

## ЕКОЛОГІЯ ТА ПРОМИСЛОВА БЕЗПЕКА

УДК 628.35:519.87

М. М. БІЛЯЄВ<sup>1</sup>, П. Б. МАШИХІНА<sup>2\*</sup>, Р. П. ПОБЕДЬОННИЙ<sup>3</sup>, А. О. ЧІРКОВ<sup>4</sup>,  
М. В. ЧИРВА<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Каф. «Гідравліка та водопостачання», Український державний університет науки і технологій, вул. Лазаряна, 2, Дніпро, Україна, 49010, тел. +38 (056) 373 15 09, ел. пошта biliaev.m@gmail.com, ORCID 0000-0002-1531-7882

<sup>2\*</sup>Каф. «Гідравліка та водопостачання», Український державний університет науки і технологій, вул. Лазаряна, 2, Дніпро, Україна, 49010, тел. +38 (056) 373 15 09, ел. пошта gidro\_eko@ukr.net, ORCID 0000-0003-3057-9204

<sup>3</sup>Каф. «Гідравліка та водопостачання», Український державний університет науки і технологій, вул. Лазаряна, 2, Дніпро, Україна, 49010, тел. +38 (056) 373 15 09, ел. пошта water.supply.treatment@gmail.com, ORCID 0009-0009-6551-1630

<sup>4</sup>Каф. «Гідравліка та водопостачання», Український державний університет науки і технологій, вул. Лазаряна, 2, Дніпро, Україна, 49010, тел. +38 (056) 373 15 09, ел. пошта diit.hydro.eco@gmail.com, ORCID 0009-0005-4326-2881

<sup>5</sup>Каф. «Гідравліка та водопостачання», Український державний університет науки і технологій, вул. Лазаряна, 2, Дніпро, Україна, 49010, тел. +38 (056) 373 15 09, ел. пошта chyrva\_m@gmail.com, ORCID 0009-0006-1416-9482

### Математична модель аналізу кисневого режиму в біореакторі

**Мета.** Сьогодні аеротенки широко використовують для очищення стічних вод підприємств та комунальних стоків. Оцінювання ефективності очищення води в аеротенках за різних режимів експлуатації є важливою задачею. Для розв'язання такої задачі потрібно мати математичні моделі, що дозволяють оперативно отримати дані щодо ефекту очищення в аеротенках. Основною метою роботи є розробка чисельної box-моделі для визначення ефективності очищення стічних вод в аеротенку. **Методика.** Для математичного моделювання процесу біологічного очищення стічних вод у біореакторі використовують нульвимірні рівняння матеріального балансу, що записані відносно концентрації субстрату, активного мулу та розчиненого кисню в стічних водах. Для розрахунку процесу окислення субстрату використано модель Monod. Для інтегрування моделювальних рівнянь використовують метод Ейлера. Розглянуто спрощену модель біологічного очищення води в біореакторі, що дає можливість отримати аналітичне розв'язання задачі. Отриманий аналітичний вираз дає можливість швидко визначити зміну концентрації розчиненого кисню в стічних водах залежно від зміни концентрації активного мулу в біореакторі. Побудована чисельна модель дає можливість визначити динаміку зміни концентрації забруднень, активного мулу та кисню в стічних водах за час перебування їх у біореакторі. **Результати.** Запропоновано інструмент теоретичної оцінки ефективності біологічного очищення стічних вод в аеротенку. Побудовано чисельну модель, що дає можливість визначити концентрацію розчиненого кисню, субстрату та активного мулу на виході з аеротенка. **Наукова новизна.** Розроблено ефективну чисельну модель, що дозволяє швидко розраховувати динаміку очищення стічних вод у біореакторі та на базі цієї інформації оцінювати ефективність роботи реактора. **Практична значимість.** Побудована математична модель може бути корисна під час реконструкції споруд біологічного очищення стічних вод, а також на етапі проектування біореакторів для врахування їх роботи за різних умов експлуатації. Розроблено комп'ютерну програму, що реалізує побудовану чисельну модель. Наведено результати комп'ютерного експерименту.

