

РУХОМИЙ СКЛАД ЗАЛІЗНИЦЬ І ТЯГА ПОЇЗДІВ

УДК 514.8

С. А. УСТЕНКО¹, С. В. ДІДАНОВ^{2*}, О. Ю. АГАРКОВ²

¹Каф. «Математика і механіка», Миколаївський національний університет імені В. О. Сухомлинського, вул. Нікольська, 24, Миколаїв, Україна, 54030, тел. +38 (063) 479 90 61, ел. пошта ustenko.s.a@gmail.com

^{2*}Каф. «Інженерна графіка», Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, пр. Героїв Сталінграда, 9, Миколаїв, Україна, 54025, тел. +38 (0512) 39 73 82, ел. пошта svdidanov@icloud.com

ДОСЛІДЖЕННЯ КРИВИХ ЛІНІЙ, ЗАДАНИХ КУБІЧНИМ РОЗПОДІЛОМ КРИВИНИ

Мета. Подальший розвиток геометричного моделювання криволінійних обводів різних об'єктів на основі заданого кубічного розподілу кривини та заданих значень кривини в граничних точках. **Методика.** Досліджується ділянка плоского криволінійного обводу, яка генерується за умови, що задано кубічний розподіл кривини. Крива розпочинається й закінчується в заданих точках, в яких також визначені кути нахилу дотичних та кривина. Отримано рівняння кривини цієї кривої, що залежить від довжини ділянки та коефіцієнта c кубічного розподілу кривини. Проведено аналіз отриманого рівняння, а також досліджено умови, при яких на кривій виникають точки перегину. Знаходиться такий інтервал зміни параметру (у залежності від вихідних даних та довжини ділянки), щоб точка перегину графіка кривини знаходилась поза межами ділянки кривої лінії. Визначено залежність кута нахилу дотичної до кривої в довільній її точці, а також надані рекомендації щодо розв'язання системи інтегральних рівнянь, що дозволить знайти довжину ділянки кривої та коефіцієнт c кубічного розподілу кривини. **Результати.** У результаті дослідження кривих ліній встановлено, що критерієм їх відбору можна вважати відсутність точок перегину кривини на ділянці, яка розглядається. Аналіз впливу параметра c на графік кута нахилу дотичної до кривої показав, що незалежно від його значення, забезпечується однаковий приріст кута нахилу дотичної до кривої. **Наукова новизна.** Удосконалено підхід до геометричного моделювання кривих ліній на основі кубічного розподілу кривини із заданими її значеннями в граничних точках шляхом усунення точок перегину з розглядуваної ділянки криволінійного обводу. **Практична значимість.** Криві, отримані за запропонованою методикою, можуть використовуватись для геометричного моделювання криволінійних обводів об'єктів у різних галузях промисловості.

Ключові слова: крива лінія; кубічний розподіл кривини; геометричне моделювання; точки перегину; кут нахилу дотичної; кривина криволінійного обводу

Вступ

Сучасна прикладна геометрія досягла значних успіхів у моделюванні кривих ліній за заданими геометричними умовами. Такі задачі виникають під час геометричного моделювання об'єктів технологічно складних галузей промисловості (авіаційної, суднобудівної, машинобудівної, транспортної тощо) [4]. Це пов'язано з тим, що криві, які моделюються, мають задовольняти певні умови, що до них ставляться, наприклад проходити через задані точки, мати визначені в них кути нахилу дотичних і т.п.

Функціональні залежності, які описують ці криві, повинні дозволяти виконувати багатократне диференціювання, а їхні похідні відповідати критеріям неперервності. В цьому плані, однією з найважливіших характеристик кривих ліній об'єктів моделювання, є кривина.

При автоматизованому проектуванні процесів і об'єктів машинобудування та транспорту

найважливішим є геометричне моделювання різних елементів цих об'єктів і процесів. Цій тематиці присвячено велику кількість робіт, зокрема з моделювання лопаткових апаратів турбомашин [3, 11, 17]; з геометричного моделювання кривих ділянок залізничних колій [6, 8, 14, 19, 20]. Моделюванню криволінійних обводів заданого розподілу кривини в літературі також присвячено достатньо уваги. Різноманітні аспекти цього питання висвітлені в роботах [1, 2, 5, 7, 9, 10, 16, 18], а у роботах [12, 15] розглянуті питання геометричного моделювання кривих ліній із заданим кубічним розподілом кривини.

Мета

Метою статті є подальший розвиток геометричного моделювання криволінійних обводів різних об'єктів на основі заданого кубічного розподілу кривини.

РУХОМИЙ СКЛАД ЗАЛІЗНИЦЬ І ТЯГА ПОЇЗДІВ

Робота є продовженням досліджень з геометричного моделювання кривих ліній із застосуванням заданого закону розподілу кривини та заданими значеннями кривини в граничних точках [15], які виконуються авторами.

