати задачу динаміки підземних вод та знову визначити поле швидкості підземного потоку, а далі розв'язати задачу теплопереносу. Тобто процес повторюють, починаючи з п. 4.

На базі розроблених чисельних моделей створено комп'ютерний код WaTGE–2. Мовою програмування є FORTRAN. До складу комп'ютерного коду входять:

- 1) Wa.DAT – файл початкових даних (уведення інформації про розмір розрахункової області, положення джерела забруднення, концентрацію домішки в підземному потоці, положення свердловин тощо);
- 2) Wa1 – підпрограма типу SUBROUTINE для розрахунку динаміки зміни глибини ґрунтових вод із часом;
- 3) Wa2 – підпрограма типу SUBROUTINE для розрахунку компонент швидкості фільтраційного потоку;

4) Wa3 – підпрограма типу SUBROUTINE для розрахунку зміни концентрації домішки в ґрунтових водах із часом;

5) WaT3 – підпрограма типу SUBROUTINE для розрахунку зміни концентрації температури в ґрунтових водах із часом;

6) WaTV2 – підпрограма типу SUBROUTINE для розрахунку компонент швидкості потоку, які використовують під час розв'язання задачі теплопереносу;

7) WaTR2 – підпрограма типу SUBROUTINE для розв'язання рівняння потенціалу швидкості.

Результати

На першому етапі досліджень було проведено експеримент в лабораторії кафедри «Гідравліка, водопостачання та фізика» Українського державного університету науки і технологій. Мета експерименту – верифікація чисельної моделі фільтрації, що розглянута вище.

Експеримент проведено у фільтраційному лотку: 30×10×15 см (рис. 5). В аванкамері лотка підтримували постійний рівень води $h_1 = 13,5$ см (початковий переріз). Рівень води в кінцевому перерізі $h_2 = 3,4$ см. Розглянуто фільтрацію в разі горизонтальної водотривкості. Під час проведення експерименту вимірювали витрату води крізь область фільтрації Q об'ємним способом та здійснювали відеозапис із метою фіксування положення фронту фільтрації $l(x)$ з часом.

На рис. 5 показано область фільтрації за стаціонарного режиму.

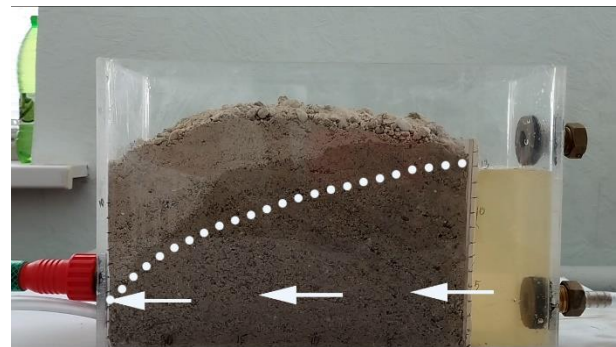


Рис. 5. Фільтраційний лоток

Fig. 5. Filtering tray

Як можна бачити з рис. 5, зона промочування чітко визначає область фільтрації потоку. Крапками показано криву депресії. Перевищення

ЕКОЛОГІЯ ТА ПРОМИСЛОВА БЕЗПЕКА

зони змочування вище кривої депресії обумовлено роботою капілярних сил.

Для обробки результатів експерименту використано формулу Дюпюї:

$$q = k \frac{h_1^2 - h_2^2}{2l_{1-2}}, \quad (14)$$

де $q = \frac{Q}{b}$ – питома витрата води; b – ширина лотка;

k – коефіцієнт фільтрації; h_1, h_2 – глибина фільтраційного потоку в різних перерізах, довжина між якими дорівнює l_{1-2} .

Використовуючи формулу (11), можна визначити коефіцієнт фільтрації для заміряних глибин фільтраційного потоку та витрати.

У табл. 1 наведено результати обчислювального експерименту та їх порівняння з даними експерименту.