*Ключові слова:* біореактор; очищення стічних вод; чисельне моделювання; водокористування

#### Вступ

Проблема очищення стічних вод є вкрай важливою в галузі водокористування. Для очищення стічних вод потрібні різні споруди, що працюють в умовах різного навантаження [2–

13]. За допомогою спеціальних методів теоретичного оцінювання з'ясовують ефективність роботи таких споруд для конкретних умов експлуатації. Для оцінювання ефективності очищення стічних вод широко використовують емпіричні та аналітичні моделі [2–5], значно

рідше – чисельні моделі [1, 8–10]. Слід підкреслити, що особливо важко розраховувати процеси біологічного очищення стічних вод. Таке очищення відбувається в спеціальних спорудах – біореакторах, що мають різну форму та різне «наповнення». Процеси, що відбуваються місце в біореакторі, дуже складні, і під час розрахунку біореактора потрібно розраховувати гідродинаміку течії [1], масоперенос та процес взаємодії активного мулу та субстрату. Саме це створює значні труднощі в розробці математичних моделей для аналізу ефективності роботи цих споруд. Попри це значну увагу приділяють саме розробці математичних моделей для аналізу роботи біореакторів. Це пов'язано з тим, що проведення фізичного експерименту потребує значного часу – близько кількох тижнів. Зрозуміло, що такі витрати часу на отримання результатів не задовольняють дослідників.

На основі системного аналізу літературних джерел автори визначили групи математичних моделей, які використовують для розрахунку біореакторів у системах очищення стічних вод. Наведемо цю інформацію відповідно до [1]:

1) математичні моделі, орієнтовані на оцінку ефективності роботи біореактора в умовах не лімітованої кількості кисню в споруді;

2) математичні моделі, орієнтовані на оцінку ефективності роботи біореактора з урахуванням нерівномірного розподілу кисню в споруді;

3) математичні моделі, орієнтовані на оцінку тільки кількості кисню в споруді за різних умов його подачі.

На практиці використовують різні класи моделей, а саме [1]:

*1. Емпіричні моделі.* Ці моделі створюють основу нормативних та інженерних методик розрахунку біореакторів. Моделі мають вигляд алгебраїчних співвідношень, які використовують для визначення тих або інших параметрів очисних споруд.

Емпіричні моделі дуже зручно використовувати для проектування типових біореакторів, що працюють у «класичних» умовах експлуатації. Розрахунок на базі цих моделей не потребує значного часу та використання комп'ютера. Дуже важливо те, що в емпіричних моделях, використовують параметри, які прямо характеризують умови експлуатації споруди та які легко визначити: добова витрата стічних вод, па-

раметри стічних вод тощо; кількість таких параметрів – незначна. Але ці моделі мають недоліки [1]:

1) як усі емпіричні моделі, їх можна використовувати лише для тих умов, для яких визначені конкретні константи, що містить модель;

2) моделі фактично не враховують гідродинаміку всередині біореактора;

3) моделі не враховують геометричну форму біореактора;

4) моделі не враховують детально біологічні аспекти очищення води;

5) моделі не враховують нерівномірний розподіл субстрату, активного мулу, кисню в реакторі.

*2. Нульвимірні моделі.* Інша група моделей – моделі, в основу яких покладено звичайні диференціальні рівняння, що описують процес біологічного очищення стічних вод. Це нульвимірні моделі на основі балансового співвідношення: притік – вихід – приріст (або деструкція). Таким чином, нульвимірні моделі є багатофакторними, що важливо на практиці.

Необхідно підкреслити, що поряд із нестационарними балансовими рівняннями також використовують стаціонарні рівняння (коли похідні за часом дорівнюють нулю). Використання стаціонарних рівнянь дозволяє, в багатьох випадках знаходити аналітичний розв'язок задачі.

Важливим аспектом є те, що за допомогою моделей цієї групи визначають константи, які входять до моделі і які використовують для теоретичного опису біологічного очищення в реакторі (моделі Monod, моделі Harremoos, Stover – Kincannon та інші).

Слід зазначити, що наявні нульвимірні моделі для аналізу роботи біореакторів у цілому орієнтовані на розв'язання задач, коли параметри задачі – постійні. Наприклад, не враховують зміну з часом витрати стічних вод, а також зміну з часом концентрації субстрату, що надходить до реактора. Це є недоліком, тому що витрата стічних вод є суттєво нерівномірною, тобто вона є змінною з часом на реальних об'єктах. Також змінною з часом є концентрація субстрату в стічних водах, що потрапляють на очищення. Така зміна концентрації може бути пов'язана, наприклад, з аварією на об'єкті.

