УДК 533.6.013.42; 696.2

В. Е. ВОЛКОВА (ДИИТ)

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СИСТЕМ С НЕСИММЕТРИЧНЫМИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫМИ УПРУГИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

При теоретичному дослідженні коливань виникає необхідність побудови математичної моделі. Для цього використовують дані технічних креслень, описів, а також іншу документацію, яка містить інформацію про структуру і значення окремих параметрів. Проте в деяких випадках ця інформація може бути недостатньою. Ефективним при цьому виявляється використання методів ідентифікації систем. Вони полягають у побудові математичної моделі об'єкта по експериментальних записах.

При теоретическом исследовании колебаний возникает необходимость построения математической модели. Для этого используют данные технических чертежей, описаний, а также другой документации о структуре и значениях отдельных параметров. Однако в некоторых случаях эта информация может быть недостаточной. Эффективным при этом оказывается использование методов идентификации систем. Они заключаются в построении математической модели объекта по экспериментальным записям.

In a theoretical study of oscillations the necessity of building a mathematical model arises. For this purpose the data of technical drawings, descriptions, and also other documentation about the structure and meaning of separate parameters, will be used. However in some cases this information can be insufficient. An effective solution in this case can be usage of systems identification methods. They consist in construction of a mathematical model of the object, basing on experimental records.

Качественное исследование поведения динамической системы сводится к изучению поведения траекторий в фазовом пространстве. Основы качественной теории исследования динамических процессов были созданы Пуанкаре. Исключительная роль в развитии качественных методов исследования динамических систем принадлежит А. А. Андронову [1], Е. А. Леонтовичу, И. И. Гордону, А. М. Ляпунову. Основной задачей классической теории качественного исследования является определение динамических свойств систем без получения замкнутого аналитического решения. С этой целью широко использовались фазовые траектории на плоскости $(y,\dot{y})$.

Отметим, что фазовое пространство динамических систем многомерно. Возможен и иной выбор параметров фазовых плоскостей. Впервые попытка применить фазовые траектории на плоскостях $(y,\ddot{y})$ и $(\dot{y},\ddot{y})$ к исследованию динамических систем была сделана в монографии [2]. Как следует из полученных результатов, фазовые траектории на плоскости $(y,\ddot{y})$ могут быть весьма эффективно использованы для идентификации динамических систем. В монографии [3] представлены результаты качественного исследования колебаний консервативных систем, имеющих нелинейные диссипативные и упругие характеристики различных видов.

Целью данной работы является изучение динамического поведения несимметричных систем с кусочно-линейной упругой характеристикой, получение временных процессов и фазовых траекторий $(y,\ddot{y})$ и $(\dot{y},\ddot{y})$ для различных режимов колебаний и выявление их особенностей.

Применение фазовых диаграмм к исследованию колебательных процессов

Наибольший интерес представляет фазовая траектория на плоскости $(y,\ddot{y})$. Это связано с тем, что энергетические критерии на ней интерпретируются наиболее наглядно. Кроме того, зависимость $\ddot{y}(y)$ обратно симметрична относительно оси y к графику изменения упругих свойств. Например, на рис. 1. представлены графики изменения упругой характеристики и ускорения для системы с «люфтом». Именно фазовые траектории $\ddot{y}(y)$ позволяют установить вид и уровень нелинейности системы.

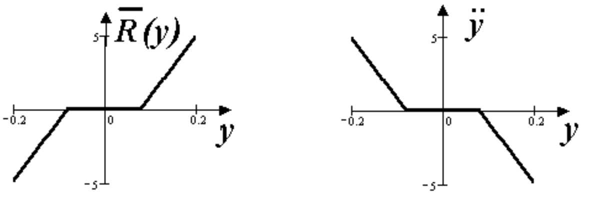

Рис. 1. Графики изменения упругих свойств и ускорения системы с «люфтом»

Известно, что ускорения точек более чувствительны к отклонениям колебаний от гармонических. Сопоставим линейную систему с нелинейной симметричной системой с двумя потенциальными ямами. Заметим, что при некоторых режимах колебаний на частоте возмущения осциллограммы этих систем подобны, а акселерограммы различны. Так, акселерограммы линейной системы имеют вид гармонического процесса, а несимметричной системы с двумя потенциальными ямами – пилообразный вид [2].

