

РУХОМИЙ СКЛАД І ТЯГА ПОЇЗДІВ

УДК 629.4.027.31-272.82:519.87

А. Я. КУЗИШИН^{1*}, С. А. КОСТРИЦЯ², Ю. Г. СОБОЛЕВСЬКА³, А. В. БАТІГ^{4*}

^{1*}Каф. «Рухомий склад і колія», Львівська філія Дніпровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, вул. І. Блажкевич, 12-а, Львів, Україна, 79052, тел. +38 (032) 267 99 74, ел. пошта kuzyshyn1993@gmail.com, ORCID 0000-0002-3012-5395

²Каф. «Теоретична та будівельна механіка», Дніпровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, вул. Лазаряна, 2, Дніпро, Україна, 49010, тел. +38 (056) 373 15 11, ел. пошта kossa571@gmail.com, ORCID 0000-0002-7922-0975

³Каф. «Фундаментальні дисципліни», Львівська філія Дніпровського національного університету залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, вул. І. Блажкевич, 12-а, Львів, Україна, 79052, тел. +38 (032) 267 99 74, ел. пошта sobolevskyy@gmail.com, ORCID 0000-0002-8087-2014

^{4*}Лаб. «Залізнично-транспортні дослідження», Львівський науково-дослідний інститут судових експертиз, вул. Липинського, 54, Львів, Україна, 79024, тел. +38 (032) 231 76 13, ел. пошта batigasha1992@gmail.com, ORCID 0000-0003-1205-6004

Світовий досвід створення математичних моделей пневматичної ресори: переваги та недоліки

Мета. Враховуючи потреби виробництва та впровадження в експлуатацію сучасного швидкісного рухомого складу з удосконаленою системою амортизації, автори передбачають провести аналіз створених на цей час математичних моделей динамічної поведінки пневматичної ресори, систематизувати їх та з'ясувати переваги й недоліки кожного з типів моделей. **Методика.** Для проведення аналізу використано порівняльно-хронологічний метод, який дає можливість простежити розвиток наявних концепцій і теорій. Залежно від типу розв'язувальних рівнянь наявні моделі пневматичних ресор було поділено на три групи: механічні, термодинамічні та скінченноелементні. Під час аналізу оцінено можливість врахування в моделі конструктивних особливостей ресори, теплопередачі, нелінійності характеристик матеріалів, форми мембрани, частоти збурювальної сили та ін. **Результати.** Показано, що особливістю механічних моделей є визначення вхідних параметрів на основі аналізу експериментальних результатів, яке вимагає доступу до складного вимірювального обладнання та яке потрібно виконувати для кожної нової моделі пневматичної ресори окремо. На відміну від механічних моделей, які дозволяють урахувувати демпфувальний ефект пневморесори в горизонтальному та вертикальному напрямку, термодинамічні моделі переважно орієнтовані на дослідження динамічної поведінки пневматичної ресори у вертикальному напрямку. Використання методу скінченних елементів дозволяє найбільш точно відтворити динамічну поведінку пневматичної ресори, проте вимагає значних затрат сил та часу на створення скінченноелементної моделі й виконання розрахунків. **Наукова новизна.** Систематизовано математичні моделі динамічної поведінки пневматичної ресори та підкреслено важливість їх використання під час досліджень руху швидкісного залізничного рухомого складу. **Практична значимість.** Проведений аналіз математичних моделей динамічної поведінки пневматичної ресори показує шляхи подальшого їх удосконалення, вказує на можливість їх використання в просторовій математичній моделі рухомого складу відповідно до поставлених задач. Це дозволить ще на етапі проектування швидкісного рухомого складу оцінювати його динамічні показники та показники безпеки руху під час взаємодії з рейковою колією.

Ключові слова: пневматична ресора; рухомий склад; математична модель; жорсткість; демпфування; термодинаміка; тиск; температура

Вступ

Відповідно до Стратегії АТ «Укрзалізниця» на 2019–2023 роки, однією із загальних ініціатив бізнес-вертикалі є оновлення парку пасажирського та моторвагонного рухомого складу [5]. Оновлені вагони повинні гарантувати безпеку пасажирів та вантажів в умовах прискореного руху поїздів та, у найближчому майбутньому, швидкісного руху зі швидкостями від 161 до 200 км/год. Відповідно, важливими й актуальними постають питання проєктування швидкісного рухомого складу та його окремих конструкційних вузлів, створення надійної системи амортизації вагонів у процесі руху, розподілу мережі на лінії з вантажним і пасажирським рухом.

В Україні провідним підприємством у сфері впровадження в експлуатацію сучасного швидкісного рухомого складу є Крюківський вагонобудівний завод. В останніх розробках підприємства в конструкцію механічної частини рухомого складу було внесено зміни в частині використання в центральній ступені ресорного підвищення пневматичних ресор. Як показує досвід експлуатації, указана особливість дозволяє не тільки поліпшити динамічні показники рухомого складу, але й за рахунок примусового нахилу кузова вагона у кривій ділянці колії здійснювати вантажний та пасажирський швидкісний рух у межах однієї колії.

Основною особливістю застосування пневматичної ресори є отримання суттєво нелінійної силової характеристики з'єднання елементів конструкції за її обмежених габаритів та самодемпфувальних властивостей. Але перед установленням пневморесори на конкретний рухомий склад необхідно дати відповідь на ряд запитань, які полягають у виборі оптимальних розмірів додаткового резервуара й елементів дроселювання, оцінці самодемпфувальних властивостей пневматичного елемента, визначенні силової характеристики пневматичного підвищення, аналізі динамічних якостей рухомого складу з пневматичними ресорами в експлуатаційному й аварійному режимах, розробці та створенні конструкцій пневмосистеми з пристроями регулювання й управління. За наявності адекватної математичної моделі рухомого складу з пневморесорами поставлені задачі

можна розв'язувати чисельно на стадії проєктування без використання коштовного та складного натурального експерименту.

Тому проведення аналізу створених на цей момент математичних моделей пневматичної ресори є актуальним. Він дозволить установити переваги й недоліки запропонованих математичних моделей та розподілити їх відповідно до поставлених задач.

Мета

Основною метою роботи є аналіз та систематизація наявих математичних моделей динамічної поведінки пневматичної ресори; оцінка можливості врахування в моделях параметрів, які чинять основний вплив на роботу пневморесори, а також ефективності застосування розглянутих моделей під час створення моделі швидкісного залізничного поїзда.

Методика

Для проведення аналізу використано порівняльно-хронологічний метод, який дає можливість простежити розвиток декількох точок зору, концепцій, теорій. Відповідно до того, які обрано розв'язувальні рівняння, наявні моделі пневматичних ресор було поділено на три групи: механічні, термодинамічні та скінченноелементні. Під час аналізу математичних моделей приділено увагу можливості врахування в них конструктивних особливостей пневматичної ресори, теплопередачі, нелінійних характеристик матеріалів, форми мембрани тощо.

Розгляд, аналіз та класифікація наявих математичних моделей пневматичних ресор є важливою передумовою для визначення напрямів подальшого створення уточнених математичних моделей пневматичних систем, а також побудови більш детальних просторових моделей інноваційного рухомого складу, які можна використовувати як для його модернізації, так і проєктування. Із точки зору динаміки, для отримання якісної та кількісної картини необхідно проводити дослідження роботи пневматичної ресори в частотному діапазоні від 0 до 20 Гц [45]. Очевидно, що спектр застосування наявих моделей пневматичних ресор суттєво розрізняється.

РУХОМИЙ СКЛАД І ТЯГА ПОЇЗДІВ

Результати

Механічні моделі представлені як еквівалентні механічні схеми (що складаються з пружин, мас, демпфувальних та інших елементів), значення параметрів яких зазвичай визначають експериментальним шляхом. Проста та швидка реалізація робить їх найбільш популярним варіантом у моделюванні. У 1963 році автор роботи [18] запропонував одну з перших механічних моделей як базу для аналізу характеристик пневматичної ресори в низькочастотному діапазоні (рис. 1). Для такої моделі прийнято припущення про один спільний об'єм пневморесори та додаткового резервуара, що є справедливим у випадку використання з'єднувального елемента значного діаметра або за малої частоти коливань системи.

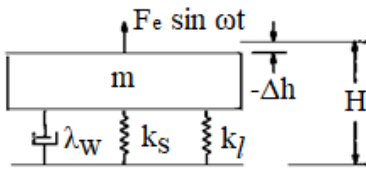


Рис. 1. Базова механічна модель роботи пневматичної ресори

Fig. 1. Basic mechanical model of the air spring operation

Рівняння руху маси m має вигляд:

$$m\Delta\ddot{h} = F_e \sin \omega t - \lambda_w \Delta\dot{h} - (K_s + K_l)\Delta h; \quad (1)$$

$$m = \frac{A_H p_g}{g}; \quad K_s = \frac{\gamma A_H p}{H}, \quad K_l = l \cdot p_g,$$

де m – маса вантажу; Δh – зміна висоти в процесі коливання пневморесори; ω – частота збурювальної сили; λ_w – коефіцієнт демпфування; K_s – адіабатична жорсткість пневморесори; K_l – жорсткість пневморесори внаслідок зміни її ефективної площі; l – постійна зміна ефективної площі пневморесори зі зміною її висоти; γ – відношення питомих теплоємностей повітря; A_H – ефективна площа пневморесори на проектній висоті; p_g – тиск повітря в пневматичній ресорі; p – абсолютний тиск повітря в пневматичній ресорі; H – проектна висота пневморесори.

Постійна в'язкого демпфування в загальному характеризує розсіювання енергії матеріалом пневматичної ресори та повітрям унаслідок його перетікання з пневматичної ресори в додатковий резервуар і навпаки.

Найбільш популярними механічними моделями пневматичних ресор є лінійна модель S. Nishimura [42], модель Simpack [44], модель Vampire (вертикальна й бокова) [6, 28] і модель Берга [9, 10].