Широке використання моделей цієї групи пояснюється тим, що, як відзначено вище, моделювальні рівняння допускають аналітичний розв'язок. У деяких випадках можливе застосування чисельних методів (наприклад, методу Рунге–Кутта) для розв'язання звичайних диференціальних рівнянь. Нульвимірні моделі використовують за кордоном у кодах ASM1, ASM2 та інших. У цих моделях додатково використовують емпіричні «субмоделі», що дозволяють визначити необхідні для розрахунку реактора параметри (модель Monod, модель швидкості деструкції субстрату в біоплівці тощо). Додатковою «субмоделлю» є одновимірне рівняння дифузії, що описує, наприклад, потік субстрату в біоплівці. Розрахунок на базі моделей цієї групи триває декілька секунд, тобто моделі можна використовувати для проведення серійних розрахунків на практиці.

Практичність застосування нульвимірних моделей пов'язано з тим, що в їх основі лежить закон збереження маси для субстрату, активного мулу або кисню, тобто використано універсальне положення механіки суцільного середовища.

Але слід відзначити такі недоліки моделей цієї групи [1]:

1) не враховано гідродинаміку всередині реактора;

2) не враховано нерівномірність розподілу концентрації активного мулу та субстрату в реакторі та вплив такої нерівномірності на процес біологічних перетворень.

3. *CFD-моделі для розрахунку споруд біологічного очищення стічних вод* [1]. В основу цих моделей покладено послідовне розв'язання трьох задач – задачі гідродинаміки, задачі масопереносу та задачі біологічного «перетворення» субстрату. Для розв'язання гідродинамічної задачі використовують, найчастіше рівняння Нав'є–Стокса. Для розрахунку концентрації активного мулу та субстрату використовують багатовимірне рівняння масопереносу. Задачу біологічного перетворення субстрату розв'язують за допомогою «субмоделей» різної ієрархії. Ці моделі також використовують для розрахунку кисневого режиму в біореакторі. Тобто моделі цієї групи теж багатofакторні, крім цього, вони дозволяють враховувати вплив руху субстрату, кисню, актив-

ного мулу на ефективність біологічного очищення стічних вод.

Важливою перевагою моделей цієї групи є можливість розрахунку нерівномірного розподілу субстрату, активного мулу, кисню в біореакторі, врахування геометричної форми споруди, місць подачі кисню та ін. Як правило, за кордоном для CFD-моделювання використовують комерційні пакети програм, наприклад, пакет ANSYS. Тобто дослідники не розробляють свої CFD-моделі, а використовують уже наявні пакети програм.

Аналіз літературних джерел [1] показує, що частка наукових досліджень на базі CFD-моделей у цій галузі дуже обмежена. Попри наявність суттєвих та важливих переваг CFD-моделей над моделями інших груп вони мають ряд недоліків:

1) дуже висока вартість комерційних ліцензованих пакетів для CFD-моделювання;

2) необхідність спеціалізованих знань у галузі обчислювальної гідродинаміки, очищення стічних вод;

3) необхідність ліцензії у користувача для використання комерційних пакетів для наукових досліджень або прикладних розрахунків;

4) значні затрати комп'ютерного часу на розрахунок одного варіанта задачі (тривалість розрахунку – декілька діб);

5) потрібно використовувати потужні комп'ютери для проведення розрахунків, що суттєво перешкоджає щоденному практичному використанню моделей;

6) у разі використання комерційних пакетів CFD-моделювання роботи біореакторів можливе лише в «рамках», що дозволені розробниками пакета.

Як свідчить аналіз літературних джерел, в Україні є суттєвий дефіцит самостійно побудованих CFD-моделей.

Слід підкреслити, що сьогодні існує незначна кількість математичних моделей, що дозволяють б розраховувати біореактори із завислим або зваженим біоценозом [1].

Для практики необхідні моделі, які можна забезпечити вхідними даними для проведення розрахунків (наприклад, параметри для моделей Monod, Graumode).