Методика

Розглянемо ділянку плоского криволінійного обводу, зображену на рис. 1, де застосовані такі позначення: S – довжина дуги обводу; ds – диференціал дуги; $\varphi(0)$ і $\varphi(S)$ – кути нахилу дотичних у початковій і кінцевій точках дуги обводу.

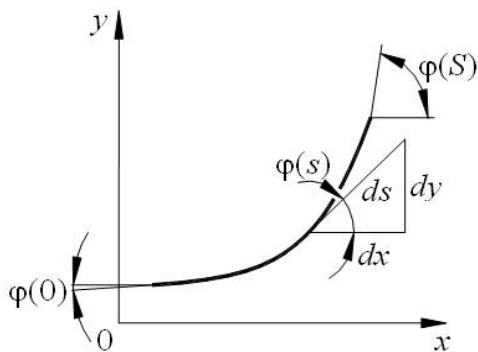


Рис. 1. Ділянка криволінійного обводу

Fig. 1. Section of curvilinear contour

Ця ділянка утворена на основі заданого розподілу кривини $K(s)$, графік якого зображено на рис. 2.

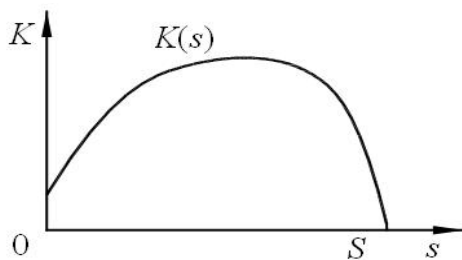


Рис. 2. Графік розподілу кривини

Fig. 2. Graph of curvature distribution

Диференціал дуги ds за відомим значенням кута нахилу до осі абсцис дорівнює:

$$ds = d\varphi / K(s).$$

З цієї формули шляхом інтегрування можна визначити кут нахилу дотичної до кривої в довільній точці:

$$\varphi(s) = \varphi(0) + \int_0^s K(s) ds.$$

Знайдемо рівняння кривої лінії, що утворюється заданим розподілом кривини. З рис. 1 випливає, що

$$dx = ds \cos \varphi(s);$$

$$dy = ds \sin \varphi(s).$$

Проінтегруємо ці вирази і отримаємо параметричні рівняння кривої, залежно від довжини дуги

$$x(s) = x(0) + \int_0^s \cos \varphi(s) ds;$$

$$y(s) = y(0) + \int_0^s \sin \varphi(s) ds.$$

Ці рівняння є рівняннями клотоїди. Інтеграл, що наведені в формулах, можна обчислити тільки за допомогою чиселового інтегрування, наприклад методом Сімпсона.

У випадках, коли потрібно в граничних точках кривої забезпечити не тільки кути нахилу дотичної, а й кривину, розглядається крива, яка генерується за умови, що задано кубічний графік розподілу кривини [15]:

$$K(s) = as^3 + bs^2 + cs + d, \quad (1)$$

де a , b , c , d – невідомі параметри розподілу кривини, що знаходяться в процесі моделювання кривої; s – довжина кривої лінії від початку до поточної точки.

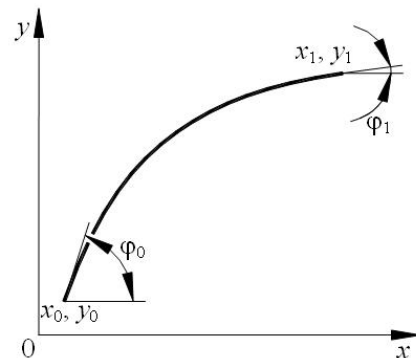


Рис. 3. Криволінійний обвід

Fig. 3. Curvilinear contour

РУХОМИЙ СКЛАД ЗАЛІЗНИЦЬ І ТЯГА ПОЇЗДІВ

Початковими даними для моделювання плоского криволінійного обводу (рис. 3) є координати початкової x_0, y_0 та кінцевої x_1, y_1 точок, кути нахилу дотичних до кривої φ_0, φ_1 і кривина кривої K_0, K_1 в цих точках.

Згідно з результатами роботи [15], для визначення невідомих параметрів a, b і d розподілу кривини (1) слід скористатись такими виразами:

$$a = 2 \frac{3 \frac{\Delta\varphi}{S} - (K_2 + 2K_1) - c}{S^2};$$

$$b = 3 \frac{4 \frac{\Delta\varphi}{S} - (K_2 + 3K_1) - c}{S};$$

$$d = K_1,$$

де $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$.