Основная трудность построения фазовых траекторий $\ddot{y}\ (y)$ и $\ddot{y}\ (\dot{y})$ состоит в необходимости исключить параметр времени t из соответствующих зависимостей. Аналитически выполнить эту операцию не всегда возможно. Большинство измерительных устройств регистрируют изменения виброперемещений, виброскоростей и виброускорений точек исследуемых систем во времени. Санитарные и технологические нормы вносят ограничения на значения именно этих параметров. Принимая последовательно соответствующие пары значений параметров $y(t)$ и $y(t)$ или $y(t)$ и $\dot{y}(t)$, можно получить данные фазовые характеристики
(рис. 2).

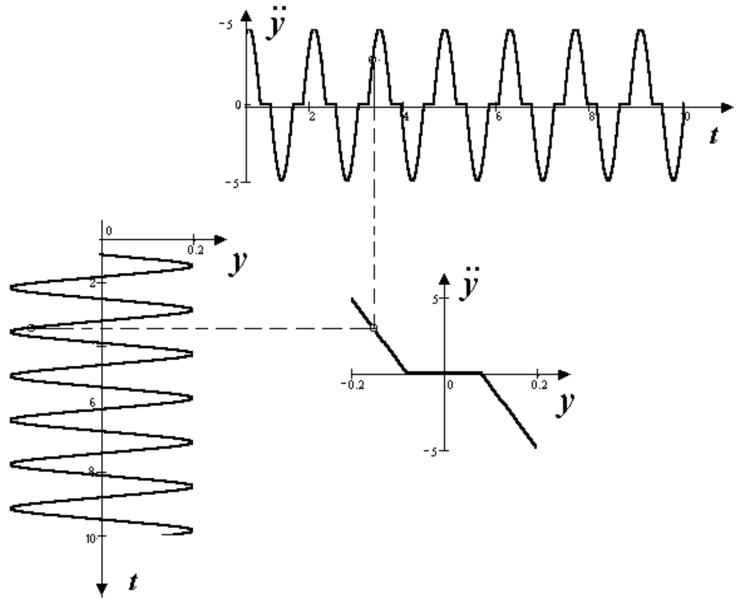

Рис. 2. Построение фазовой траектории $\ddot{y}(y)$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний систем с несимметричной кусочно-линейной характеристикой

Пусть дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид

$$y+\varepsilon\dot{y}+R(y)=F\cos\omega t\,, \qquad (1)$$

где y – обобщенная координата; $R(y)$ – упругая характеристика; ε – коэффициент трения; F, ω – параметры внешнего возмущения;

Предположим, что упругая характеристика является несимметричной и изменяется по закону

$$R(y)=\begin{cases}\alpha_1 y, & y\le 0;\\ \alpha_2 y, & y>0.\end{cases} \qquad (2)$$

Известно, что частота свободных колебаний динамических систем с билинейной упругой характеристикой не зависит от начальных условий. Она равна

$$\omega_0=\frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2}\,,$$

где $\omega_1 = \sqrt{\alpha_1}$ и $\omega_2 = \sqrt{\alpha_2}$.

Несмотря на этот факт, возможно установление режимов суб- и ультрагармонических колебаний. Эти колебания формируются на основе свободных колебаний системы, которые поддерживаются внешней вынуждающей силой (рис. 3).