Можна зазначити, що у зв'язку з великою кількістю біореакторів, які експлуатують сьо-

## ЕКОЛОГІЯ ТА ПРОМИСЛОВА БЕЗПЕКА

годні на різних об'єктах, залишається проблема створення ефективних математичних моделей для аналізу їх роботи.

**Мета**

Робота спрямована на розробку box-моделі, що дозволяє в режимі реального часу прогнозувати рівень розчиненого кисню в аеротенку та оцінити ефективність очищення стічних вод у біореакторі.

**Методика**

Для опису процесу біологічного очищення стічних вод в аеротенку використовують такі рівняння [1, 12]:

$$\frac{dX}{dt} = Q(t) \cdot X_{in}(t) - Q(t) \cdot X + \mu \cdot X - K_d \cdot X; \quad (1)$$

$$\frac{dDO}{dt} = Q(t) \cdot DO_{in}(t) - Q(t) \cdot DO(t) + K_{La}(DO_{max} - DO) - \frac{K_0 \mu X}{Y}; \quad (2)$$

$$\frac{dS}{dt} = Q(t) \cdot S_{in}(t) - Q(t) \cdot S(t) - \frac{\mu X}{Y}; \quad (3)$$

$$\mu = \mu_{max} \cdot \frac{S}{S + K_s} \cdot \frac{DO}{k_{DO} + DO}, \quad (4)$$

де  $t$  – час;  $Q(t)$  – витрата стічних вод;  $X_{in}(t)$  – концентрація активного мулу, що потрапляє до аеротенка;  $S_{in}$  – концентрація субстрату, що потрапляє до аеротенка;  $K_d$  – коефіцієнт, що враховує швидкість вимирання біомаси;  $DO$  – концентрація кисню в стічних водах;  $DO_{max}$  – максимальне значення концентрації кисню в стічних водах;  $DO_{in}$  – концентрація кисню в стічних водах, що потрапляють до реактора;  $K_0, K_s, K_{La}, \mu_{max}, k_{DO}, Y$  – параметри [12].

Рівняння (1)–(3) виражають закон збереження маси для субстрату, розчиненого кисню та активного мулу в реакторі. Залежність (4) показує зв'язок швидкості приросту біомаси в біореакторі залежно від концентрації розчиненого кисню та концентрації субстрату.

Для системи рівнянь (1)–(3) потрібно задати початкові умови за  $t = 0$ :

$$X = X_0; \quad S = S_0; \quad DO = DO_0.$$

Моделювальні рівняння (1)–(3) дають можливість визначити, як із часом змінюється концентрація субстрату (домішки) в біореакторі, а також розчиненого кисню та активного мулу.

Система рівнянь (1)–(3) є нелінійною. Для аналітичного аналізу процесу біологічного очищення стічних вод в аеротенку розглянемо спрощену модель. Такі спрощені рівняння можна отримати із системи рівнянь (1)–(3), якщо знехтувати деякими членами. Спрощена модель біологічного очищення має вигляд:

$$\frac{dX}{dt} = \mu \cdot X; \quad (5)$$

$$\frac{dDO}{dt} = -\frac{K_0 \mu X}{Y}; \quad (6)$$

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\mu X}{Y}. \quad (7)$$

Тут беремо, що коефіцієнт  $\mu$  не залежить від концентрації розчиненого кисню, тобто

$$\mu = \mu_{max} \cdot \frac{S}{S + K_s}.$$

Далі запишемо рівняння (6) так:

$$\frac{dDO}{dX} \frac{dX}{dt} = -\frac{K_0 \mu X}{Y}. \quad (8)$$

З урахуванням (5) можемо привести рівняння (8) до вигляду:

$$\frac{dDO}{dX} \mu X = -\frac{K_0 \mu X}{Y}$$

або

$$\frac{dDO}{dX} = -\frac{K_0}{Y}. \quad (9)$$

Рівняння (9) можна записати так:

$$dDO = -\frac{K_0}{Y} dX. \quad (10)$$

## ЕКОЛОГІЯ ТА ПРОМИСЛОВА БЕЗПЕКА

Таким чином, згідно з (10) збільшення концентрації активного мулу в біореакторі на величину  $dX$  призводить до пропорційного зменшення концентрації розчиненого кисню в стічних водах, а коефіцієнт пропорційності дорівнює  $K_0/Y$ . Параметри  $K_0$ ,  $Y$  визначають експериментальним шляхом. Але якщо взяти  $K_0 = 0,5$ ;  $Y = 0,55$ , то коефіцієнт пропорційності дорівнюватиме  $K_0/Y = 0,91$ .