Підставимо вирази параметрів до рівняння (1) та, перетворивши його, отримаємо:

$$K(s) = \phi_1(s, S) + c\phi_2(s, S),$$

де

$$\phi_1(s, S) = \frac{1}{S^3} \left[K_2 s^2 (4s - 3S) + K_1 (s - S) \times \right. \\ \left. \times (8s^2 - sS - S^2) - 12\Delta\varphi \frac{s^2}{S} (s - S) \right];$$

$$\phi_2(s, S) = \frac{s}{S^2} (s - S)(2s - S).$$

Дослідимо вплив вихідних даних та невідомих параметрів на кубічний графік розподілу кривини. Побудуємо графік для таких вхідних даних: кривина в граничних точках кривої $K_1 = 0$ і $K_2 = -0,1$ відповідно; відносна довжина кривої $S = 1$; приріст кута нахилу дотичної до кривої $\Delta\varphi = -60^\circ$; параметр кривини c , що змінюється від -1 до -5 з кроком 1 (рис. 4).

Як довжина кривої взяте відносно значення, оскільки в багатьох випадках при моделюванні обводів об'єктів різних галузей промисловості розміри ділянок кривих вимірюються метрами, а кривина в граничних точках змінюється від 0 до тисячних. Так, існують об'єкти великих роз-

мірів, для яких характерні дуже малі значення кривини, наприклад довжина перехідної кривої ділянки залізничного шляху дорівнює 300 м, а її кривина змінюється від 0 (на початку) до $1/4\ 000$ (в кінці). І навпаки, розміри достатньо малі, а значення кривини великі, наприклад ширина профілів лопаток турбомашини вимірюється в мм, тобто 10^{-3} м, а кривина в районі вхідної кромки сягає 10^3 . Все це є сприятливим для виникнення великих похибок обчислення [13].

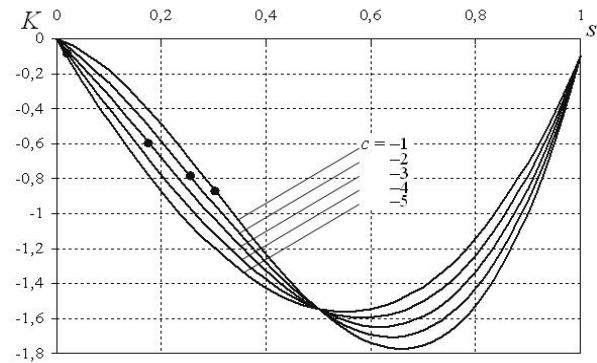


Рис. 4. Вплив параметра c на кубічний графік розподілу кривини

Fig. 4. Influence of parameter c on cubic graph of curvature distribution

Отже, потрібно скористатись розподілом кривини одиничної довжини, а потім застосувати масштабування криволінійного обводу.

На рисунку зображені точки перегину графіка кривини, координати яких знаходяться за допомогою таких виразів:

$$S_0 = \frac{S}{2} \left[1 - \frac{2\Delta\varphi - S(K_2 + K_1)}{6\Delta\varphi - 2S(K_2 + 2K_1) - cS^2} \right], \quad (2)$$

а з урахуванням того, що взята відносна довжина кривої лінії

$$S_0 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{2\Delta\varphi - (K_2 + K_1)}{6\Delta\varphi - 2(K_2 + 2K_1) - c} \right].$$

Критерієм відбору кривих можна вважати відсутність точок перегину кривини на ділянці, що розглядається.

В цьому випадку треба знайти такий інтервал зміни параметра c , щоб точка перегину графіка кривини знаходилась поза межами ділянки кривої лінії, тобто $S_0 < 0$ або $S_0 > S$.

РУХОМИЙ СКЛАД ЗАЛІЗНИЦЬ І ТЯГА ПОЇЗДІВ

Підставимо вираз (2) до обмежень і після перетворень отримаємо:

$$\frac{8\Delta\varphi}{S^2} - \frac{5K_1 + 3K_2}{S} < c < \frac{4\Delta\varphi}{S^2} - \frac{3K_1 + K_2}{S} \quad (3)$$

або для відносної довжини

$$8\Delta\varphi - (5K_1 + 3K_2) < c < 4\Delta\varphi - (3K_1 + K_2).$$

Для заданих вхідних даних отримано інтервал зміни параметра c , при якому на заданій ділянці будуть відсутні точки перегину:

$$-8,07758 < c < -4,08879.$$

Залежність для визначення кута нахилу дотичної до кривої в довільній її точці буде:

$$\varphi(s) = \varphi_0 + \Phi_1(s, S) + c\Phi_2(s, S), \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi_1(s, S) &= \frac{s}{S^3} \left[K_2 s^2 S (s - S) + K_1 (s - S) \times \right. \\ &\quad \left. \times (2s^2 - sS - S^2) + \Delta\varphi \frac{s^2}{S} (4S - 3s) \right]; \\ \Phi_2(s, S) &= \frac{s^2}{2S^2} (s - S)^2. \end{aligned}$$

На основі вхідних даних із попереднього прикладу побудуємо графік розподілу кута нахилу дотичної до кривої, що моделюється. Додатковими даними для побудови графіка буде кут нахилу дотичної в початковій точці кривої $\varphi_0 = 70^\circ$. Результати моделювання залежності кута нахилу дотичної до кривої від відносної довжини зображені на рис. 5.