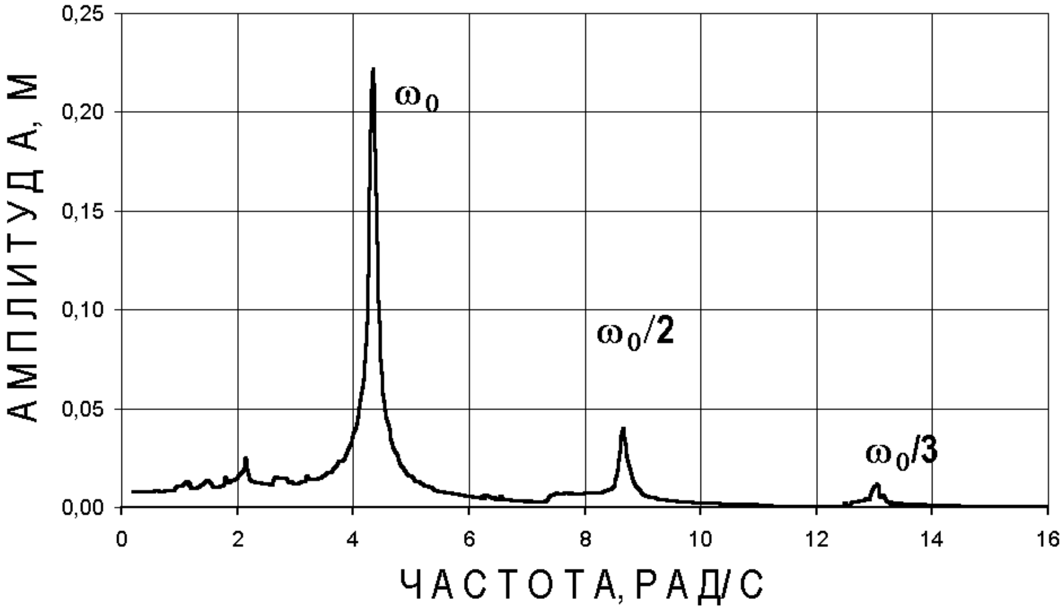

Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика вынужденных колебаний несимметричной системы с кусочно-линейной упругой характеристикой

В отличие от симметричных систем с кусочно-линейными упругими характеристиками, здесь реализуются устойчивые режимы суб- $(\omega_0/2)$ и ультрагармонических $(2\omega_0;\ 4\omega_0)$ колебаний на четных гармониках.

Методика гибридного моделирования

Гибридные вычислительные комплексы (ГВК) представляют собой синтез аналоговых вычислительных комплекса АСС-31 и персонального компьютера. Исследование систем вынужденных колебаний несимметричной системы с кусочно-линейной упругой характеристикой было выполнено на ГВК, созданном на основе персонального компьютера и аналогового вычислительного комплекса. Для генерирования внешнего возмущения был использован генератор сигналов специальной формы Г6-26, максимальный выходной сигнал которого 10 В, динамический диапазон 0,001–10 В, диапазон частот 0.001-10 кГц. Для визуального наблюдения вычислительного процесса (электрических сигналов с выходов решающих усилителей) использовался двухлучевой осциллограф С1-99. Результаты интегрирования нелинейного дифференциального уравнения передавались посредством интерфейсных устройств в персональный компьютер. Выходные сигналы подавались с соответствующих выходов электронных схем на вход масштабирующего усилителя.

Информация, вводимая в компьютер, хранилась на жестком диске в виде текстового файла. Спектральные характеристики исследуемых колебательных процессов были получены с помощью стандартной программы быстрого преобразования Фурье. Для графического построения полученных зависимостей был использован стандартный графический программный комплекс.

Анализ полученных результатов

По сравнению с системой с линейной упругой характеристикой, исследуемая система имеет большое число резонанасных частотных диапазонов, в которых развиваются колебания на частоте возмущения, а также колебания с другими более высокими или низкими частотами.

Параметры динамической системы (1) приняты следующими: $\varepsilon = 0{,}1\ \ \text{с}^{-1}$; $\alpha_1 = 10{,}8\ \ \text{с}^{-1}$; $\alpha_2 = 40{,}8\ \ \text{с}^{-1}$; $F = 0{,}15\ \ \text{м/с}^2$.

На рис. 3 представлена амплитудно-частотная характеристика билинейной системы. Скелетная кривая данной системы есть прямая на частоте $\omega_0 = 4{,}33$ рад/с. На рис. 4 и 5 представлены временные процессы, фазовые траектории на плоскостях $(y,\, \dot{y}), (y,\, \ddot{y}), (\dot{y},\, \ddot{y})$ и спектральные характеристик для колебаний на частоте основного тона $\omega \approx \omega_0$, а также для субгармонических колебаний на частотах $\omega_0/2$ и $\omega_0/3$.