Модель Nishimura була реалізована в програмному комплексі ADAMS/Rail [42, 57]. Математична модель розділяє об'єми пневматичної ресори V_b та додаткового резервуара V_r , а також може враховувати лінійне в'язке демпфування з коефіцієнтом C (рис. 2).

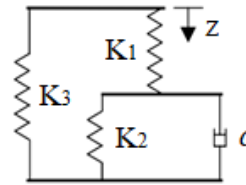


Рис. 2. Вертикальна математична модель пневматичної ресори (модель Nishimura)

Fig. 2. Vertical mathematical model of the air spring (Nishimura model)

Модель Simpac, наведена в роботі [53], є продовженням моделі Nishimura та додатково враховує вплив аварійної пружини з жорсткістю K_2 та демпфуванням c_2 (рис. 3).

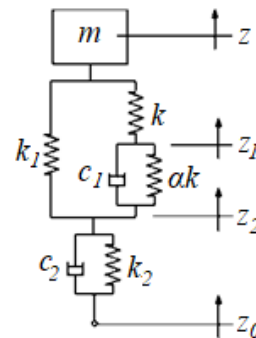


Рис. 3. Математична модель пневматичної ресори Simpac

Fig. 3. Mathematical model of the Simpac air spring

РУХОМИЙ СКЛАД І ТЯГА ПОЇЗДІВ

Еквівалентну жорсткість пневматичної ресори знаходимо за формулою:

$$K_e = K \frac{\beta_2 \left(\beta_1 + \frac{\alpha}{1 + \alpha} \right)}{\beta_1 + \beta_2 + \frac{\alpha}{1 + \alpha}}; \quad (2)$$

$$K = \frac{A_{\text{эф}}^2 pn}{V}; \quad \alpha = \frac{V}{V_{\text{дод}}}; \quad \beta_1 = \frac{K_1}{K}; \quad \beta_2 = \frac{K_2}{K}.$$

де K – жорсткість пневматичної ресори; K_1 – жорсткість, яка визначається зміною ефективної площі пневматичної ресори; K_2 – жорсткість аварійної пружини; α – відношення об’ємів пневматичної ресори й додаткового резервуара.

Згодом моделі Nishimura та Simpras були уточнені шляхом додаткового використання «масової» моделі, яка враховує повітряну масу з’єднувального трубопроводу та відносне прискорення цієї маси (рис. 4). Цю модель було реалізовано у програмному комплексі Vampire.

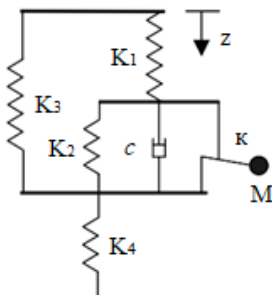


Рис. 4. Математична модель пневматичної ресори Vampire

Fig. 4. Mathematical model of the Vampire air spring

Оскільки маса повітря в з’єднувальному трубопроводі є малою, то здається, що нею можна знехтувати. Проте площа поперечного перерізу труби є набагато меншою, ніж пневматичної ресори або додаткового резервуара, тому швидкість повітря, що досягається в трубі, та інерція повітряної маси можуть бути значними, що впливає на характеристики пневматичної ресори під час її моделювання.

Слід зазначити, що модель Vampire також передбачає дослідження горизонтальної поведінки пневматичної ресори (рис. 5).

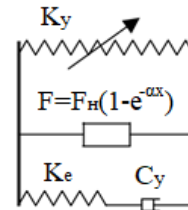


Рис. 5. Горизонтальна модель Vampire

Fig. 5. Horizontal Vampire model

Модель Gensys [8, 9] є найскладнішою механічною нелінійною тривимірною моделлю пневматичної ресори, яка може описувати її поперечну, поздовжню й вертикальну поведінку (рис. 6). Запропонована модель має 13 параметрів та описує три ефекти: пружність, тертя і в’язкість. У своїх роботах автор рекомендує визначати параметри на основі аналізу експериментальних результатів. Проте експерименти вимагають доступу до складного вимірювального обладнання, а також їх потрібно виконувати для кожної нової моделі пневматичної ресори.

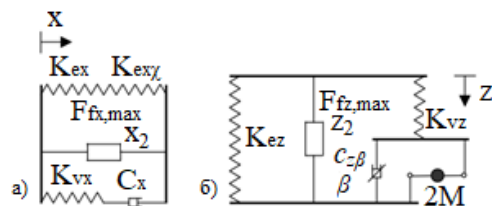


Рис. 6. Модель Gensys

Fig. 6. Gensys model

Вертикальна модель (рис. 6, б) описує пружні та демфувальні властивості ресори, а також враховує масу $2M$, яка описує інерцію повітря в зрівнювальному трубопроводі.

У горизонтальному напрямку для низьких частот пружини K_{ex}, K_{exy} є доміантними. У разі збільшення частоти в’язкий демпфер C_x починає передавати силу, і жорсткість K_{vx} стає активною. Це призводить до зростання значення загальної горизонтальної жорсткості.

Значення горизонтальних параметрів перш за все залежать від властивостей гуми, яка розсіює енергію внаслідок молекулярного тертя. Для визначення параметрів необхідно провести два випробування:

РУХОМИЙ СКЛАД І ТЯГА ПОЇЗДІВ

– велика амплітуда зміщення (20–40 мм)
і низька частота ($< 0,1$ Гц);

– середня амплітуда зміщення (5–20 мм)
і середня частота (≈ 1 Гц).

Для визначення параметрів вертикальної моделі в роботах [45, 56] було розглянуто баланс сил, які виникають у з'єднувальному трубопроводі та діють на поршень (рис. 7).

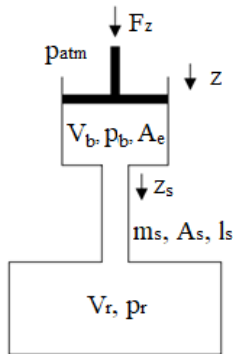


Рис. 7. Вертикальна модель пневматичної ресори

Fig. 7. Vertical model of the air spring

У результаті аналітичного розрахунку були отримані складові вертикальної жорсткості, визначена маса повітря, нелінійне в'язко-демпфування та демпфування в з'єднувальному трубопроводі.

У роботах [48, 50] було досліджено динамічну поведінку пневматичної ресори транспортних засобів компанії ZF Friedrichshafen AG. За основу була взята модель Gensys (рис. 6).

Силу тертя в цій моделі визначають за формулою:

$$F_{\text{тертя}} = \frac{(x - x_0)}{\beta + (x - x_0)} \text{sign}(\dot{x}), \quad (3)$$

де β – постійна величина; x – поточне зміщення; x_0 – зміщення в попередній точці.

Особливістю розрахунку за цією моделлю є те, що значення попереднього зміщення повинно бути присвоєно змінній x_0 , що не є стандартною процедурою в динамічному аналізі та призводить до збою алгоритму. З урахуванням цього для моделювання поведінки гуми було використано одновимірну модель із постійними коефіцієнтами [29], яка має пружні та в'язко-пружні елементи (рис. 8).

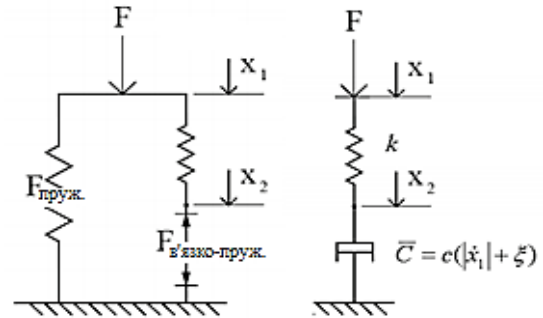


Рис. 8. Одновимірна модель Haupt & Sedlan

Fig. 8. Haupt&Sedlan one-dimensional model

У роботі [41] автори представили математичну модель пневматичної ресори на основі експериментальних характеристик. Спочатку була сформована нелінійна гідродинамічна модель, яка враховує жорсткість підвіски, коефіцієнт демпфування та пропускну здатність. Для практичного застосування модель лінеаризована шляхом розкладання нелінійних членів у ряди Тейлора та отримання величин першого порядку. У процесі дослідження жорсткість модельовано для двох експериментальних випадків: низькочастотного та високочастотного діапазонів.

Автори робіт [64, 65] представили динамічну модель пневматичної ресори, яка складається з трьох паралельно розташованих елементів та враховує термодинаміку пневматичної системи ресора – труба – резервуар, ефективне тертя та в'язко-пружне деформування гуми (рис. 9). Фрикційний елемент використано для можливості врахування гістерезисної поведінки пневматичної ресори за циклічного розширення.

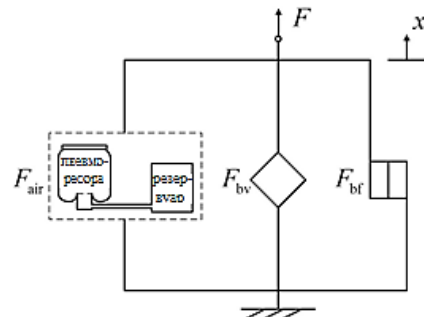


Рис. 9. Математична модель пневматичної системи з трьома паралельно розташованими елементами

Fig. 9. Mathematical model of the air system with three parallel elements

РУХОМИЙ СКЛАД І ТЯГА ПОЇЗДІВ

Як альтернативну для моделювання динамічної поведінки пневматичної ресори можна використовувати модель Bouc-Wen [52, 59] (рис. 10).