Як видно з рисунка, незалежно від значення параметра c формули забезпечують однаковий приріст кута нахилу дотичної до кривої.

З урахуванням вище наведеного, залежність для визначення кута нахилу дотичної до кривої в довільній її точці буде:

$$\varphi(s) = \varphi_0 + \Phi_1(s, S) + c\Phi_2(s, S),$$

де

$$\Phi_1(s, S) = \frac{s^3}{S^3} \left[s(K_2 + 2K_1) - S(K_2 + 3K_1) - \right.$$

$$\left. -\Delta\varphi \left(3\frac{s}{S} - 4 \right) \right] + K_1 s;$$

$$\Phi_2(s, S) = s^2 \left(\frac{s^2}{S^2} - \frac{5s}{3S} + \frac{1}{2} \right).$$

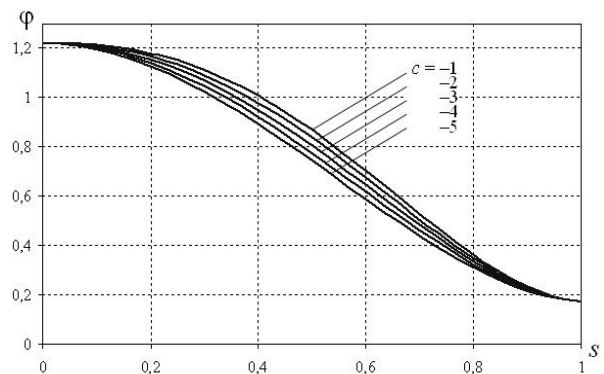


Рис. 5. Вплив параметра c на графік кута нахилу дотичної до кривої, що моделюється

Fig. 5. Influence of parameter c on graph of angle of tangential slope to the curve, which is being modeling

Для моделювання криволінійних обводів із заданими значеннями кривини в граничних точках визначимо параметричне рівняння кривої, в якому за параметр прийнято довжину дуги. Згідно з результатами роботи [15], воно матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} x(s) &= x_0 + \int_0^s \cos(\varphi_0 + \Phi_1(s, S) + c\Phi_2(s, S)) ds; \\ y(s) &= y_0 + \int_0^s \sin(\varphi_0 + \Phi_1(s, S) + c\Phi_2(s, S)) ds. \quad (4) \end{aligned}$$

Інтегралі, що наведені у виразах (4), аналітично не беруться, але їх можна обчислити, застосувавши методи числового інтегрування.

Підставивши у рівняння (4) координати кінцевої точки кривої, отримаємо систему двох інтегральних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} x_1 - x_0 - \int_0^s \cos(\varphi_0 + \Phi_1(s, S) + c\Phi_2(s, S)) ds = 0; \\ y_1 - y_0 - \int_0^s \sin(\varphi_0 + \Phi_1(s, S) + c\Phi_2(s, S)) ds = 0. \end{cases}$$

РУХОМИЙ СКЛАД ЗАЛІЗНИЦЬ І ТЯГА ПОЇЗДІВ

Для знаходження невідомих можна застосувати числовий метод Ньютона, призначений для розв'язування систем трансцендентних рівнянь. Але цей метод передбачає наявність похідних від усіх рівнянь за невідомими змінними. У нашому випадку вони мають такий вигляд:

$$\frac{\partial f_1}{\partial c} = -\int_0^s \Phi_2(s, S) \sin \varphi(s) ds;$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial c} = \int_0^s \Phi_2(s, S) \cos \varphi(s) ds;$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial S} = \frac{1}{S} \int_0^s \left[\cos \varphi(s) - \left(S \frac{\partial \varphi}{\partial S} + sK(s) \right) \sin \varphi(s) \right] ds;$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial S} = \frac{1}{S} \int_0^s \left[\sin \varphi(s) + \left(S \frac{\partial \varphi}{\partial S} + sK(s) \right) \cos \varphi(s) \right] ds,$$

де

$$\frac{\partial \varphi}{\partial S} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial S} + c \frac{\partial \Phi_2}{\partial S};$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial S} = \frac{s^3}{S^4} \left[K_2 S (S - 2s) - \right. \\ \left. - 6K_1 (s - S) + \frac{12\Delta\varphi}{S} (s - S) \right];$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial S} = \frac{s^3}{S^3} (S - s).$$

Для застосування числового методу Ньютона, потрібно взяти початкові значення невідомих параметрів. У зв'язку з тим, що за невідомі були обрані довжина кривої та коефіцієнт c , то можна взяти такі значення:

– для довжини – відстань по прямій між граничними точками плоского криволінійного обводу;

– для коефіцієнта c – із інтервалу (3).