Таблиця 1

Глибина фільтраційного потоку

Table 1

Depth of filtration flow		
Переріз	Глибина потоку, см (експеримент)	Глибина потоку, см (розрахунок)
5 см	12,2	11,8
10 см	11,1	10,6
15 см	9,1	8,7
20 см	6,8	6,2

Як можна бачити з табл. 1, є задовільне узгодження даних експерименту та розрахунку.

На наступному етапі досліджень було проведено обчислювальний експеримент із метою перевірки стійкості розрахунку розроблених чисельних моделей для моделювання процесу заморожування підземних вод. Розглянуто свердловину (рис. 6, маркер 4), де підтримували постійну температуру 0°C . Температура навколишнього середовища 20°C . Потрібно було визначити динаміку зміни температури в потоці з часом та форму зони заморожування. Узято, що в тій різницевій комірці, де температура стала рівною 0°C , формувався лід і ця зона перетавала бути зоною течії.

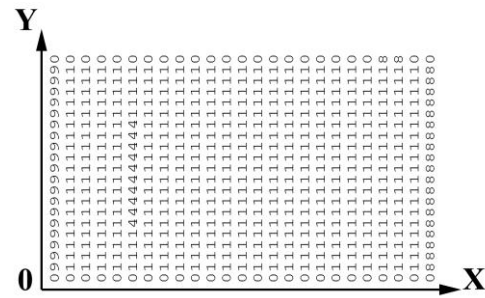


Рис. 6. Схема розрахункової області:
4 – позиція свердловини, що подає реагент для заморожування

Fig. 6. Scheme of the computational domain:
4 – position of the well supplying the freezing agent

На рис. 8 і 10 показано температурні поля й динаміку їх зміни з часом у разі роботи свердловини. Час на цих рисунках є безрозмірним. На рис. 7 і 9 показано зміну форми зони заморожування в потоці.

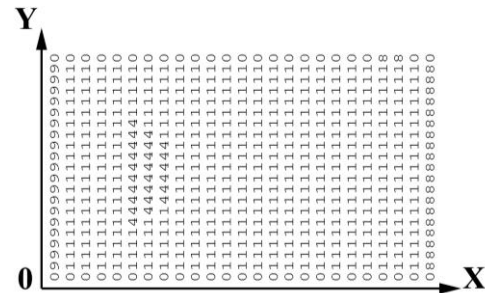


Рис. 7. Область заморожування для моменту часу $t = 5$; маркер 4 – положення льоду

Fig. 7. Freezing area for time $t = 5$; marker 4 – ice position

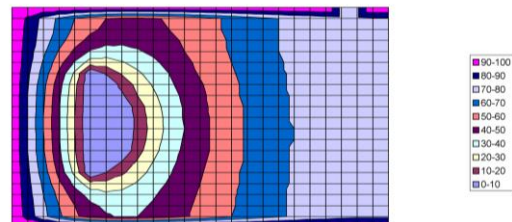


Рис. 8. Поле температури в потоці для моменту часу $t = 5$

Fig. 8. Temperature field in the flow for time $t = 5$

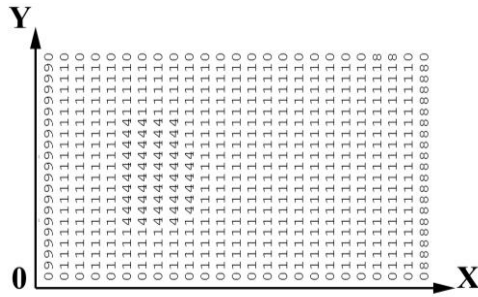


Рис. 9. Область заморожування для моменту часу $t = 7$; маркер 4 – положення льоду

Fig. 9. Freezing area for time $t = 7$; marker 4 – ice position

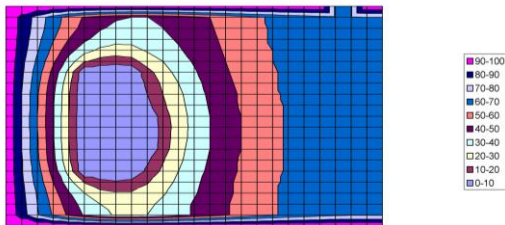


Рис. 10. Поле температури в потоці для моменту часу $t = 7$

Fig. 10. Temperature field in the flow for time $t = 7$

Як можна бачити з наведених рисунків, розроблена чисельна модель дозволяє визначити інтенсивність та форму зони охолодження під час роботи свердловини.