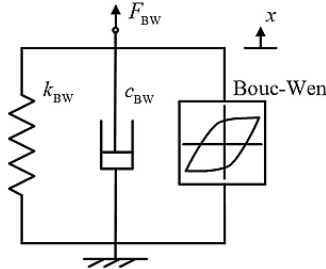


Рис. 10. Математична модель Bouc-Wen

Fig. 10. Bouc-Wen mathematical model

У ній загальну силу пневматичної ресори визначають за формулою:

$$F_{BW} = K_{BW}x + c_{BW}\dot{x} + \alpha_{BW}z, \quad (4)$$

де K_{BW} – лінійна жорсткість пружини; c_{BW} – коефіцієнт демпфування; α_{BW} – коефіцієнт масштабування, пов'язаний із тертям гуми; z – гістерезисна деформація.

Вплив пневматичного опору з'єднувального елемента на пружні та демпфувальні властивості пневматичної ресори було досліджено в роботах [2, 3]. При цьому була розроблена модель пневматичної ресори як динамічної системи з трьома фазовими координатами (тиск у балоні та додатковому резервуарі, маса повітря в балоні).

Ефективність найбільш популярних із цих механічних моделей була проаналізована в роботах [7, 25, 38, 49].

Отже, аналіз вищенаведених механічних моделей дозволив з'ясувати, що пневматична система в середньо-частотному діапазоні (від 6 до 14 Гц) є нелінійною, її параметри залежать від амплітуди коливань. Основним недоліком механічних моделей є невизначеність великої кількості вхідних параметрів, які пропонують знаходити з попередніх експериментів.

Термодинамічні моделі можна поділити на різні категорії залежно від кількості описаних елементів (пневморесора, з'єднувальний трубопровід, отвір, додатковий резервуар і регулювальні клапани) і фізичних явищ (втрати на

тертя, інерція повітря, можливість теплопередачі та ін.).

На рис. 11 представлена термодинамічна модель пневматичної ресори, яка містить пневмобалон, трубопровід і резервуар. Така модель переважно орієнтована на дослідження вертикальних коливань.

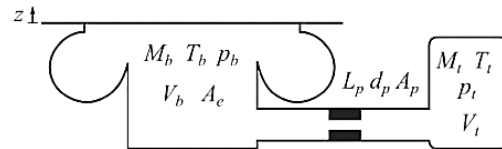


Рис. 11. Термодинамічна модель пневматичної ресори [21]

Fig. 11. Thermodynamic model of the air spring [21]

Важливим фактором під час дослідження термодинамічних процесів є те, що тиск газу всередині пневматичної ресори залежить від швидкості та величини її деформації. Швидка деформація пневматичної ресори призводить до адіабатичного стиснення з більш високим тиском і більш високою жорсткістю пневморесори, тоді як повільна деформація призводить до ізо-термічного процесу. Відповідно, змінюються основні рівняння математичної моделі.

Квазістатичну та динамічну жорсткість визначають за формулами:

$$K_z^{\text{дин}} = \gamma \cdot (p_a + p_g) \cdot \frac{A_e^2}{V} + p_g \cdot \frac{dA_e}{dz}; \quad (5)$$

$$K_z^{\text{ст}} = (p_a + p_g) \cdot \frac{A_e^2}{V} + p_g \cdot \frac{dA_e}{dz}. \quad (6)$$

Необхідно пам'ятати, що навіть невелика зміна площі може призвести до значного збільшення жорсткості пневматичної ресори. Указана особливість була врахована в роботах [41, 61] шляхом використання наближеного аналітичного методу.

У роботах [51, 61] наведені математичні моделі пневмобалона та додаткового резервуара в припущенні, що відстань між ними є невеликою (рис. 12). Було досліджено, як тиск у пневмобалоні, об'єм додаткового резервуара, розмір дросельовального отвору, частота та амплітуда збурювальної сили впливають на динамічну жорсткість пневматичної ресори.

РУХОМИЙ СКЛАД І ТЯГА ПОЇЗДІВ

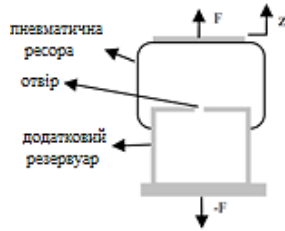


Рис. 12. Пневматична система без з'єднувального трубопроводу

Fig. 12. Air system without connecting pipe

Якщо взяти, що робоче повітря є ідеальним газом, то складові стану повітря в пневматичній ресорі будуть відповідати рівнянням [1, 4]:

$$P_s dV_s + V_s dP_s = R(m_s dT_s + T_s dm_s); \quad (7)$$

$$dQ = dE + P_s dV_s + h dm_s; \quad (8)$$

$$dE = C_v m_s dT_s + C_v T_s dm_s, \quad (9)$$

де P_s – абсолютний тиск у пневморесорі, Па; V_s – об'єм пневматичної ресори, м³; R – газова стала, $R = 286.9 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$; m_s – повітряна маса в пневматичній ресорі, кг; T_s – температура повітря в пневматичній ресорі, К; dQ – теплообмін між пневматичною ресорою та навколишнім середовищем; dE – зміна внутрішньої енергії; h – ентальпія повітря, Дж/кг; C_v – питома теплоємність за постійного об'єму, $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$.

Для адіабатичного процесу $dQ = 0$ динамічну жорсткість пневматичної ресори знаходимо за формулою:

$$K_d = (P_s - P_0) \frac{\partial A_e}{\partial z} + \frac{k P_s A_e G}{m_s \dot{z}} - \frac{k P_s A_e}{V_s} \frac{\partial V_s}{\partial z}, \quad (10)$$

де z – вертикальна деформація пневматичної ресори, м; A_e – ефективна площа пневматичної ресори, м²; k – показник адіабати, $k = 1,4$.

У роботі [7] була застосована ідея щодо використання в з'єднувальному трубопроводі клапана з регульовальним отвором, що дозволяє лінеаризувати систему.

У роботі [47] було представлено безрозмірну модель пневматичної ресори з додатковим резервуаром, які з'єднані гідравлічним опором. Модель була реалізована в середовищі Matlab-Simulink.

Автори вказують, що параметри всіх трьох елементів підвіски необхідно вибирати одночасно, оскільки попередній вибір пневморесори та додаткового резервуара на основі жорсткості або власної частоти, а вже потім вибір параметрів отвору, призведе до отримання недостатнього значення коефіцієнта демпфірування.

У роботі [25] розглянуто різницю між квазістатичним та динамічним підходами до експериментального визначення параметрів пневморесори. Динамічні випробування проведено в діапазоні частот 0–20 Гц. Відповідно до результатів проведених квазістатичних випробувань було запропоновано залежності лінійних сил від деформацій.

За динамічного підходу пневматичну ресору та резервуар моделювали як системи із зосередженими параметрами, які визначаються рівняннями нерозривності та рівняннями стану ідеального газу. Повітряний потік у з'єднувальному трубопроводі вважають одновимірним, без урахування стиснення повітря, як запропоновано в роботах [20, 21]. У цих припущеннях динаміку пневматичної системи повністю можна описати такою системою диференціальних рівнянь:

$$\dot{p}_A V_A + k p_A \dot{V}_A = k G_p R T; \quad (11)$$

$$\rho_p L_p \dot{u}_p = p_R - p_A -$$

$$-\frac{32 \mu L_p}{D_p^2} u_p - \frac{1}{2} d_{\text{conc}} \rho_p |u_p| u_p; \quad (12)$$

$$\dot{p}_R V_R = -k G_p R T, \quad (13)$$

де p_A і p_R – тиск пневматичної ресори та додаткового резервуара відповідно; V_A і V_R – об'єм пневморесори і резервуара відповідно; ρ_p і \dot{u}_p – щільність і швидкість повітря в з'єднувальному трубопроводі; G_p – масовий розхід у з'єднувальному трубопроводі; L_p і D_p – довжина та діаметр з'єднувального трубопроводу; R і k – питома газова стала та питома теплоємність повітря; T – температура систе-

РУХОМИЙ СКЛАД І ТЯГА ПОЇЗДІВ

ми; μ – в'язкість повітря; d_{conc} – місцеві втрати в з'єднувальному трубопроводі.

Автори робіт [26, 63] провели дослідження різних типів з'єднань пневматичної ресори на основі створених математичних моделей: пневмобалон – отвір – резервуар; пневмобалон-труба – резервуар; пневмобалон – отвір – труба – резервуар. Порівнявши результати математичного моделювання з експериментальними даними, автори робіт рекомендували: для низьких частот використовувати тип з'єднання «пневмобалон-отвір-труба-резервуар», а для високих частот – «пневмобалон-отвір-резервуар». Тип з'єднання «пневмобалон-труба-резервуар» використовувати не рекомендували, щоб уникнути від'ємної жорсткості.

У роботі [16] було досліджено альтернативні шляхи оптимізації пневматичної системи.

Важливим фактором під час моделювання пневматичної системи є теплообмін з навколишнім середовищем. У загальному випадку теплообмін можна оцінити, урахувавши політропний процес [22, 31, 36]. У конкретних випадках процес можна розглядати як ізотермічний [13] або адіабатичний [22].

У статті [36] автори провели моделювання роботи пневморесори в умовах політропного процесу. Під час моделювання використано непрямий метод реалізації політропного процесу шляхом модифікації співвідношення тиску та об'єму, отриманого в результаті моделювання ізотермічного процесу. На основі отриманих результатів було встановлено, що термодинамічний процес у пневматичній ресорі можна вважати адіабатичним, коли частота перевищує 5 Гц, а політропний процес слід розглядати, коли частота нижче 5 Гц.

У роботі [57] було проведено моделювання та аналіз параметрів пневматичної ресори залежно від частоти збудовальної сили та швидкості її деформації. Ізотермічний процес використано за частоти нижче 0,1 Гц, політропний від 0,1 до 3 Гц, адіабатичний за частоти вище 3 Гц.