Безумовно, залежність (10) можна використати лише для приблизної оцінки зменшення розчиненого кисню в стічних водах, що проходять очищення в біореакторі.

Чисельне інтегрування рівнянь (5) – (7) здійснюють за методом Ейлера. Розрахункові залежності мають вигляд:

$$X^{n+1} = X^n + dt \cdot \mu^n \cdot X^n; \quad (11)$$

$$DO^{n+1} = DO^n - dt \cdot \frac{K_o \mu^n}{Y} X^{n+1}; \quad (12)$$

$$S^{n+1} = S^n - dt \cdot \frac{K_o \mu^n}{Y} X^{n+1}. \quad (13)$$

Здійснено програмну реалізацію різницьких рівнянь (11) – (13). Створено комп'ютерну програму AER-T, мова програмування – FORTRAN.

### Результати

Нижче наведено результати розв'язання моделювальної задачі: на базі рівнянь (5) – (7) здійснюємо чисельний розрахунок зміни концентрацій субстрату, активного мулу та розчиненого кисню в біореакторі. При цьому використовуємо метод Ейлера (і апроксимуємо залежності (11) – (13)). Паралельно здійснюємо розрахунок зміни кількості розчиненого кисню в біореакторі на базі спрощеної (аналітичної) моделі (10). Тобто порівнюємо визначення концентрації розчиненого кисню на базі чисельної моделі та аналітичного виразу. Розрахунок здійснюємо за початкової умови (якщо  $t = 0$ ):  $S_0 = 200$  мг/л,  $X_0 = 3$  мг/л,  $DO_0 = 3$  мг/л.

Нижче на рис. 1–3 показана зміна прогнозованих параметрів в біореакторі для різних моментів часу (час безрозмірний).

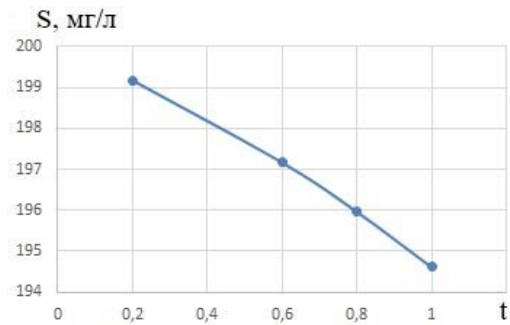


Рис. 1. Зміна концентрації субстрату в біореакторі з часом

Fig. 1. Changes in substrate concentration in a bioreactor over time

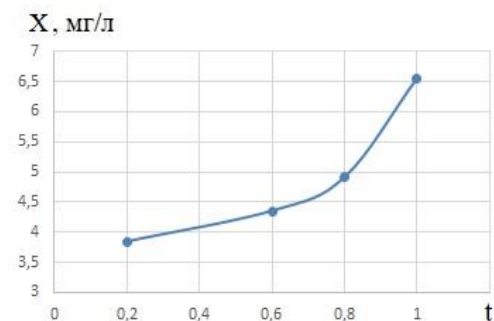


Рис. 2. Зміна концентрації активного мулу в біореакторі з часом

Fig. 2. Changes in the concentration of activated sludge in a bioreactor over time

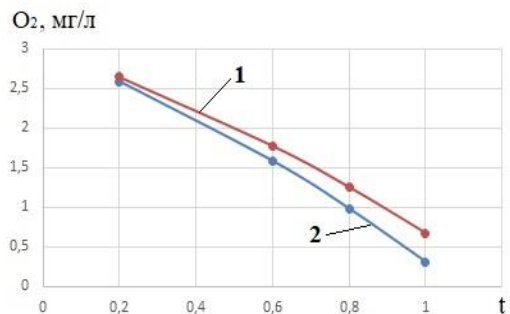


Рис. 3. Зміна концентрації розчиненого кисню в біореакторі з часом:

- 1 – розрахунок на базі аналітичної моделі;  
2 – розрахунок на базі чисельної моделі

Fig. 3. Changes in the concentration of dissolved oxygen in a bioreactor over time:

- 1 – calculation based on the analytical model;  
2 – calculation based on a numerical model

Як бачимо з наведених рисунків, за вибраних вхідних параметрів у біореакторі має місце зменшення кількості субстрату та зростання

## ЕКОЛОГІЯ ТА ПРОМИСЛОВА БЕЗПЕКА

концентрації активного мулу. Також можна побачити, що в рамках розглянутої спрощеної моделі наявна задовільна збіжність розрахунку розчиненого кисню в біореакторі на базі чисельної та аналітичної моделей. Але зі збільшенням часу зростає різниця між аналітичною моделлю та чисельним розв'язком.

Відзначимо, що час розрахунку дорівнював 1 с.

### Наукова новизна та практична значимість

У статті розглянуто експрес-метод розрахунку кисневого режиму в аеротенку. Метод дозволяє швидко визначити концентрацію розчиненого кисню в біоспоруді. Це дає можливість

здійснити спрощене оцінювання процесу біохімічного окислення в очисній споруді.

Запропонований метод можна використовувати під час проектування або реконструкції споруд біологічного очищення води для оцінювання кисневого режиму та його зміну з часом.

### Висновки

1. У статті запропонована чисельна модель для аналізу ефективності очищення води в біореакторі. Результати комп'ютерного експерименту показують, що розроблена математична модель дає можливість в онлайн-режимі розраховувати основні параметри, що характеризують ефективність роботи біореактора.

2. У подальшому цей науковий напрям слід розвивати для розробки тривимірної чисельної моделі для аналізу ефективності роботи біореактора.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Біляєв М. М., Козачина В. А., Гунько О. Ю., Лемеш М. В. *Комп'ютерне моделювання процесів біологічної очистки стічних вод* : монографія. Дніпро : Журфонд, 2023. 186 с.
2. Василенко О. А., Грабовський П. О., Ларкіна Г. М., Поліщук О. В., Прогульний В. Й. *Реконструкція і інтенсифікація споруд водопостачання та водовідведення* : навч. посіб. Київ : ІВНВКП «Укргеліотек», 2010. 272 с.
3. Карелин Я. А., Жуков Д. Д., Журов В. Н., Репин Б. Н. *Очистка производственных сточных вод в аеротенках*. Москва : Стройиздат, 1973. 223 с.
4. Ласков Ю. М., Воронов Ю. В., Калицун В. И. *Примеры расчетов канализационных сооружений*. Москва : Высшая школа, 1981. 237 с.
5. Олійник О. Я., Айрапетян Т. С. Моделювання очисних стічних вод від органічних забруднень в біореакторах-аеротенках зі зваженим (вільно плаваючим) і закріпленим біоценозом. *Доповідь НАН України*. 2015. № 5. С. 55–60. DOI: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2015.05.055>
6. Alharbi A. O. M. The biological treatment of wastewater: mathematical models. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*. 2016. Vol. 94. Iss. 2. P. 347–348. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0004972716000411>
7. Babaei A., Azadi R., Jaafarzadeh N., Alavi N. Application and Kinetic Evaluation of upflow Anaerobic bio-film Reactor for Nitrogen Removal from Wastewater. *Iranian Journal of Environmental Health Science and Engineering*. 2013. Vol. 10. Iss. 1. P. 1–8. DOI: <https://doi.org/10.1186/1735-2746-10-20>
8. Dapelo D., Bridgeman G. A CFD strategy to retrofit an anaerobic digester to improve mixing performance in wastewater treatment. *Water Science & Technology*. 2020. Vol. 81. Iss. 8. P. 1646–1657. DOI: <https://doi.org/10.2166/wst.2020.086>
9. Gao H., Stenstrom M. K. Development and applications in CFD modeling for secondary settling tanks over the last three decades: A review. *Water Environment Research*. 2019. Vol. 92. Iss. 6. P. 796–820. DOI: <https://doi.org/10.1002/wer.1279>
10. Gao H., Stenstrom M. K. Influence of Model Parameters and Inlet Turbulence Boundary Specification Methods in Secondary Settling Tanks: Computational Fluid Dynamics Study. *Journal of Environmental Engineering*. 2020. Vol. 146. Iss. 5. P. 04020028-1–04020028-12. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EE.1943-7870.0001689](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EE.1943-7870.0001689)
11. Mocanu C. R., Mihailescu R. Numerical Simulation Wastewater Treatment Aeration Processes. *U. P. B. Sci. Bull., Series D*. 2012. Vol. 74. Iss. 2. P. 191–198.
12. Pereda M., Zamarrano J. M. Agent – based modeling of an activated sludge process in batch reactor. *19th Mediterian Conference on Control and Automation Aquis* (Corfu, 20-23 June 2011). Corfu, 2011. P. 1128–1133. DOI: <https://doi.org/10.1109/med.2011.5983027>