Відзначимо, що час розрахунку кожного варіанта задачі складає 8 с.

Наукова новизна та практична значимість

Запропоновано ефективні математичні моделі для прогнозування рівня хімічного забруднення підземних вод, динаміки підземних вод, теплового режиму в підземних водах.

Побудовані математичні моделі дають можливість визначити динаміку зміни температурного режиму підземних вод під час роботи свердловин, які використовують для заморожування окремих ділянок підземних вод.

Розроблена комп'ютерна програма дозволяє здійснювати комплексне оцінювання стану підземних вод.

Висновки

1. Побудовано комплекс математичних моделей для розрахунку процесу фільтрації безнапірних ґрунтових вод та їх хімічного забруднення.

2. Проведено експеримент, що підтвердив адекватність побудованої чисельної моделі фільтрації безнапірного потоку підземних вод.

3. Побудовано ефективну математичну модель, що дозволяє визначити температурні поля в підземних водах під час роботи свердловин, які використовують для заморожування окремих ділянок потоку.

4. Результати комп'ютерного моделювання свідчать про ефективність розроблених математичних моделей.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. ДСТУ-Н Б В.1.1-38:2016 *Настанова щодо інженерного захисту територій, будівель і споруд від підтоплення та затоплення*. [Чинний від 2017-01-04]. ДП «Державний науково-дослідний інститут будівельних конструкцій» (НДІБК), 2017. 135 с.
2. Згуровский М. З., Скопецкий В. В., Хрущ В. К., Беляев Н. Н. *Численное моделирование распространения загрязнения в окружающей среде*. Киев : Наукова думка. 1997. 368 с.
3. Кремез В. С., Буц Ю. В., Цимбал В. А. Моделювання процесу підтоплення територій в зоні впливу водосховищ. Людина та довкілля. *Проблеми неоекології*. 2012. № 1–2. С. 128–130.
4. Рудаков Д. В. *Математичні методи в охороні підземних вод*. Дніпропетровськ : Національний гірничий університет, 2012. 158 с.
5. Тютькін, О. Л., Мірошник В. А. Порівняльний аналіз спеціальних способів під час проходки вертикальних виробок. *Мости та тунелі: теорія, дослідження, практика*. 2020. № 17. С. 81–90. DOI: <https://doi.org/10.15802/bttrp2020/205019>

6. Щербак О. В., Яковлев С. О., Долін В. В. Моделювання гідрогеофільтраційного поля ґрунтових вод у зоні впливу металургійного виробництва. *Мінеральні ресурси України*. 2018. № 3. С. 19–25.
DOI: <https://doi.org/10.31996/mru.2018.3.19-25>
7. Cashman P. M., Preene M. *Groundwater Lowering in Construction. A Practical Guide to Dewatering*. CRC Press, 2012. 665 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781003050025>
8. Guangwei Wu, Yulong Dong, Lei Liu, Yingqiang Yao, Yubai Bi, Jian Guo, Sha Gu. *Study on Groundwater Environmental Impact Assessment in Datang Binzhou Combined Heat and Power Generation Project Based on MODFLOW*. 2023. Vol. 43: Hydraulic and Civil Engineering Technology VIII. P. 766–774.
DOI: <https://doi.org/10.3233/atde230795>
9. Harbaugh A. W. MODFLOW-2005 : the U. S. Geological Survey modular ground-water model--the ground-water flow process. *Techniques and Methods 6-A16*. 253 p. DOI: <https://doi.org/10.3133/tm6A16>
10. Hong Z., Shi R., Yue F., Yang J., Wu Y. Mathematical Solution of Temperature Field in Non-Hollow Frozen Soil Cylinder Formed by Annular Layout of Freezing Pipes. *Mathematics*. 2023. Vol. 11. P. 1–15.
DOI: <https://doi.org/10.3390/math11081962>
11. Mustafa S., Bahar A., Aziz Z. A., Darwish M. Analytical solutions of contaminant transport in homogeneous and isotropic aquifer in three-dimensional groundwater flow. *Environmental Science and Pollution Research*. 2022. Vol. 29. Iss. 58. P. 87114–87131. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11356-022-21402-8>
12. Shaikh B. Y., Eldho T. I. Analytical modeling of contaminant transport along sloping coastal beaches in presence of tidal waves and exponential rainfall infiltration. *Journal of Contaminant Hydrology*. 2023. Vol. 256, Article 104194. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jconhyd.2023.104194>
13. Shakeri R., Nassery H. R., Ebadi T. Numerical modeling of groundwater flow and nitrate transport using MODFLOW and MT3DMS in the Karaj alluvial aquifer, Iran. *Environmental Monitoring and Assessment*. 2022. Vol. 195, Article 242. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10661-022-10881-4>
14. Zhou, M.-M., Marwan A., Meschke G. Modeling and optimization of ground freezing in tunneling. *ITA World Tunnel Congress 2015*. 2015. P. 1–12.