Слід зазначити, що на поведінку підвіски в значній мірі впливає показник політропи k . Це питання було розглянуто в роботах [19, 22], у яких враховано передачу тепла між пневматичними камерами та атмосферою, а швидкість теплового потоку взято пропорційною різниці

температур. Було встановлено, що динамічна жорсткість для адіабатичного випадку є більшою порівняно з ізотермічним та представляє резонансний ефект для частот, близьких до 15 Гц.

У роботі [14] була розроблена нова динамічна модель пневматичної ресори, де зміну стану повітря розділено на два процеси: зміна об'єму (адіабатичний) і тепловий баланс (ізохорний).

Ця математична модель за допомогою програмних пакетів ADAMS і Matlab / Simulink була інтегрована в загальну модель транспортного засобу.

У наш час існують математичні моделі пневматичної системи підвищення рухомого складу, де введені регулювальні, запобіжні клапани та клапани перепаду тиску [20, 22, 40].

У роботі [20] було зазначено, що відповідно до EN 14363 [24] є дві системи вирівнювання кузова вагона: чотириточкова, яка складається з чотирьох вирівнювальних клапанів на кожен кузов, та двоточкова (рис. 13).

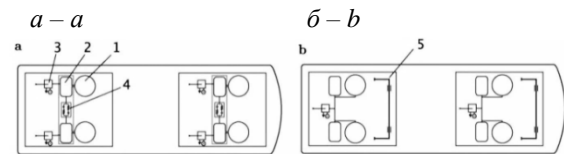


Рис. 13. Системи вирівнювання кузова: а – чотириточкова; б – двоточкова

Fig. 13. Body leveling systems: a – four-point; b – two-point

Під час моделювання регулювальних та запобіжних клапанів масова витрата повинна бути визначена з урахуванням тиску на вході й виході та зміщення важеля клапана. Для цього використовують європейський стандарт ISO 6358 [30].

Установлено, що чотириточкова конфігурація викликає значні коливання непідресорених мас порівняно з двоточковою. З іншого боку, чотириточкова підвіска дозволяє обмежити кут нахилу кузова під час проходження кривих ділянок колії.

Слід відзначити, що в процесі математичного моделювання пневматичної ресори виникають невизначеності, які в першу чергу пов'язані з розрахуванням ефективної площі як функції висоти.

РУХОМИЙ СКЛАД І ТЯГА ПОЇЗДІВ

У роботах [34, 35] автори запропонували нову аналітичну формулу для опису вертикальної жорсткості пневматичної ресори з урахуванням швидкості зміни її ефективної площі.

Формула вертикальної жорсткості пневматичної ресори має вигляд:

$$C = \gamma(p_0 + p_a) \frac{A_0^2}{V_0} + ap_0 \frac{A_0}{R_0}, \quad (14)$$

де a – коефіцієнт форми пневматичної ресори.

З аналізу отриманих результатів спостерегається, що адекватність математичної моделі погіршується у випадку, коли пневматична ресора обладнана додатковим резервуаром великого об'єму порівняно з резервуаром малого об'єму. Указана особливість обумовлена неврахуванням складової жорсткості, яка пов'язана зі структурою діафрагми.

У роботі [46] було отримано аналітичні залежності зміни об'єму та зусилля пневматичної ресори від її переміщення у вертикальному напрямку.

У роботі [62] запропоновано розрахункову формулу для визначення вертикальної жорсткості пневморесори з урахуванням зміни ефективної площі та її об'єму внаслідок деформації.

Розрахунковим шляхом було отримано статичні й динамічні криві «деформація – жорсткість» пневматичної ресори.

У роботі [17] автори дослідили поведінку пневматичної ресори, використовуючи псевдодинамічну процедуру. Модель оболонки розраховано варіаційними методами, заснованими на концепції мінімальної енергії деформації та термодинамічних процесів. Для підвищення точності було враховано вплив швидкості деформації шляхом вибору режимів стиснення пневматичної ресори (ізотермічного або адіабатичного).

Для знаходження жорсткості пневморесори розглянуто дві моделі:

- перша модель передбачає, що тільки стиснене повітря є пружним елементом;
- особливістю другої моделі є накладання жорсткості оболонки пневморесори на жорсткість стисненого повітря, оскільки два елементи працюють паралельно.

Автори роботи [15] розробили нову математичну модель пневматичної ресори, яка враховує її структурні параметри, а саме: ефективну

площу, швидкість зміни ефективної площі, ефективний об'єм, швидкість зміни ефективного об'єму. Аналітичні залежності структурних параметрів від деформації пневморесори було отримано геометрично.

Скінченноелементні моделі. Перейдемо до розгляду та аналізу моделей, створених за допомогою методу скінченних елементів [11, 33, 54, 58, 60]. Такий вид моделювання дозволяє відтворити найбільш точну динамічну поведінку пневматичної ресори, проте затрати та час моделювання є значними.

За останнє десятиліття для аналізу динамічної поведінки систем та їх складових найбільш поширеним програмним пакетом, який використовує метод скінченних елементів і комп'ютерне проєктування, є Abaqus.

Перші кроки в моделюванні пневматичного елемента за допомогою методу скінченних елементів були зроблені в роботі [11] на основі рівняння ізоентропії газу.

У роботі [60] із використанням програмного пакета Abaqus було проведено дослідження впливу параметрів оболонки (корду) пневматичної ресори на її пружні характеристики. Оболонку пневматичної ресори моделювали арматурним елементом, а стиснене повітря було представлено елементом гідростатичної рідини.

Автор роботи [54] для дослідження вертикальної жорсткості пневматичної ресори спочатку виконав побудову сітки в програмному пакеті ANSA, який є потужним інструментом попередньої обробки, а потім розв'язав задачу в Abaqus (рис. 14).

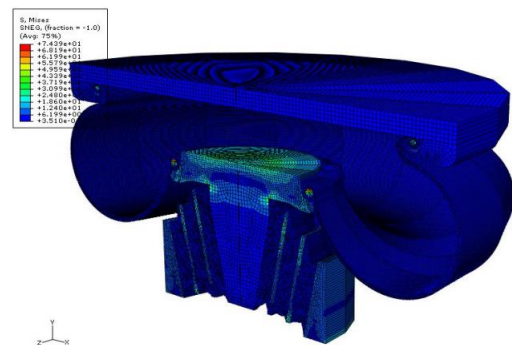


Рис. 14. Моделювання пневматичної ресори в програмному пакеті Abaqus

Fig. 14. Modeling of an air spring in the Abaqus software package

РУХОМИЙ СКЛАД І ТЯГА ПОЇЗДІВ

У роботах [12, 43] автори провели аналіз впливу факторів конструкції пневматичної ресори на її втомну міцність. Було зроблено висновки, що найбільший вплив на втомну міцність пневматичної ресори мають різниця діаметрів $\frac{D_0 - d_i}{2}$, кут корду ϕ та комбінація цих двох факторів.

У роботі [55] була створена скінченно-елементна модель пневматичної ресори з додатковим резервуаром у програмному пакеті Abaqus. Основною метою було дослідження впливу різнотипних з'єднувальних трубопроводів та додаткових резервуарів на вертикальну жорсткість при частоті до 10 Гц. Установлено, що при низькій частоті збудження системи та збільшенні об'єму додаткового резервуара динамічна жорсткість пневматичної ресори мало відрізняється від статичної. Збільшення динамічної жорсткості пневматичної ресори відбувається за рахунок збільшення початкового тиску.

Автори роботи [27] досліджували вертикальну статичну та динамічну жорсткість пневматичної ресори. Експериментальні дослідження провели на гідравлічній випробувальній машині «Instron» з частотою коливань до 400 Гц, із додатковим резервуаром та без нього. Розрахунки виконували за допомогою скінченно-елементної моделі, розробленої в програмному пакеті Abaqus. Було встановлено, що кут волокон оболонки пневматичної ресори має найбільший вплив на першу власну частоту коливань.

У роботі [39] було проведено дослідження щодо отримання вхідних параметрів пневматичної ресори (ефективна площа, зміна ефективної площі, в'язкі втрати, втрати на тертя та ін.) з використанням програмного пакета Abaqus. Проаналізовано вплив параметрів конструкції пневматичної ресори, особливо кута нахилу волокон оболонки, на значення вищенаведених вхідних параметрів, статичну й динамічну, вертикальну та горизонтальну жорсткості, частоту коливань та, відповідно, на комфортабельність руху.

Серед інших програмних пакетів, які використовують для дослідження поведінки пневматичної ресори, можна виділити програмну систему скінченно-елементного аналізу ANSYS [23, 32]. У роботі [32] автори використовували програму ANSYS для моделювання статичного тесту.

Було відзначено значний вплив кута нахилу волокон оболонки та внутрішнього початкового тиску на характеристики пневматичної ресори.

Отже, проведений аналіз наукових джерел показав значну кількість математичних моделей різного ступеня складності, що підтверджує важливість питання відтворення динамічної поведінки пневматичної ресори. Проте для врахування впливу коливань конструктивних елементів швидкісного рухомого складу під час руху залізничною колією необхідно розглядати модель пневморесори як складову частину його загальної просторової моделі. Створення такої узагальненої математичної моделі дозволить правильно оцінити динамічні показники та показники безпеки залізничних екіпажів у швидкісному русі.

Використання механічних моделей передбачає визначення вхідних параметрів на основі аналізу експериментальних результатів, що вимагає доступу до складного вимірювального обладнання та повинно виконуватися для кожної нової моделі пневматичної ресори окремо. На відміну від механічних моделей, які дозволяють враховувати демпфувальний ефект пневморесори в горизонтальному та вертикальному напрямку, термодинамічні моделі переважно орієнтовані на дослідження динамічної поведінки пневматичної ресори у вертикальному напрямку. Використання методу скінченних елементів дозволяє найбільш точно відтворити динамічну поведінку пневматичної ресори, проте вимагає значних затрат сил та часу на створення скінченно-елементної моделі та виконання розрахунків.