Результати

В результаті дослідження кривих ліній, отриманих із застосуванням кубічного розподілу кривини з заданими значеннями кривини в граничних точках, встановлено, що критерієм відбору змодельованих кривих можна вважати

відсутність точок перегину кривини на ділянці, що розглядається. Інтервал зміни параметра c буде знаходитись на основі нерівності (3).

Аналіз впливу параметра c на графік кута нахилу дотичної до кривої, яка моделюється, показав, що незалежно від значення параметра c формула (4) забезпечує однаковий приріст кута нахилу дотичної до кривої.

Наукова новизна та практична значимість

Наукова новизна полягає в удосконаленні підходу до геометричного моделювання кривих ліній на основі кубічного розподілу кривини із заданими її значеннями в граничних точках, шляхом усунення точок перегину з розглядуваної ділянки криволінійного обводу.

Криві, отримані за запропонованою методикою, можуть використовуватись для геометричного моделювання криволінійних обводів об'єктів в різних галузях промисловості, наприклад для подання профілів лопаткових апаратів турбомашин різного конструктивного оформлення та цільового призначення, під час моделювання перехідних кривих ділянок залізничної колії тощо.

Висновки

Таким чином, удосконалено підхід до геометричного моделювання плоских криволінійних обводів на основі кубічного розподілу кривини із заданими значеннями кривини в граничних точках. Встановлено, що критерієм відбору змодельованих кривих можна вважати відсутність точок перегину кривини на ділянці, що розглядається. Отриманий підхід можна використовувати під час побудови профілів лопаткових апаратів турбомашин, перехідних кривих залізничних колій тощо.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Агарков, О. Ю. Застосування формул Серре-Френе до моделювання кривих, що проходять через задані точки площини або простору / О. Ю. Агарков // Приклад. геометрія та інж. графіка : пр. Тавр. держ. агротехнолог. ун-ту. – Мелітополь, 2013. – Т. 57, вип. 4. – С. 3–9.
2. Бадаєв, С. Ю. Криволінійний сегмент на основі інтегральної кривої / С. Ю. Бадаєв, Є. О. Боро-

РУХОМИЙ СКЛАД ЗАЛІЗНИЦЬ І ТЯГА ПОЇЗДІВ

- вік // Приклад. геометрія та інж. графіка / КНУБА. – К., 2009. – Вип. 81. – С. 213–217.
3. Байдабеков, А. К. Геометрический метод конструирования лопатки вентилятора / А. К. Байдабеков // Приклад. геометрія та інж. графіка / КНУБА. – К., 2010. – Вип. 83. – С. 93–97.
 4. Ванін, В. В. Геометричне моделювання – одна з основ автоматизованого проектування об'єктів і процесів машинобудування / В. В. Ванін, Г. А. Вірченко // Приклад. геометрія та інж. графіка : пр. Тавр. держ. агротехнолог. ун-ту. – Мелітополь, 2009. – Т. 43, вип. 4 – С. 3–10.
 5. Гавриленко, Є. А. Визначення границь діапазонів положення дотичних до обводу з монотонною зміною кривини / Є. А. Гавриленко // Приклад. геометрія та інж. графіка : пр. Тавр. держ. агротехнолог. ун-ту. – Мелітополь, 2005. – Т. 29, вип. 4. – С. 54–58.
 6. Діданов, С. В. Форми перехідних кривих залізничного шляху / С. В. Діданов // Приклад. геометрія, дизайн та об'єкти інтелект. власності : матеріали II-ї міжнар. наук.-практ. конф. студентів, аспірантів та молодих вчен. – К. : ДІА, 2013. – Вип. 2. – С. 55–59.
 7. Довгалюк, В. Б. Геометричний аналіз структури струмин, що настилаються на поверхні різної кривини / В. Б. Довгалюк, В. О. Мілейковський // Приклад. геометрія та інж. графіка / КНУБА. – К., 2012. – Вип. 89. – С. 156–165.
 8. Курган, М. Б. Перебудова кривих для впровадження швидкісного руху пасажирських поїздів / М. Б. Курган, М. А. Гусак, Н. П. Хмелевська // Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Д., 2012. – Вип. 40. – С. 90–97.
 9. Михайленко, В. Є. Дискретне моделювання на базі інтегральної моделі кривої / В. Є. Михайленко, В. Г. Лі // Приклад. геометрія та інж. графіка / КНУБА. – К., 1999. – Вип. 66. – С. 3–8.
 10. Пустюльга, С. І. Дискретне моделювання кривих за заданими функціями зміни кривини та скруту / С. І. Пустюльга, В. Р. Самостян // Сучасні пробл. геометр. моделювання : міжвузів. зб. (за напр. «Інженерна механіка»). – Луцьк, 2008. – Вип. 22, ч. 1. – С. 286–292.
 11. Спирінцев, Д. В. Геометричне моделювання профілю плоских перерізів пера лопатки компресора / Д. В. Спирінцев // Геометричне та комп'ютерне моделювання : пр. Харк. держав. ун-ту харч. та торгівлі / ХДУХТ. – Х., 2009. – Вип. 22. – С. 156–161.
 12. Устенко, С. А. Моделювання кривої із застосуванням кубічного закону розподілу її кривини / С. А. Устенко // Вісн. Херсон. нац. техн. ун-ту. – Херсон, 2008. – Вип. 31. – С. 480–484.
 13. Устенко, С. А. Нормалізація графіків розподілу кривини / С. А. Устенко // Приклад. геометрія та інж. графіка : пр. Тавр. держ. агротехнолог. ун-ту. – Мелітополь, 2013. – Т. 56, вип. 4 – С. 227–231.
 14. Устенко, С. А. Метод побудови просторової перехідної кривої / С. А. Устенко, С. В. Діданов // Наука та прогрес трансп. Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. – 2013. – № 2 (44). – С. 124–128.
 15. Устенко, С. А. Геометричне моделювання кривих ліній із заданою кривиною в граничних точках / С. А. Устенко, С. В. Діданов, О. Ю. Агарков // Приклад. геометрія та інж. графіка / КНУБА. – К., 2011. – Вип. 87. – С. 404–409.
 16. Фокс, А. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве / А. Фокс, М. Пратт. – М. : Мир, 1982. – 304 с.
 17. Ebaid, M. S. Y. A unified approach for designing a radial flow gas turbine / M. S. Y. Ebaid, F. S. Bhinder, G. H. Khdaire // Transactions of the ASME. – 2003. – Vol. 125, July. – P. 598–606.
 18. Farin, G. Curves and surfaces for computer-aided geometric design : a practical guide / G. Farin. – Academic Press Inc., 1997. – [4-th edition]. – 447 p.
 19. Lipicnik, M. New form of road/railway transition curve / M. Lipicnik // J. of Transportation Engineering, 1998. – November / December. – P. 546–556.
 20. Tari, E. A new transition curve with enhanced properties / E. Tari, O. Baykal // Canadian j. of Civil Engineering, 2005. – Vol. 32. – P. 913–923.