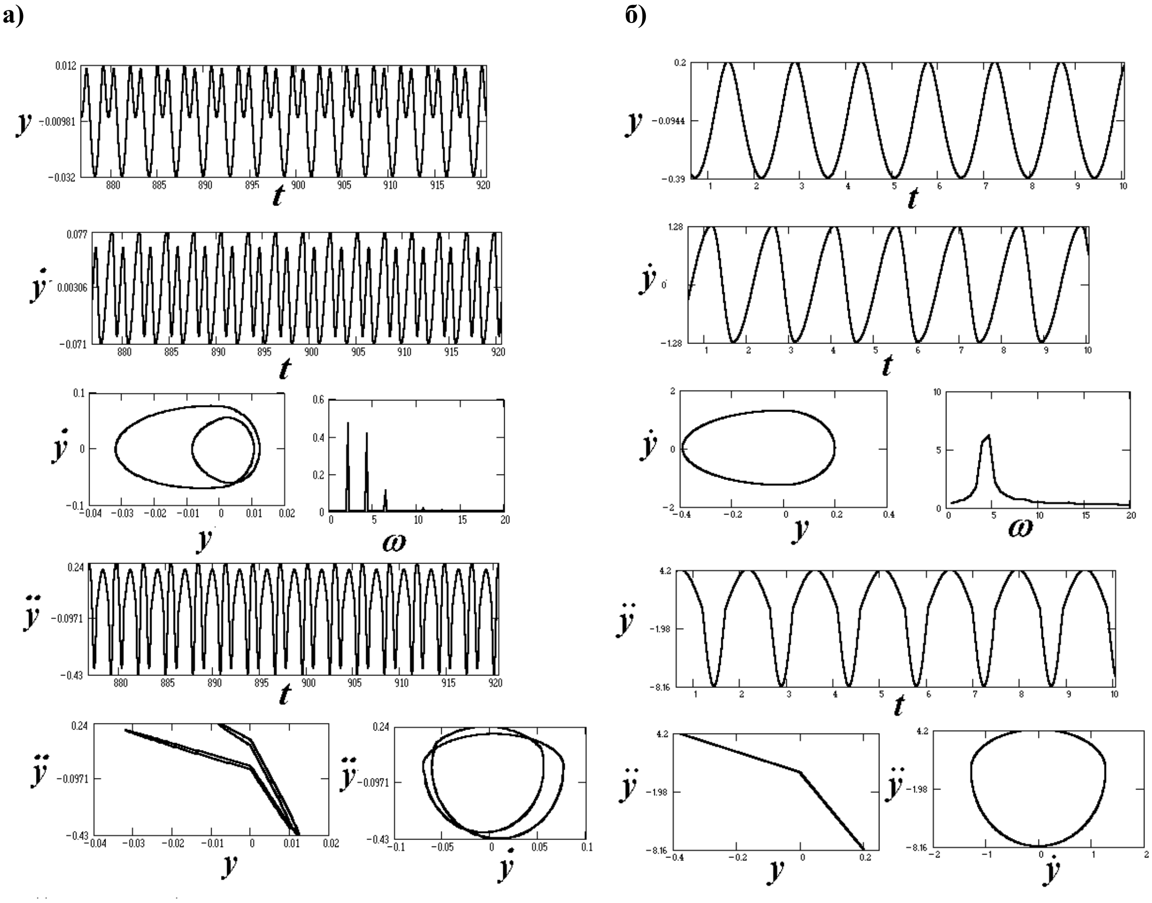

Рис. 4. Временные процессы, спектральные характеристики и фазовые траектории билинейной системы: *а* – ультрагармонические колебания на частоте $2\omega_0$; *б* – колебания на основного тона

В диапазоне частот $\omega < \omega_0$ ультрагармонические колебания на частотах $2\omega_0$; $3\omega_0$; $4\omega_0$, амплитуды которых невелики, накладываются на колебания на частоте основного тона (рис. 4, *а*).

При дальнейшем увеличении частоты $\omega \approx \omega_0$ устанавливаются резонансные колебания на частоте внешней вынуждающей силы (рис. 4, *б*). Для этого диапазона частот временные процессы $y(t)$ и $\dot{y}(t)$ по виду близки к моногармоническим процессам.