Наукова новизна та практична значимість

Автори систематизували математичні моделі динамічної поведінки пневматичної ресори та підкреслили важливість їх дослідження в сукупності з просторовою математичною моделлю швидкісного рухомого складу. Проведений аналіз математичних моделей динамічної поведінки пневматичної ресори показує шляхи подальшого їх удосконалення, указує на можливість їх використання в просторовій математичній моделі рухомого складу відповідно до поставлених задач.

Висновки

Упровадження швидкісного рухомого складу можливе лише за умови відповідності роботи його конструктивних елементів експлуатаційним режимам. Аналіз зазначених робіт показує важливість та безперервність проведення досліджень динамічної поведінки пневматичної ресори як основної складової ресорного підвищення рухомого складу. Під час моделювання руху поїзда обрана математична модель пневматичної ресори відіграє найважливішу роль, оскільки частота коливань системи, сили та моменти, які виникають у ній, залежать від характеристик ресорного підвищення. Проведений аналіз моделей пневморесор показав, що їх переважна більшість описує лише вертикальну поведінку без урахування горизонтальної. Це пов'язано, у першу чергу, із відсутністю інформації про конструктивні параметри діафрагми та нелінійністю характеристик гуми.

Під час використання механічних або термодинамічних моделей існують певні труднощі в отриманні вхідних параметрів, оскільки для цього потрібно проводити складні та дорогі експериментальні дослідження. Альтернативою можуть бути скінченноелементні моделі, які дозволяють урахувати гістерезисну поведінку гуми залежно від частоти та амплітуди коливань, температурні ефекти та інші фактори. Але введення таких моделей у просторову математичну модель швидкісного рухомого складу спричиняє значне ускладнення розрахунків.

Оскільки силовий вплив на пневморесору визначається коливаннями елементів рухомого складу, а частота й амплітуда коливань поїзда суттєво залежать від роботи самої пневморесори, важливим постає питання формування єдиної математичної моделі й дослідження взаємного впливу пневматичної ресори та інших конструктивних елементів швидкісного рухомого складу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Мирам А. О., Павленко В. А. *Техническая термодинамика. Тепломассообмен* : учебное издание. Москва : Издательство АСВ, 2011. 352 с.
2. Рейдемейстер А. Г., Кивишева А. В. Зависимость свойств пневматической ресоры от пневматического сопротивления дросселя. *Наука та прогрес транспорту*. 2016. № 2 (62). С. 157–164. DOI: <https://doi.org/10.15802/stp2016/67339>
3. Рейдемейстер А. Г., Лагуза А. В. Определение характеристик дросселирующего устройства для пневматической ресоры. *Наука та прогрес транспорту*. 2018. № 1 (73). С. 66–76. DOI: <https://doi.org/10.15802/stp2018/123394>
4. Стоянов Н. И., Смирнов С. С., Смирнова А. В. *Теоретические основы теплотехники (техническая термодинамика и тепломассообмен)* : учебное пособие. Ставрополь : Северо-Кавказский федеральный университет, 2014. 226 с.
5. *Стратегія АТ «Укрзалізниця» на 2019-2023 роки*. Кабінет Міністрів України від 12 червня 2019 року № 591-р. Київ, 2019. 66 с.
6. Aizpun M., Vinolas J., Alonso A. Using the stationary tests of the acceptance process of a rail vehicle to identify the vehicle model parameters. *Journal of Rail and Rapid Transit*. 2013. Vol. 228. Iss. 4. P. 408–421. DOI: <https://doi.org/10.1177/0954409713478592>
7. Alonso A., Giménez J. G., Nieto J., Vinolas J. Air suspension characterisation and effectiveness of a variable area orifice. *Vehicle System Dynamics*. 2010. Vol. 48. Iss. sup1. P. 271–286. DOI: <https://doi.org/10.1080/00423111003731258>
8. Berg M. An air spring model for dynamic analysis of rail vehicles. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*. 1997. Vol. 211. Iss. 2. P. 95–108. DOI: <https://doi.org/10.1243/0954409971530941>
9. Berg M. A three-dimensional airsprung model with friction and orifice damping. *Vehicle System Dynamics*. Vol. 33. Iss. sup1. P. 528–539. DOI: <https://doi.org/10.1080/00423114.1999.12063109>
10. Berg M. *Modelling of springs and dampers for dynamic analysis of rail vehicles – a pilot study*. Railway Technology, Department of Vehicle Engineering, Royal Institute of Technology, 1994. 51 p.

РУХОМИЙ СКЛАД І ТЯГА ПОЇЗДІВ

11. Berry D., Yang H. Formulation and experimental verification of a pneumatic finite element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1996. Vol. 39. Iss. 7. P. 1097–1114.
DOI: [https://doi.org/10.1002/\(sici\)1097-0207\(19960415\)39:7<1097::aid-nme880>3.0.co;2-9](https://doi.org/10.1002/(sici)1097-0207(19960415)39:7<1097::aid-nme880>3.0.co;2-9)
12. Bešter T., Oman S., Nagode M. Determining influential factors for an air spring fatigue life. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*. 2019. Vol. 42. Iss. 1. P. 284–294.
DOI: <https://doi.org/10.1111/ffe.12904>
13. Bruni S., Vinolas J., Berg M., Polach O., Stichel S. Modelling of suspension components in a rail vehicle dynamics context. *Vehicle System Dynamics*. 2011. Vol. 49. Iss. 7. P. 1021–1072.
DOI: <https://doi.org/10.1080/00423114.2011.586430>
14. Chang F., Lu Z.-H. Dynamic model of an air spring and integration into a vehicle dynamics model. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D : Journal of Automobile Engineering*. 2008. Vol. 222. Iss. 10. P. 1813–1825. DOI: <https://doi.org/10.1243/09544070JAUTO867>
15. Chen J.-J., Yin Z.-H., Rakheja S., He, J.-H., Guo K.-H. Theoretical modelling and experimental analysis of the vertical stiffness of a convoluted air spring including the effect of the stiffness of the bellows. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D : Journal of Automobile Engineering*. 2017. Vol. 232. Iss. 4. P. 547–561. DOI: <https://doi.org/10.1177/0954407017704589>
16. Coquis D. P. *Optimización de suspensiones neumáticas de vehículos ferroviarios*. Universidad Politécnica de Madrid. 2004. URL: <https://oa.upm.es/7538/>
17. De Melo F., Pereira A., Morais A. The simulation of an automotive air spring suspension using a pseudo-dynamic procedure. *Applied Sciences*. 2018. Vol. 8. Iss. 7. P. 1049–1069.
DOI: <https://doi.org/10.3390/app8071049>
18. Dixon G., Pearson J. Automatically controlled air spring suspension system for vibration testing. *National Aeronautics and Space Administration (NASA)*. 1967. URL: <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19670013958/downloads/19670013958.pdf>
19. Docquier N., Fiset P., Jeanmart H. *Influence of heat transfer on railway pneumatic suspension dynamics*. P. 1–11. URL: https://dial.uclouvain.be/pr/boreal/object/boreal%3A81161/datastream/PDF_01/view
20. Docquier N., Fiset P., Jeanmart H. Model-based evaluation of railway pneumatic suspension. *Vehicle System Dynamics*. 2008. Vol. 46. Iss. sup1. P. 481–493. DOI: <https://doi.org/10.1080/00423110801993110>
21. Docquier N., Fiset P., Jeanmart H. Multiphysic modelling of railway vehicles equipped with pneumatic suspensions. *Vehicle System Dynamics*. 2007. Vol. 45. Iss. 6. P. 505–524.
DOI: <https://doi.org/10.1080/00423110601050848>
22. Docquier N. *Multiphysics modelling of multibody systems application to railway pneumatic suspensions*. Université catholique de Louvain. 2010.
URL: https://dial.uclouvain.be/pr/boreal/object/boreal:33474/datastream/PDF_01/view
23. Du J., Shi S., Luo S., Cheng T., Peng X., Feng P. Studies on modeling a single-bellows air spring and simulating its inherent characteristics. *Journal of Shenzhen University Science and Engineering*. 2013. Vol. 30. Iss. 2. P. 167–172. DOI: <https://doi.org/10.3724/sp.j.1249.2013.02167>
24. *EN 14363:2005. Testing for the acceptance of running characteristics of railway vehicles – Testing of running behaviour and stationary tests*. 2005. URL: <https://standards.iteh.ai/catalog/standards/cen/28104202-ab20-4285-84c2-b17c37bdd183/en-14363-2005>
25. Facchinetti A., Mazzola L., Alfi S., Bruni S. Mathematical modelling of the secondary airspring suspension in railway vehicles and its effect on safety and ride comfort. *Vehicle System Dynamics*. 2010. Vol. 48. Iss. sup1. P. 429–449. DOI: <https://doi.org/10.1080/00423114.2010.486036>
26. Gao H. X., Chi M. R., Zhu M. H., Wu P. B. Study on different connection types of air spring. *Applied Mechanics and Materials*. 2013. Vol. 423–426. P. 2026–2034.
DOI: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.423-426.2026>
27. Gil-Negrete N., Nieto F. J., Pradera-Mallabiarrena A., Gonzalez-Prada J. On the dynamic stiffness of air springs at medium-high frequencies. *28th International Conference on Noise and Vibration Engineering, ISMA 2018 and 7th International Conference on Uncertainty in Structural Dynamics*. 2018. P. 3567–3579.
28. Haider A., Ameen N. *Experimental and Theoretical Study of Air Suspension System Control for Passenger Vehicles by Using PID and Fuzzy Controllers*. 2015. 204 p.
29. Haupt P., Sedlan K. Viscoplasticity of elastomeric materials: experimental facts and constitutive modeling. *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)*. 2001. Vol. 71. Iss. 2–3. P. 89–109.
DOI: <https://doi.org/10.1007/s004190000102>