С. А. УСТЕНКО¹, С. В. ДИДАНОВ^{2*}, А. Ю. АГАРКОВ²¹Каф. «Математика и механика», Николаевский национальный университет имени В. А. Сухомлинского, ул. Никольская, 24, Николаев, Украина, 54030, тел. +38 (063) 479 90 61, эл. почта ustenko.s.a@gmail.com^{2*}Каф. «Инженерная графика», Национальный университет кораблестроения имени адмирала Макарова, пр. Героев Сталинграда, 9, Николаев, Украина, 54025, тел. +38 (0512) 39 73 82, эл. почта svdidanov@icloud.com

ИССЛЕДОВАНИЕ КРИВЫХ ЛИНИЙ, ЗАДАНЫХ КУБИЧЕСКИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ КРИВИЗНЫ

Цель. Дальнейшее развитие геометрического моделирования криволинейных обводов разных объектов на основе заданного кубического распределения кривизны и заданных значений кривизны в граничных точках. **Методика.** Исследуется участок плоского криволинейного обвода, генерирующегося при условии, что задано кубическое распределение кривизны. Кривая начинается и заканчивается в заданных точках, в которых также определены углы наклона касательных и кривизна. Получено уравнение кривизны этой кривой, зависящее от длины участка и коэффициента c кубического распределения кривизны. Проведен анализ полученного уравнения, а также исследованы условия, при которых на кривой возникают точки перегиба. Находится такой интервал изменения параметра (в зависимости от входных данных и длины участка), чтобы точка перегиба графика кривизны находилась вне границ участка кривой линии. Определена зависимость угла наклона касательной к кривой в произвольной ее точке, а также даны рекомендации по решению системы интегральных уравнений, которые позволят найти длину участка кривой и коэффициент c кубического распределения кривизны. **Результаты.** В результате исследования кривых линий установлено, что критерием их выбора можно считать отсутствие точек перегиба кривизны на рассматриваемом участке. Анализ влияния параметра c на график угла наклона касательной к кривой показал, что независимо от его значения обеспечивается одинаковое приращение угла наклона касательной к кривой. **Научная новизна.** Усовершенствован подход к геометрическому моделированию кривых линий на основе кубического распределения кривизны с заданными ее значениями в граничных точках путем устранения точек перегиба из рассматриваемого участка криволинейного обвода. **Практическая значимость.** Кривые, полученные по предложенной методике, могут использоваться для геометрического моделирования криволинейных обводов объектов в разных отраслях промышленности.