13. Vilanova R., Rojas J. D., Alfaro V. M. Digital Control of a Waste Water Treatment Plant. *International Journal of Computers Communications & Control*. 2011. Vol. 6, № 2. P. 367–374.  
DOI: <https://doi.org/10.15837/ijccc.2011.2.2184>

M. M. BILIAIEV<sup>1</sup>, P. B. MASHYKHINA<sup>2\*</sup>, R. P. POBIEDONNYI<sup>3</sup>, A. O. CHIRKOV<sup>4</sup>,  
M. V. CHYRVA<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Dep. of «Hydraulics and Water Supply», Ukrainian State University of Science and Technologies, Lazaryana St., 2, Dnipro, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 373 15 09, e-mail: biliaiev.m@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1531-7882

<sup>2\*</sup>Dep. of «Hydraulics and Water Supply», Ukrainian State University of Science and Technologies, Lazaryana St., 2, Dnipro, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 373 15 09, e-mail: gidro\_eko@ukr.net, ORCID: 0000-0003-3057-9204

<sup>3</sup>Dep. of «Hydraulics and Water Supply», Ukrainian State University of Science and Technologies, Lazaryana St., 2, Dnipro, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 373 15 09, e-mail: water.supply.treatment@gmail.com, ORCID: 0009-0009-6551-1630

<sup>4</sup>Dep. of «Hydraulics and Water Supply», Ukrainian State University of Science and Technologies, Lazaryana St., 2, Dnipro, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 373 15 09, e-mail: diit.hydro.eco@gmail.com, ORCID: 0009-0005-4326-2881

<sup>5</sup>Dep. of «Hydraulics and Water Supply», Ukrainian State University of Science and Technologies, Lazaryana St., 2, Dnipro, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 373 15 09, e-mail: chyryva\_m@gmail.com, ORCID: 0009-0006-1416-9482

## Mathematical Model of Oxygen Regime Analysis in a Bioreactor

**Purpose.** Today, aeration tanks are widely used to treat industrial and municipal wastewater. Assessing the efficiency of water treatment in aeration tanks under different operating conditions is an important task. To solve this problem, it is necessary to have mathematical models that allow to quickly obtain data on the effect of treatment in aeration tanks. The main objective of this work is to develop a numerical box model to determine the efficiency of wastewater treatment in an aeration tank. **Methodology.** For mathematical modeling of the biological wastewater treatment process in a bioreactor, zero-dimensional material balance equations are used, which are written in relation to the concentration of substrate, activated sludge, and dissolved oxygen in wastewater. The Monod model is used to calculate the substrate oxidation process. The Euler method is used to integrate the modeling equations. A simplified model of biological water treatment in a bioreactor is considered, which makes it possible to obtain an analytical solution to the problem. The obtained analytical expression makes it possible to quickly determine the change in the concentration of dissolved oxygen in wastewater depending on the change in the concentration of activated sludge in the bioreactor. The constructed numerical model makes it possible to determine the dynamics of changes in the concentration of contaminants, activated sludge and oxygen in wastewater during their stay in the bioreactor. **Findings.** A tool for theoretical evaluation of the efficiency of biological wastewater treatment in an aeration tank is proposed. A numerical model has been built that allows determining the concentration of dissolved oxygen, substrate and activated sludge at the outlet of the aeration tank. **Originality.** An effective numerical model has been developed that allows to quickly calculate the dynamics of wastewater treatment in a bioreactor and, based on this information, to evaluate the efficiency of the reactor. **Practical value.** The constructed mathematical model can be useful in the reconstruction of biological wastewater treatment facilities, as well as at the design stage of bioreactors to take into account their operation under different operating conditions. A computer program has been developed that implements the constructed numerical model. The results of a computer experiment are presented.