РУХОМИЙ СКЛАД І ТЯГА ПОЇЗДІВ

30. ISO 6358:1898. *Standard, Pneumatic fluid power – Components using compressible fluids – Determination of flowrate characteristics*. 1989. URL: <https://www.iso.org/standard/12666.html>
31. Lee S. Development and analysis of an air spring model. *International Journal of Automotive Technology*. 2010. Vol. 11. Iss. 4. P. 471–479. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12239-010-0058-5>
32. Li F., Yang W., Ding Y. Simulation of static test of air-spring. *Advanced Materials Research*. 2009. Vol. 11–12. Iss. 1. P. 713–716. DOI: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.11-12.713>
33. Li H., Guo K., Chen S., Wang, W., Cong F. Design of stiffness for air spring based on ABAQUS. *Mathematical Problems in Engineering*. 2013. Vol. 2013. P. 1–5. DOI: <https://doi.org/10.1155/2013/528218>
34. Li X., He Y., Liu W., Wei Y. Research on the vertical stiffness of a rolling lobe air spring. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F : Journal of Rail and Rapid Transit* 2015. Vol. 230. Iss. 4. P. 1172–1183. DOI: <https://doi.org/10.1177/0954409715585370>
35. Li X., Li T. Research on vertical stiffness of belted air springs. *Vehicle System Dynamics*. 2013. Vol. 51. Iss. 11. P. 1655–1673. DOI: <https://doi.org/10.1080/00423114.2013.819984>
36. Li X., Wei Y., He Y. Simulation on polytropic process of air springs. *Engineering Computations*. 2016. Vol. 33. Iss. 7. P. 1957–1968. DOI: <https://doi.org/10.1108/EC-08-2015-0224>
37. Löcken F., Welsch M. The Dynamic Characteristic and Hysteresis Effect of an Air Spring. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2015. Vol. 20. Iss. 1. P. 127–145. DOI: <https://doi.org/10.1515/ijame-2015-0009>
38. Mazzola L., Berg M. Secondary suspension of railway vehicles – air spring modelling: performance and critical issues. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F : Journal of Rail and Rapid Transit*. 2014. Vol. 228. Iss. 3. P. 225–241. DOI: <https://doi.org/10.1177/0954409712470641>
39. Mendia-Garcia I., Gil-Negrete Laborda N., Pradera-Mallabiarrena A., Berg M. A survey on the modelling of air springs – secondary suspension in railway vehicles. *Vehicle System Dynamics*. 2020. P. 1–30. DOI: <https://doi.org/10.1080/00423114.2020.1838566>
40. Nakajima T., Shimokawa Y., Mizuno M., Sugiyama H. Air Suspension System Model Coupled With Leveling and Differential Pressure Valves for Railroad Vehicle Dynamics Simulation. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. 2014. Vol. 9. Iss. 3. P. 1–9. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4026275>
41. Nieto A., Morales A., González A. An analytical model of pneumatic suspensions based on an experimental characterization. *Journal of Sound and Vibration*. 2008. Vol. 313. Iss. 1–2. P. 290–307. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.11.027>
42. Oda N., Nishimura S. Vibration of air suspension bogies and their design. *Bulletin of JSME*. 1970. Vol. 13. Iss. 55. P. 43–50. DOI: <https://doi.org/10.1299/jsme1958.13.43>
43. Oman S., Nagode M. On the influence of the cord angle on air-spring fatigue life. *Engineering Failure Analysis*. 2013. Vol. 27. P. 61–73. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2012.09.002>
44. Pellegrini C., Gherardi F., Spinelli D., Saporito G., Romani M. Wheel–rail dynamic of DMU IC4 car for DSB: modeling of the secondary air springs and effects on calculation results. *Vehicle System Dynamics*. 2006. Vol. 44. Iss. sup1. P. 433–442. DOI: <https://doi.org/10.1080/00423110600872960>
45. Presthus M. *Derivation of air spring model parameters for train simulation*. Luleå University of Technology. 2002. 75 p.
46. Qing O., Yin S. The non-linear mechanical properties of an airspring. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2001. Vol. 17. Iss. 3. P. 705–711. DOI: <https://doi.org/10.1006/mssp.2001.1434>
47. Quaglia G., Sorli M. Air suspension dimensionless analysis and design procedure. *Vehicle System Dynamics*. 2001. Vol. 35. Iss. 6. P. 443–475. DOI: <https://doi.org/10.1076/vesd.35.6.443.2040>
48. Sayyaadi H., Shokouhi N. Effects of air reservoir volume and connecting pipes length and diameter on the air spring behavior in rail vehicles. *Iranian Journal of Science and Technology Transaction B : Engineering*. 2010. Vol. 34, № B5. P. 499–508.
49. Sayyaadi H., Shokouhi N. Improvement of passengers ride comfort in rail vehicles equipped with air springs. *World Academy of Science, Engineering and Technology, International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering*. 2009. Vol. 3. P. 592–598.
50. Sayyaadi H., Shokouhi N. New dynamics model for rail vehicles and optimizing air suspension parameters using GA. *International Journal of Science & Technology*. 2009. Vol. 16. Iss. 6. P. 496–512.
51. Sihong Z., Jiasheng W., Ying Z. Research on theoretical calculation model for dynamic stiffness of air spring with auxiliary chamber. *2008 IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference* (Harbin, 3-5 Sept. 2008). Harbin, 2008. P. 2–7. DOI: <https://doi.org/10.1109/vppc.2008.4677717>

РУХОМИЙ СКЛАД І ТЯГА ПОЇЗДІВ

52. Spencer B. F., Dyke S. J., Sain M. K., Carlson J. D. Phenomenological model for magnetorheological dampers. *Journal of Engineering Mechanics*. 1997. Vol. 123. Iss. 3. P. 230–238. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9399\(1997\)123:3\(230\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9399(1997)123:3(230))
53. Spiroiu M. Railway vehicle pneumatic rubber suspension modelling and analysis. *J Mater Plastic*. 2018. Vol. 55. Iss. 1. P. 24–27. DOI: <https://doi.org/10.37358/mp.18.1.4956>
54. Sun J. Calculation of vertical stiffness of air spring with FEM. *4th ANSA & μ ETA International Conference* (Thessaloniki, 1-3 June 2011). Thessaloniki, 2011. P. 68–72.
55. Sun L., Li Z., Shen X., Zhu J. Simulation and test study on dynamic characteristic of air spring with auxiliary chamber. *Proceedings of the 2nd International Conference On Systems Engineering and Modeling*. 2013. P. 0648–0651. DOI: <https://doi.org/10.2991/icsem.2013.131>
56. Sundvall P. Comparisons between predicted and measured ride comfort in trains – a case study on modelling. *Division of Railway Technology*. 2001. URL: <https://trid.trb.org/view/715412>
57. Tadeusz U. *Railway Design, Simulation and Analysis by ADAMS/Rail Software*. Akademia Górniczo-Hutnicza. 2011. 82 p.
58. Weimin Y., Canhui Ch., Yaling Ch., Yansha R. Finite element analysis of an air spring for automobile suspension. *Journal of Beijing University of Chemical Technology*. 2004. Vol. 31, № 1. P. 105–109.
59. Wen Y.-K. Method for Random Vibration of Hysteretic Systems. *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 1976. Vol. 102. Iss. 2. P. 249–263. DOI: <https://doi.org/10.1061/jmcea3.0002106>
60. Wenku S., Wan J., Ying H., Weimin Y., Hao Y., Zubin L. Finite element analysis of an air spring concerning initial pressure and parameters of cord fabric layer. *2009 Asia-Pacific Conference on Computational Intelligence and Industrial Applications (PACIIA)* (Wuhan, 28-29 Nov. 2009). Wuhan, 2009. DOI: 10.1109/PACIIA.2009.5406380
61. Xu L. Mathematical modeling and characteristic analysis of the vertical stiffness for railway vehicle air spring system. *Mathematical Problems in Engineering*. 2020. Vol. 220. P. 1–12. DOI: <https://doi.org/10.1155/2020/2036563>
62. Xu W., He L., Shuai C. Stiffness calculation and dynamic simulation of air spring. *ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference* (California, 24-28 Sep 2005). California, 2005. P. 1395–1399. DOI: <https://doi.org/10.1115/DETC2005-84338>
63. Zhong Y., Yang Q., Bao G. Nonlinear primary resonances of a pneumatic spring under simple harmonic excitations. *Proceedings of 2011 International Conference on Fluid Power and Mechatronics* (Beijing, 17-20 Aug. 2011). Beijing, 2011. P. 229–233. DOI: <https://doi.org/10.1109/FPM.2011.6045763>
64. Zhu H., Yang J., Zhang Y. A novel air spring dynamic model with pneumatic thermodynamics, effective friction and viscoelastic damping. *Journal of Sound and Vibration*. 2017. Vol. 408. P. 87–104. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.07.015>
65. Zhu H., Yang J., Zhang Y., Feng X., Ma Z. Nonlinear dynamic model of air spring with a damper for vehicle ride comfort. *Nonlinear Dynamics*. 2017. Vol. 89. Iss. 2. P. 1545–1568. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3535-9>

A. Y. KUZYSHYN^{1*}, S. A. KOSTRITSIA², Y. H. SOBOLEVSKA³, A. V. BATIH^{4*}

^{1*}Dep. «Rolling Stock and Track», Dnipro National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan, Lviv Branch, I. Blazhkevycha St. 12-a, Lviv, Ukraine, 79052, tel. +38 (032) 267 99 74, e-mail kuzyshyn1993@gmail.com, ORCID 0000-0002-3012-5395

²Dep. «Theoretical and Structural Mechanics», Dnipro National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan, Lazaryan St., 2, Dnipro, Ukraine, 49010, tel. +38 (056) 373 15 11, e-mail kossa571@gmail.com, ORCID 0000-0002-7922-0975