Ключевые слова: кривая линия; кубическое распределение кривизны; геометрическое моделирование; точки перегиба; угол наклона касательной; кривизна криволинейного обвода

S. A. USTENKO¹, S. V. DIDANOV^{2*}, O. YU. AGARKOV²¹Dep. «Mathematics and Mechanics», Nikolayev National University named after V. A. Sukhomlynskyi, Nikolskaya St., 24, Nikolayev, Ukraine, 54030, tel. +38 (063) 479 90 61, e-mail ustenko.s.a@gmail.com^{2*}Dep. «Engineering Graphics», National University of Shipbuilding named after Admiral Makarov, Geroyev Stalingrada St., 9, Nikolayev, Ukraine, 54025, tel. +38 (0512) 39 73 82, e-mail svdidanov@icloud.com

INVESTIGATION OF CURVES SET BY CUBIC DISTRIBUTION OF CURVATURE

Purpose. Further development of the geometric modeling of curvilinear contours of different objects based on the specified cubic curvature distribution and setpoints of curvature in the boundary points. **Methodology.** We investigate the flat section of the curvilinear contour generating under condition that cubic curvature distribution is set. Curve begins and ends at the given points, where angles of tangent slope and curvature are also determined. It was obtained the curvature equation of this curve, depending on the section length and coefficient c of cubic curvature distribution. The analysis of obtained equation was carried out. As well as, it was investigated the conditions, in which the inflection points of the curve are appearing. One should find such an interval of parameter change (depending on the input data and the section length), in order to place the inflection point of the curvature graph outside the curve section borders. It was determined the dependence of tangent slope of angle to the curve at its arbitrary point, as well as it was given the recommendations to solve a system of integral equations that allow finding the length of the curve section and the coefficient c of curvature cubic distribution. **Findings.** As the result of curves

РУХОМИЙ СКЛАД ЗАЛІЗНИЦЬ І ТЯГА ПОЇЗДІВ

research, it is found that the criterion for their selection one can consider the absence of inflection points of the curvature on the observed section. Influence analysis of the parameter c on the graph of tangent slope angle to the curve showed that regardless of its value, it is provided the same rate of angle increase of tangent slope to the curve.

Originality. It is improved the approach to geometric modeling of curves based on cubic curvature distribution with its given values at the boundary points by eliminating the inflection points from the observed section of curvilinear contours. **Practical value.** Curves obtained using the proposed method can be used for geometric modeling of curvilinear contours of objects in different industry branches.

Keywords: curve; cubic curvature distribution; geometric modeling; inflection points; angle of tangent slope; curvature of curvilinear contours

REFERENCES

1. Aharkov O.Yu. Zastosuvannya formul Serre-Frene do modeliuвання kryvykh, shcho prokhodiat cherez zadani tochky ploshchyny abo prostoru [Application of Serret-Freinet formulas to curves simulation that pass through the given points of the plane or space]. *Pratsi Tavriiskoho derzhavnogo ahrotekhnolohichnoho universytetu «Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika»* [Proc. of Tavria State Agrotechnological University «Applied Geometry and Engineering Graphics»], 2013, vol. 57, issue 4, pp. 3-9.
2. Badaiev S.Yu., Borovik Ye.O. Kryvoliniinyi sehment na osnovi intehralnoi kryvoi [Curved segments based on the integral curve]. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika* [Applied geometry and Engineering Graphics], 2009, issue 81, pp. 213-217.
3. Baydabekov A.K. Geometricheskiy metod konstruirovaniya lopatki ventilyatora [Geometric method of fan blade engineering]. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika* [Applied geometry and Engineering Graphics], 2010, issue 83, pp. 93-97.
4. Vanin V.V., Virchenko H.A. Heometrychne modeliuвання – odna z osnov avtomatyzovanoho proektuvannya ob'ektiv i protsesiv mashynobuduvannya [Geometric modeling is one of the computer-aided design objects foundations and process of engineering]. *Pratsi Tavriiskoho derzhavnogo ahrotekhnolohichnoho universytetu «Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika»* [Proc. of Tavria State Agrotechnological University «Applied Geometry and Engineering Graphics»], 2009, vol. 43, issue 4, pp. 3-10.
5. Havrylenko Ye.A. Vyznachennia hranyts diapazoniv polozhennia dotychnykh do obvodu z monotonnoi zminoiu kryvyny [Identification of the ranges boundaries of touch on circumference position with a monotonic change of curvature]. *Pratsi Tavriiskoho derzhavnogo ahrotekhnolohichnoho universytetu «Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika»* [Proc. of Tavria State Agrotechnological University «Applied Geometry and Engineering Graphics»], 2005, vol. 29, issue 4, pp. 54-58.
6. Didanov S.V. Formy perekhidnykh kryvykh zaliznychnoho shliakhu [Forms of railways transitional curves]. *Materialy druhoi Mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii studentiv, aspirantiv ta molodykh vchenykh «Prykladna heometriia, dizain ta obiekty intelektualnoi vlasnosti»* [Proc. of the 2nd Int. Sci. and Practical Conf. of Students and Young Scientists «Applied geometry, design, and intellectual property»], 2013, issue 2, pp. 55-59.
7. Dovhaliuk V.B., Mileikovskiy V.O. Heometrychni analiz struktury strumyn, shcho nastylaiutsia na poverkhni riznoi kryvyny [Geometric analysis of currents structure that are planked on different surfaces curvature]. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika* [Applied geometry and Engineering Graphics], 2012, issue 89, pp. 156-165.
8. Kurhan M.B., Husak M.A., Khmelevska N.P. Perebudova kryvykh dlia vprovadzhennia shvydkisnogo rukhu pasazhyrskykh poizdiv [Reconstruction of curves for high-speed of passenger trains implementation]. *Visnyk Dnipropetrovskoho natsionalnoho universytetu zaliznychnoho transportu imeni akademika V. Lazariana* [Bulletin of Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan], 2012, issue 40, pp. 90-97.
9. Mykhailenko V.Ye., Li V.H. Dyskretne modeliuвання na bazi intehralnoi modeli kryvoi [Discrete simulation based on integral curve model]. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika* [Applied geometry and Engineering Graphics], 1999, issue 66, pp. 3-8.
10. Pustiulha S.I., Samostian V.R. Dyskretne modeliuвання kryvykh za zadanyimi funktsiiami zminy kryvyny ta skrutu [Discrete simulation of curves on a given functions of curvature and torsion changes]. *Suchasni problemy heometrychnoho modeliuвання. Mizhvuzivskiy zbirnyk (za napriamkom «Inzhenerna mekhanika»)* [Contemporary problems in geometric modeling. Interuniversity collection (Engineering Mechanics)], 2008, issue 22, part 1, pp. 286-292.