M. M. BILIAIEV^{1*}, V. V KOZACHYNA²

^{1*}Dep. «Hydraulics, Water Supply and Physics», Ukrainian State University of Science and Technologies, Lazaryan St., 2, Dnipro, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 373 15 09, e-mail biliaiev.m@gmail.com, ORCID 0000-0002-1531-7882

²Dep. «Hydraulics, Water Supply and Physics», Ukrainian State University of Science and Technologies, Lazaryan St., 2, Dnipro, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 373 15 09, e-mail tsurkanvaleri1997@gmail.com, ORCID 0000-0002-7433-7306

Modeling of Filtration and Heat and Mass Transfer Processes in Groundwater

Purpose. The method of mathematical modeling is an important tool for solving complex problems involving the analysis of groundwater dynamics and heat and mass transfer processes in them when studying their contamination from various anthropogenic sources in the event of accidental spills of chemically hazardous substances, etc. The main purpose of the article is to develop a set of mathematical models for calculating the process of filtration of non-pressure groundwater, mass transfer of impurities and the process of heat transfer in groundwater. **Methodology.** The two-dimensional Boussinesq equation of filtration was used to predict the dynamics of groundwater. The two-dimensional equation of convective-diffusive transport of impurities was used to model the processes of mass transfer in groundwater. The process of freezing of individual sections of the groundwater flow is modeled using the Laplace equation for the velocity potential (calculation of the flow velocity field in a time-varying geometry) and the two-dimensional equation of heat transfer in groundwater. Finite difference schemes were used to solve the modeling equations of groundwater dynamics and heat and mass transfer. **Findings.** A set of mathematical models has been developed to calculate the process of filtration of non-pressure groundwater and its chemical contamination. The experiment has confirmed the adequacy of the constructed numerical model of filtration of a non-pressure groundwater flow. An effective mathematical model was developed that allows determining the temperature fields in groundwater during the operation of a well used to freeze certain sections of the flow. The results of computer modeling indicate the effectiveness of the developed mathematical models. **Originality.** Effective mathematical models for predicting the level of chemical contamination of groundwater, its dynamics and thermal regime are proposed. The constructed mathematical models make it possible to determine the dynamics of changes in the temperature regime of groundwater during the operation of wells through which refrigerant is supplied to freeze individual areas. A computer program has been developed that allows for a comprehensive assessment of groundwater conditions. **Practical value.** A set of

computer programs has been developed to conduct a computational experiment to study the processes of filtration, chemical contamination of groundwater and heat transfer processes in them. This set of programs can be used for the scientific substantiation of engineering solutions aimed at protecting groundwater.