*Key words:* bioreactor; wastewater treatment; numerical modeling; water use

## REFERENCES

1. Biliaiev, M. M., Kozachyna, V. A., Gunko, O. Yu., & Lemesh, M. V. (2023). *Kompiuterni modeliuvannia protsesiv biologichnoi ochystky stichnykh vod: monohrafiia*. Dnipro: Zhurfond. (in Ukrainian)
2. Vasylenko, O. A., Hrabovskyi, P. O., Larkina, H. M., Polishchuk, O. V., & Prohulnyi, V. Y. (2010). *Rekonstruktsiia i intensyfikatsiia sporud vodopostachannia ta vodovidvedennia: navchalnyi posibnyk*. Kyiv: IVNVKP «Ukrheliotek». (in Ukrainian)
3. Karelin, Ya. A., Zhukov, D. D., Zhurov, V. N., & Repin, B. N. (1973). *Ochistka proizvodstvennykh stochnykh vod v aerotenkah*. Moscow: Stroiyzdat. (in Russian)
4. Laskov, Yu. M., Voronov, Yu. V., & Kalicun, V. I. (1981). *Primery raschetov kanalizatsionnykh sooruzheniy*. Moscow: Vysshaya Shkola. (in Russian)

5. Oliinyk, O. Ya., & Airapetyan, T. S. (2015). The modeling of the clearance of waste waters from organic pollutions in bioreactors-aerotanks with suspended (free flow) and fixed biocenoses. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, 5, 55-60. DOI: <https://doi.org/10.15407/dopovidi2015.05.055> (in Ukrainian)
6. Alharbi, A. O. M. (2016). The biological treatment of wastewater: mathematical models. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 94(2), 347-348. DOI: <https://doi.org/10.1017/s0004972716000411> (in English)
7. Babaei, A., Azadi, R., Jaafarzadeh, N., & Alavi, N. (2013). Application and Kinetic Evaluation of upflow An-aerobic biofilm Reactor for Nitrogen Removal from Wastewater. *Iranian Journal of Environmental Health Science and Engineering*, 10(1), 1-8. DOI: <https://doi.org/10.1186/1735-2746-10-20> (in English)
8. Dapelo, D., & Bridgeman, G. (2020). A CFD strategy to retrofit an anaerobic digester to improve mixing performance in wastewater treatment. *Water Science & Technology*, 81(8), 1646-1657. DOI: <https://doi.org/10.2166/wst.2020.086> (in English)
9. Gao, H., & Stenstrom, M. K. (2019). Development and applications in CFD modeling for secondary settling tanks over the last three decades: A review. *Water Environment Research*, 92(6), 796-820. DOI: <https://doi.org/10.1002/wer.1279> (in English)
10. Gao, H., & Stenstrom, M. K. (2020). Influence of Model Parameters and Inlet Turbulence Boundary Specification Methods in Secondary Settling Tanks: Computational Fluid Dynamics Study. *Journal of Environmental Engineering*, 146(5), 04020028-1-04020028-12. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EE.1943-7870.0001689](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EE.1943-7870.0001689) (in English)
11. Mocanu, C. R., & Mihaillescu, R. (2012). Numerical Simulation Wastewater Treatment Aeration Processes. *U. P. B. Sci. Bull., Series D*, 74(2), 191-198. (in English)
12. Pereda, M., & Zamarreno, J. M. (2011, June). Agent-based modeling of an activated sludge process in batch reactor. *19th Mediterranean Conference on Control and Automation Aquis* (pp. 1128-1133). Corfu, Greece. DOI: <https://doi.org/10.1109/med.2011.5983027> (in English)
13. Vilanova, R., Rojas, J. D., & Alfaro, V. M. (2011). Digital Control of a Waste Water Treatment Plant. *International Journal of Computers Communications & Control*, 6(2), 367-374. DOI: 10.15837/ijccc.2011.2.2184 (in English)

Надійшла до редколегії: 03.12.2023

Прийнята до друку: 29.03.2024