В диапазоне частот $\omega > \omega_0$ возникают резонансные субгармонические колебания на частотах $\omega_0/2$ и $\omega_0/3$ (рис. 5). Амплитуды резонансных субгармонических колебаний соизмеримы с амплитудами резонансных колебаний основного тона.

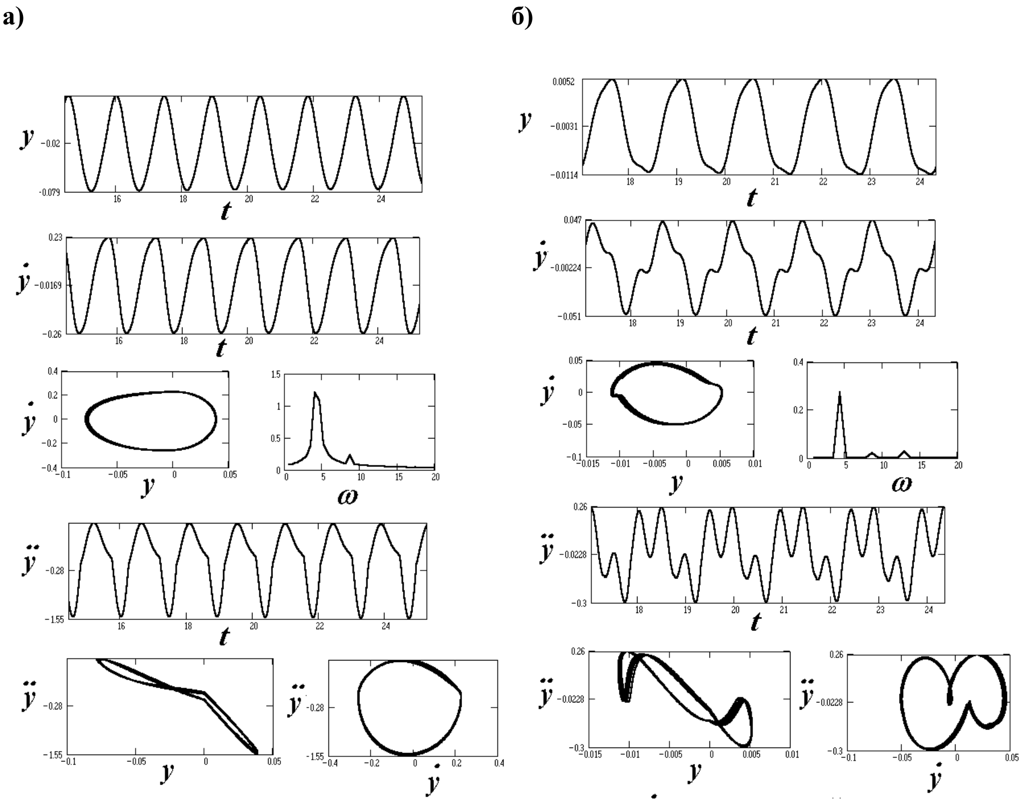

Рис. 5. Временные процессы, спектральные характеристики и фазовые траектории билинейной системы: *а* – субгармонические колебания на частоте $\omega_0/2$; *б* – субгармонические колебания на частоте $\omega_0/3$

Заключение

Развитие качественных методов исследования динамических систем, предложенных автором, является эффективным методом анализа и идентификации динамических систем. Одновременное использование из всех трех типов сигналов, а именно перемещение, скорость и ускорение позволяет значительно расширить возможности традиционных методов исследования.

В отличие от существующих асимптотических и стохастических методов идентификации динамических систем, использование предложенной методики не сопряжено с использованием значительного количества вычислительных процедур, а также имеет ряд преимуществ, при исследовании разрывных колебаний.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Гл. изд-во. Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1966. – 568 с.
2. Казакевич М. И., Волкова В. Е. Динамика систем с двумя потенциальными ямами. – Д.: Арт-Пресс, 2000. – 160 с.
3. Казакевич М. И., Волкова В. Е. Фазовые траектории нелинейных динамических систем. Атлас. – Д.: Наука и образование, 2002. – 94 с.
4. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти томах. т. 2. – М.: Машиностроение, 1979. – 315 с.

Поступила в редколлегию 30.09.03.