³Dep. «Fundamental Disciplines», Dnipro National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan, Lviv Branch, I. Blazhkevycha St. 12-a, Lviv, Ukraine, 79052, tel. +38 (032) 267 99 74, e-mail sobolevskyu@gmail.com, ORCID 0000-0002-8087-2014

^{4*}Lab. «Railway-Transport Research», Lviv Research Institute of Forensic Sciences, Lypynskoho St., 54, Lviv, Ukraine, 79024, tel. +38 (032) 231 76 13, e-mail batigasha1992@gmail.com, ORCID 0000-0003-1205-6004

World Experience in Creating Mathematical Models of Air Springs: Advantages and Disadvantages

Purpose. Taking into account the production and commissioning of modern high-speed rolling stock, the authors are aimed to analyze the currently created mathematical models describing the dynamic behavior of the air spring, systematize them and consider the advantages and disadvantages of each model type. **Methodology.** For the analysis, a comparative chronological method was used, which makes it possible to trace the development of several points of view, concepts, theories. In accordance with the adopted decision equations, the existing models of air springs were divided into three groups: mechanical, thermodynamic and finite-elements. When analyzing mathematical models, the influence of a number of parameters on the dynamic behavior of the air spring, such as disturbing force frequency, heat transfer, nonlinear characteristics of materials, the shape of the membrane, etc., was considered. **Findings.** A feature of mechanical models is the determination of input parameters based on the analysis of experimental results, requires access to complex measuring equipment and must be performed for each new model of an air spring separately. Unlike mechanical models, which allow taking into account the damping effect of an air spring in the horizontal and vertical direction, thermodynamic models are mainly focused on studying the dynamic behavior of an air spring in the vertical direction. The use of the finite element method makes it possible to most accurately reproduce the dynamic behavior of an air spring, however, it requires significant expenditures of time and effort to create a finite element model and perform calculations. **Originality.** Mathematical models of the dynamic behavior of an air spring are systematized, and the importance of their study in conjunction with a spatial mathematical model of high-speed rolling stock is emphasized. **Practical value.** The analysis of the mathematical models of the dynamic behavior of the air spring shows the ways of their further improvement, indicates the possibility of their use in the spatial mathematical model of the rolling stock in accordance with the tasks set. It will allow, even at the design stage of high-speed rolling stock, to evaluate its dynamic characteristic and traffic safety indicators when interacting with a railway track.

Keywords: air spring; rolling stock; mathematical model; rigidity; damping; thermodynamics; pressure; temperature

REFERENCES

1. Miram, A. O., & Pavlenko, V. A. (2011). *Tekhnicheskaya termodinamika. Teplomassoobmen: uchebnoe izdanie.* Moscow: Izdatelstvo ASV. (in Russian)
2. Reidemeister, O. H., & Kivisheva, A. V. (2016). Dependence of air spring parameters on throttle resistance. *Science and Transport Progress*, 2(62), 157-164. DOI: <https://doi.org/10.15802/stp2016/67339> (in Russian)
3. Reidemeister, O. H., & Laguza, A. V. (2018). Determination of characteristics of throttling device for pneumatic spring. *Science and Transport Progress*, 1(73), 66-76. DOI: <https://doi.org/10.15802/stp2018/123394> (in Russian)
4. Stoyanov, N. I., Smirnov, S. S., & Smirnova, A. V. (2014). *Teoreticheskie osnovy teplotekhniki (tekhnicheskaya termo-dinamika i teplomassoobmen): uchebnoe posobie.* Stavropol: North-Caucasus federal university. (in Russian)
5. *Strateghiya AT «Ukrzaliznycja» na 2019-2023 roky.* (2019). Kabinet Ministriv Ukrainy vid 12 chervnja 2019 roku No 591-r. (in Ukrainian)
6. Aizpun, M., Vinolas, J., & Alonso, A. (2013). Using the stationary tests of the acceptance process of a rail vehicle to identify the vehicle model parameters. *Journal of Rail and Rapid Transit*, 228(4), 408-421. DOI: <https://doi.org/10.1177/0954409713478592> (in English)
7. Alonso, A., Giménez, J. G., Nieto, J., & Vinolas, J. (2010). Air suspension characterisation and effectiveness of a variable area orifice. *Vehicle System Dynamics*, 48(sup1), 271-286. DOI: <https://doi.org/10.1080/00423111003731258> (in English)
8. Berg, M. (1997). An air spring model for dynamic analysis of rail vehicles. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 211(2), 95-108. DOI: <https://doi.org/10.1243/0954409971530941> (in English)
9. Berg, M. (1999). A Three-Dimensional Airspring Model with Friction and Orifice Damping. *Vehicle System Dynamics*, 33(sup1), 528-539. DOI: <https://doi.org/10.1080/00423114.1999.12063109> (in English)
10. Berg, M. (1994). *Modelling of springs and dampers for dynamic analysis of rail vehicles—a pilot study.* Railway Technology, Department of Vehicle Engineering, Royal Institute of Technology. (in English)

РУХОМИЙ СКЛАД І ТЯГА ПОЇЗДІВ

11. Berry, D., & Yang, H. (1996). Formulation and experimental verification of a pneumatic finite element. *Formulation and experimental verification of a pneumatic finite element*, 39(7), 1097-1114. DOI: [https://doi.org/10.1002/\(sici\)1097-0207\(19960415\)39:7<1097::aid-nme880>3.0.co;2-9](https://doi.org/10.1002/(sici)1097-0207(19960415)39:7<1097::aid-nme880>3.0.co;2-9) (in English)
12. Bešter, T., Oman, S., & Nagode, M. (2018). Determining influential factors for an air spring fatigue life. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 42(1), 284-294. DOI: <https://doi.org/10.1111/ffe.12904> (in English)
13. Bruni, S., Vinolas, J., Berg, M., Polach, O., & Stichel, S. (2011). Modelling of suspension components in a rail vehicle dynamics context. *Vehicle System Dynamics*, 49(7), 1021-1072. DOI: <https://doi.org/10.1080/00423114.2011.586430> (in English)
14. Chang, F., & Lu, Z.-H. (2008). Dynamic model of an air spring and integration into a vehicle dynamics model. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 222(10), 1813-1825. DOI: <https://doi.org/10.1243/09544070JAUTO867> (in English)
15. Chen, J.-J., Yin, Z.-H., Rakheja, S., He, J.-H., & Guo, K.-H. (2017). Theoretical modelling and experimental analysis of the vertical stiffness of a convoluted air spring including the effect of the stiffness of the bellows. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 232(4), 547-561. DOI: <https://doi.org/10.1177/0954407017704589> (in English)
16. Coquis, D. P. (2004). *Optimizaci3n de suspensiones neum3ticas de veh3culos ferroviarios* (Doctoral dissertation). Universidad Polit3cnica de Madrid. Retrieved from <https://oa.upm.es/7538/> (in English)
17. De Melo, F., Pereira, A., & Morais, A. (2018). The Simulation of an Automotive Air Spring Suspension Using a Pseudo-Dynamic Procedure. *Applied Sciences*, 8(7), 1049-1069. DOI: <https://doi.org/10.3390/app8071049> (in English)
18. Dixon, G., & Pearson, J. (1967). Automatically controlled air spring suspension system for vibration testing. In *National Aeronautics and Space Administration (NASA)*. Retrieved from <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19670013958/downloads/19670013958.pdf> (in English)
19. Docquier, N., Fisette, P., & Jeanmart, H. *Influence of heat transfer on railway pneumatic suspension dynamics*. Retrieved from https://dial.uclouvain.be/pr/boreal/object/boreal%3A81161/datastream/PDF_01/view (in English)
20. Docquier, N., Fisette, P., & Jeanmart, H. (2008). Model-based evaluation of railway pneumatic suspensions. *Vehicle System Dynamics*, 46(sup1), 481-493. DOI: <https://doi.org/10.1080/00423110801993110> (in English)
21. Docquier, N., Fisette, P., & Jeanmart, H. (2007). Multiphysic modelling of railway vehicles equipped with pneumatic suspensions. *Vehicle System Dynamics*, 45(6), 505-524. DOI: <https://doi.org/10.1080/00423110601050848> (in English)
22. Docquier, N. (2010). *Multiphysics modelling of multibody systems application to railway pneumatic suspensions* (Doctoral dissertation). Universit3 catholique de Louvain. Retrieved from https://dial.uclouvain.be/pr/boreal/object/boreal:33474/datastream/PDF_01/view (in English)
23. Du, J., Shi, S., Luo, S., Cheng, T., Peng, X., & Feng, P. (2013). Studies on modeling a single-bellows air spring and simulating its inherent characteristics. *Journal of Shenzhen University Science and Engineering*, 30(2), 167-172. DOI: <https://doi.org/10.3724/sp.j.1249.2013.02167> (in English)
24. EN 14363:2005. *Testing for the acceptance of running characteristics of railway vehicles – Testing of running behaviour and stationary tests*. Retrieved from <https://standards.iteh.ai/catalog/standards/cen/28104202-ab20-4285-84c2-b17c37bdd183/en-14363-2005> (in English)
25. Facchinetti, A., Mazzola, L., Alfi, S., & Bruni, S. (2010). Mathematical modelling of the secondary airsprung suspension in railway vehicles and its effect on safety and ride comfort. *Vehicle System Dynamics*, 48(sup1), 429-449. DOI: <https://doi.org/10.1080/00423114.2010.486036> (in English)
26. Gao, H. X., Chi, M. R., Zhu, M. H., & Wu, P. B. (2013). Study on Different Connection Types of Air Spring. *Applied Mechanics and Materials*, 423-426, 2026-2034. DOI: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.423-426.2026> (in English)
27. Gil-Negrete, N., Nieto, F. J., Pradera-Mallabiarrena, A., & Gonzalez-Prada, J. (2018). On the dynamic stiffness of air springs at medium-high frequencies. In *28th International Conference on Noise and Vibration Engineering, ISMA 2018 and 7th International Conference on Uncertainty in Structural Dynamics* (pp. 3567-3579). (in English)
28. Haider, A., & Ameen, N. (2015). *Experimental and Theoretical Study of Air Suspension System Control for Passenger Vehicles by Using PID and Fuzzy Controllers* (PhD dissertation). (in English)