Keywords: groundwater dynamics; mass transfer in groundwater; groundwater freezing; heat transfer; mathematical modeling

REFERENCES

1. *Nastanova shchodo inzhenernoho zakhystu terytorii, budivel i sporud vid pidtoplennia ta zatoplennia, 135 DSTU-N B V.1.1-38:2016.* (2016). (in Ukrainian)
2. Zgurovskiy, M. Z., Skopetskiy, V. V., Khrushch, V. K., & Belyaev, N. N. (1997). *Chislennoe modelirovanie rasprostra-neniya zagryazneniya v okruzhayushchey srede.* Kiev: Naukova dumka. (in Russian)
3. Kremez, V. S., Buts, Y. V., & Tsymbal, V. A. (2012). The modelling of process of flooding by subsoil waters is in the affected of reservoirs zone. *Man and environment. Issues of neoecology, 1-2*, 128-130. (in Ukrainian)
4. Rudakov, D. V. (2012). *Matematychni metody v okhoroni pidzemnykh vod.* Dnipropetrovsk: National Mining University. (in Ukrainian)
5. Tiutkin, O. L., & Miroshnyk, V. A. (2020). Comparative analysis of special methods during vertical works. *Bridges and Tunnels: Theory, Research, Practice, 17*, 81-90. DOI: <https://doi.org/10.15802/bttrp2020/205019> (in Ukrainian)
6. Shcherbak, O. V., Yakovlev, Ye. O., & Dolin, V. V. (2018). Modeling of hydrogeofiltration groundwater field in the influence zone of metallurgical production. *Mineral Resources of Ukraine, 3*, 19-25. DOI: <https://doi.org/10.31996/mru.2018.3.19-25> (in Ukrainian)
7. Cashman, P. M., & Preene, M. (2020). *Groundwater Lowering in Construction. A Practical Guide to Dewatering.* CRC Press. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781003050025> (in English)
8. Guangwei, Wu, Yulong, Dong, Lei, Liu, Yingqiang, Yao, Yubai, Bi, Jian, Guo, & Sha, Gu (2023). In *Study on Groundwater Environmental Impact Assessment in Datang Binzhou Combined Heat and Power Generation Project Based on MODFLOW* (Vol. 43: Hydraulic and Civil Engineering Technology VIII, pp. 766774). DOI: <https://doi.org/10.3233/atde230795> (in English)
9. Harbaugh, A. W. (2005). MODFLOW-2005 : the U.S. Geological Survey modular ground-water model-the ground-water flow process. In *Techniques and Methods 6-A16*. DOI: <https://doi.org/10.3133/tm6a16> (in English)
10. Hong, Z., Shi, R., Yue, F., Yang, J., & Wu, Y. (2023). Mathematical Solution of Temperature Field in Non-Hollow Frozen Soil Cylinder Formed by Annular Layout of Freezing Pipes. *Mathematics, 11*(8), 1-15. DOI: <https://doi.org/10.3390/math11081962> (in English)
11. Mustafa, S., Bahar, A., Aziz, Z. A., & Darwish, M. (2022). Analytical solutions of contaminant transport in homogeneous and isotropic aquifer in three-dimensional groundwater flow. *Environmental Science and Pollution Research, 29*(58), 87114-87131. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11356-022-21402-8> (in English)
12. Shaikh, B. Y., & Eldho, T. I. (2023). Analytical modeling of contaminant transport along sloping coastal beaches in presence of tidal waves and exponential rainfall infiltration. *Journal of Contaminant Hydrology, 256*, 104194. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jconhyd.2023.104194> (in English)
13. Shakeri, R., Nassery, H. R., & Ebadi, T. (2022). Numerical modeling of groundwater flow and nitrate transport using MODFLOW and MT3DMS in the Karaj alluvial aquifer, Iran. *Environmental Monitoring and Assessment, 195*(242). DOI: <https://doi.org/10.1007/s10661-022-10881-4> (in English)
14. Zhou, M.-M., Marwan, A., & Meschke, G. (2015). Modeling and optimization of ground freezing in tunneling. *ITA World Tunnel Congress, 2015*, 1-12. (in English)

Надійшла до редколегії: 15.03.2024

Прийнята до друку: 17.09.2024