РУХОМИЙ СКЛАД ЗАЛІЗНИЦЬ І ТЯГА ПОЇЗДІВ

11. Spirintsev D.V. Heometrychne modeliuvannia profilu ploskykh pereriziv pera lopatky kompresora [Geometric modeling of flat sections profile of the compressor blade airfoil]. *Heometrychne ta kompiuterne modeliuvannia* [Geometric and Computational Modeling], 2009, issue 22, pp. 156-161.
12. Ustenko S.A. Modeliuvannia kryvoi iz zastosuvanniam kubichnoho zakonu rozpodilu yii kryvyny [Simulation of curvature using a cubic law of its curves distribution]. *Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu* [Bulletin of Kherson National Technical University], 2008, issue 31, pp. 480-484.
13. Ustenko S.A. Normalizatsiia hrafikiv rozpodilu kryvyny [Normalization of curvature distribution graphs]. *Pratsi Tavriiskoho derzhavnogo ahrotekhnolohichnoho universytetu «Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika»* [Proc. of Tavria State Agrotechnological University «Applied Geometry and Engineering Graphics»], 2013, vol. 56, issue 4, pp. 227-231.
14. Ustenko S.A., Didanov S.V. Metod pobudovy prostorovoi perekhidnoi kryvoi [Constructing method of spatial transition curve]. *Nauka ta prohres transportu. Visnyk Dnipropetrovskoho natsionalnoho universytetu zaliznychnoho transportu – Science and Transport Progress. Bulletin of Dnipropetrovsk National University of Railway Transport*, 2013, no. 44, pp. 124-128.
15. Ustenko S.A., Didanov S.V., Aharkov O.Yu. Heometrychne modeliuvannia kryvykh linii iz zadanoiui kryvynoiui v hranychnykh tochkakh [Geometric modeling of curves with a given curvature in boundary points]. *Prykladna heometriia ta inzhenerna hrafika* [Applied geometry and Engineering Graphics], 2011, issue 87, pp. 404-409.
16. Foks A., Pratt M. *Vychislitel'naya geometriya. Primeneniye v proyektirovanii i na proizvodstve* [Computational geometry. Application in designing and manufacturing]. Moscow Publ., 1982. 304 p.
17. Ebaid M.S.Y., Bhinder F.S., Khdairi G.H. A unified approach for designing a radial flow gas turbine. *Transactions of the ASME*, 2003, vol. 125, pp. 598-606.
18. Farin G. *Curves and surfaces for computer-aided geometric design*. Academic Press Inc. Publ., 1997, 4-th edition. 447 p.
19. Lipicnik M. New form of road/railway transition curve. *Journal of transportation engineering*, 1998, November / December, pp. 546-556.
20. Tari E., Baykal O. A new transition curve with enhanced properties. *Canadian journal of civil engineering*, 2005, vol. 32, pp. 913-923.

Стаття рекомендована до публікації д.т.н., проф. В. Д. Борисенком (Україна); д.т.н., проф. В. В. Рибкіним (Україна)

Надійшла до редколегії 03.02.2014

Прийнята до друку 25.03.2014