РУХОМИЙ СКЛАД І ТЯГА ПОЇЗДІВ

29. Haupt, P., & Sedlan, K. (2001). Viscoplasticity of elastomeric materials: experimental facts and constitutive modelling. *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)*, 71(2-3), 89-109. DOI: <https://doi.org/10.1007/s004190000102> (in English)
30. ISO 6358:1898. Standard, Pneumatic fluid power – Components using compressible fluids – Determination of flowrate characteristics. Retrieved from <https://www.iso.org/standard/12666.html> (in English)
31. Lee, S. (2010). Development and analysis of an air spring model. *International Journal of Automotive Technology*, 11(4), 471-479. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12239-010-0058-5> (in English)
32. Li, F., Yang, W., & Ding, Y. (2006). Simulation of Static Test of Air-Spring. *Advanced Materials Research*, 11-12, 713-716. DOI: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.11-12.713> (in English)
33. Li, H., Guo, K., Chen, S., Wang, W., & Cong, F. (2013). Design of Stiffness for Air Spring Based on ABAQUS. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 1-5. DOI: <https://doi.org/10.1155/2013/528218> (in English)
34. Li, X., He, Y., Liu, W., & Wei, Y. (2015). Research on the vertical stiffness of a rolling lobe air spring. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 230(4), 1172-1183. DOI: <https://doi.org/10.1177/0954409715585370> (in English)
35. Li, X., & Li, T. (2013). Research on vertical stiffness of belted air springs. *Vehicle System Dynamics*, 51(11), 1655-1673. DOI: <https://doi.org/10.1080/00423114.2013.819984> (in English)
36. Li, X., Wei, Y., & He, Y. (2016). Simulation on polytropic process of air springs. *Engineering Computations*, 33(7), 1957-1968. DOI: <https://doi.org/10.1108/EC-08-2015-0224> (in English)
37. Löcken, F., & Welsch, M. (2015). The Dynamic Characteristic and Hysteresis Effect of an Air Spring. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 20(1), 127-145. DOI: <https://doi.org/10.1515/ijame-2015-0009> (in English)
38. Mazzola, L., & Berg, M. (2012). Secondary suspension of railway vehicles - air spring modelling: Performance and critical issues. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 228(3), 225-241. DOI: <https://doi.org/10.1177/0954409712470641> (in English)
39. Mendia-Garcia, I., Gil-Negrete Laborda, N., Pradera-Mallabiabarrena, A., & Berg, M. (2020). A survey on the modelling of air springs – secondary suspension in railway vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 1-30. DOI: <https://doi.org/10.1080/00423114.2020.1838566> (in English)
40. Nakajima, T., Shimokawa, Y., Mizuno, M., & Sugiyama, H. (2014). Air Suspension System Model Coupled With Leveling and Differential Pressure Valves for Railroad Vehicle Dynamics Simulation. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 9(3), 1-9. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4026275> (in English)
41. Nieto, A. J., Morales, A. L., González, A., Chicharro, J. M., & Pintado, P. (2008). An analytical model of pneumatic suspensions based on an experimental characterization. *Journal of Sound and Vibration*, 313(1-2), 290-307. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.11.027> (in English)
42. Oda, N., & Nishimura, S. (1970). Vibration of Air Suspension Bogies and Their Design. *Bulletin of JSME*, 13(55), 43-50. DOI: <https://doi.org/10.1299/jsme1958.13.43> (in English)
43. Oman, S., & Nagode, M. (2013). On the influence of the cord angle on air-spring fatigue life. *Engineering Failure Analysis*, 27, 61-73. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2012.09.002> (in English)
44. Pellegrini, C., Gherardi, F., Spinelli, D., Saporito, G., & Romani, M. (2006). Wheel–rail dynamic of DMU IC4 car for DSB: modeling of the secondary air springs and effects on calculation results. *Vehicle System Dynamics*, 44(sup1), 433-442. DOI: <https://doi.org/10.1080/00423110600872960> (in English)
45. Presthus, M. (2002). *Derivation of air spring model parameters for train simulation* (PhD dissertation). Luleå University of Technology. (in English)
46. Qing, O., & Yin, S. (2003). The non-linear mechanical properties of an airspring. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17(3), 705-711. DOI: <https://doi.org/10.1006/mssp.2001.1434> (in English)
47. Quaglia, G., & Sorli, M. (2001). Air Suspension Dimensionless Analysis and Design Procedure. *Vehicle System Dynamics*, 35(6), 443-475. DOI: <https://doi.org/10.1076/vesd.35.6.443.2040> (in English)
48. Sayyaadi, H., & Shokouhi, N. (2010). Effects of air reservoir volume and connecting pipes length and diameter on the air spring behavior in rail vehicles. *Iranian Journal of Science and Technology Transaction B: Engineering*, 34(B5), 499-508. (in English)
49. Sayyaadi, H., & Shokouhi, N. (2009). Improvement of Passengers Ride Comfort in Rail Vehicles Equipped with Air Springs. *World Academy of Science, Engineering and Technology, International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering*, 3, 592-598. (in English)
50. Sayyaadi, H., & Shokouhi, N. (2009). New dynamics model for rail vehicles and optimizing air suspension parameters using GA. *International Journal of Science & Technology*, 16(6), 496-512. (in English)

РУХОМИЙ СКЛАД І ТЯГА ПОЇЗДІВ

51. Sihong, Z., Jiasheng, W., & Ying, Z. (2008). Research on theoretical calculation model for dynamic stiffness of air spring with auxiliary chamber. In *2008 IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference* (pp. 2-7). Harbin, China. DOI: <https://doi.org/10.1109/vppc.2008.4677717> (in English)
52. Spencer, B. F., Dyke, S. J., Sain, M. K., & Carlson, J. D. (1997). Phenomenological Model for Magnetorheological Dampers. *Journal of Engineering Mechanics*, 123(3), 230-238. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9399\(1997\)123:3\(230\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9399(1997)123:3(230)) (in English)
53. Spiroiu, M. A. (2018). Railway Vehicle Pneumatic Rubber Suspension Modelling and Analysis. *Materiale Plastice*, 55(1), 24-27. DOI: <https://doi.org/10.37358/mp.18.1.4956> (in English)
54. Sun, J. (2011). Calculation of vertical stiffness of air spring with FEM. In *4th ANSA & μ ETA International Conference* (pp. 68-72). Thessaloniki, Greece. (in English)
55. Sun, L., Li, Z., Shen, X., & Zhu, J. (2013). Simulation and Test Study on Dynamic Characteristic of Air Spring with Auxiliary Chamber. In *Proceedings of the 2nd International Conference On Systems Engineering and Modeling* (pp. 0648-0651). DOI: <https://doi.org/10.2991/icsem.2013.131> (in English)
56. Sundvall, P. (2001). Comparisons between predicted and measured ride comfort in trains – a case study on modelling. *Division of Railway Technology*. Retrieved from <https://trid.trb.org/view/715412> (in English)
57. Tadeusz, U. (2011). *Railway Design, Simulation and Analysis by ADAMS/Rail Software*. Akademia Górniczo-Hutnicza. (in English)
58. Weimin, Y., Canhui, Ch., Yaling, Ch., & Yansha, R. (2004). Finite element analysis of an air spring for automobile suspension. *Journal of Beijing University of Chemical Technology*, 31(1), 105-109. (in English)
59. Wen, Y.-K. (1976). Method for Random Vibration of Hysteretic Systems. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 102(2), 249-263. DOI: <https://doi.org/10.1061/jmcea3.0002106> (in English)
60. Wenku, S., Wan, J., Ying, H., Weimin, Y., Hao, Y. & Zubin, L. (2009). Finite element analysis of an air spring concerning initial pressure and parameters of cord fabric layer. In *2009 Asia-Pacific Conference on Computational Intelligence and Industrial Applications (PACIIA)*. Wuhan, China. DOI: 10.1109/PACIIA.2009.5406380 (in English)
61. Xu, L. (2020). Mathematical Modeling and Characteristic Analysis of the Vertical Stiffness for Railway Vehicle Air Spring System. *Mathematical Problems in Engineering*, 2020, 1-12. DOI: <https://doi.org/10.1155/2020/2036563> (in English)
62. Xu, W., He, L., & Shuai, C. (2005). Stiffness calculation and dynamic simulation of air spring. *ASME 2005 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. (pp. 1395-1399). California, USA. DOI: <https://doi.org/10.1115/DETC2005-84338> (in English)
63. Zhong, Y., Yang, Q., & Bao, G. (2011). Nonlinear primary resonances of a pneumatic spring under simple harmonic excitations. In *Proceedings of 2011 International Conference on Fluid Power and Mechatronics* (pp. 229-233). Beijing, China. DOI: <https://doi.org/10.1109/FPM.2011.6045763> (in English)
64. Zhu, H., Yang, J., Zhang, Y., & Feng, X. (2017). A novel air spring dynamic model with pneumatic thermodynamics, effective friction and viscoelastic damping. *Journal of Sound and Vibration*, 408, 87-104. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.07.015> (in English)
65. Zhu, H., Yang, J., Zhang, Y., Feng, X., & Ma, Z. (2017). Nonlinear dynamic model of air spring with a damper for vehicle ride comfort. *Nonlinear Dynamics*, 89(2), 1545-1568. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3535-9> (in English)

Надійшла до редколегії: 31.03.2021

Прийнята до друку: 02.08.2021