УДК 629.46.015

С. А. КОСТРИЦА (ДИИТ)

ПРИМЕНЕНИЕ МКЭ К ЗАДАЧАМ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ НЕСУЩИХ КОНСТРУКЦИЙ ПОДВИЖНОГО СОСТАВА ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

Рассмотрены вопросы применения МКЭ в задачах оптимального проектирования подвижного состава железных дорог. Приведена общая схема процесса оптимизации, построенная на основе метода проекции градиента.

Розглянуті питання використання МКЕ в задачах оптимального проектування рухомого складу залізниць. Наведено загальну схему процесу оптимізації, побудовану на основі методу проекції градієнта.

The possibility of using the finite elements method for optimal designing of railway rolling stock has been considered. The general optimization scheme, based on the gradient projection method, has been proposed.

При решении задачи оптимизации несущих конструкций подвижного состава железных дорог основные трудности представляет задача достижения минимума собственной массы конструкции при сохранении эксплуатационных требований.

В настоящее время выбор рациональных параметров конструкций подвижного состава железных дорог осуществляется, в основном, путем вариантного проектирования. В процессе проектирования размеры несущих элементов назначаются конструктором на основе опыта проектирования аналогичных конструкций. Затем производятся корректировки размеров элементов по результатам расчетов на прочность и испытаний опытных образцов таким образом, чтобы действительные напряжения в основных несущих элементах были близки к допускаемым.

Такой способ выбора рациональных параметров, в значительной степени основанный на личном опыте и интуиции проектировщика, позволяет рассмотреть ограниченное число вариантов, при этом может оказаться, что конструкции с оптимальными параметрами находятся в числе нерассмотренных.

Задача определения оптимальных параметров конструкций подвижного состава может быть решена путем применения оптимального проектирования, базирующегося на методах математического программирования.

В настоящее время существует большое количество методов оптимального проектирования, которые условно можно разделить на две основные группы – методы безусловной и условной оптимизации.

Как одни, так и другие методы нашли широкое применение при оптимизации инженерных конструкций в различных отраслях машиностроения.

Рассматриваемый в данной статье метод проекций градиента в сочетании с моделированием конструкции при помощи конечных элементов обладает достаточной универсальностью, так как позволяет непосредственно учесть ограничения на параметры конструкции и требования к режиму ее работы. Однако при решении задач оптимизации сложных механических систем применение этого метода может привести к определенным трудностям, которые связаны, прежде всего, с отсутствием аналитической зависимости напряжений в несущих элементах при действии определенной нагрузки от параметров конструкции. Поэтому в работе предлагается некоторая модернизация метода проекции градиента, позволяющая использовать МКЭ [1] в процессе оптимизации.

В большинстве задач оптимизации конструкций поведение механической системы описывается совокупностью переменных, называемых переменными состояния. Конструктор не может непосредственно управлять переменными состояния – перемещениями и напряжениями, но может воздействовать на эти величины, меняя значения переменных проектирования.

Введем обозначения:

Z – вектор размерности n переменных состояния;

X – вектор размерности m переменных проектирования.

Тогда функция цели, представляющая собой объем оптимизируемых элементов, будет иметь вид

$$F(X) = f(x_1, x_2, ...x_m), \qquad (1)$$

где $x_1, x_2, ...x_m$ – компоненты вектора *X*, являющиеся размерами оптимизируемых элементов.

Так как для моделирования поведения конструкции используется метод конечных элементов, то уравнение состояния можно записать как:

$$K(X)Z = Q, \qquad (2)$$

где $K(X)$ – глобальная матрица жесткости ансамбля конечных элементов конструкции; *Q* – вектор приведенных нагрузок в узлах конечно-элементной модели.

Ограничения могут быть представлены в виде:

$$\psi_i(X,Z) = \frac{[s_i]}{s_i(X,Z)} - 1 \geq 0, \ i = 1, l_1,$$

$$\beta_i(X) = 0, \ i = 1, l_3,$$

$$a_i < x_i < b_i, \ i = 1, l_2, \qquad (3)$$

где $[s_i], s_i(X,Z)$ – нормативные и текущие значения параметров состояния в *i*-м элементе конструкции (напряжения, прогибы); $\beta_i(X)$ – функции, задающие связь между параметрами оптимизации; a_i, b_i – ограничения на значения параметров проектирования; l_1, l_2, l_3 – соответственно количество ограничений на параметры состояния, количество функций, связывающих оптимизируемые параметры вектора *X* и количество искомых размеров.

Применим метод проекции градиента для оптимизации параметров конструкции с уравнением состояния (2) при ограничениях (3). Под оптимальными параметрами будем понимать те значения компонентов вектора *X*, при которых функция (1) достигает минимума.

При использовании метода проекции градиента, основываясь на локальном поведении функции цели и функций, задающих ограничения, на каждом шаге оптимизации определяется направление поиска. Приращение вектора *X* на *i*-м шаге в найденном направлении дает новое приближение к оптимальной конструкции

$$X_i = X_{i-1} + \delta X_i.$$

При этом основной отличительной чертой рассматриваемого метода является то, что на каждом шаге итераций функция цели $F(X)$ уменьшается, а ограничения не нарушаются.

Вектор δX приращений параметров проектирования определяется из соотношения

$$\delta X = -t\delta X_1 + \delta X_2,$$

где δX_2 – вектор, задающий необходимую коррекцию невязок в ограничениях; δX_1 – вектор, не влияющий на невязки в ограничениях и представляющий собой направление спуска для целевой функции; *t* – параметр шага.

Вывод выражений для определения δX_1 и δX_2 приведен в работе [2], поэтому приведем лишь их окончательные выражения:

$$\begin{aligned} \delta X_1 &= W^{-1}[\xi + \eta\mu_1] \\ \delta X_2 &= W^{-1}\eta\mu_2, \end{aligned} \qquad (4)$$

где W^{-1} – положительно определенная матрица весовых коэффициентов переменных проектирования размерности *m*; ξ – градиент функции цели; η – матрица размерности $[m \times l_1]$, столбцами которой являются градиенты функций, задающих ограничения; μ_1 и μ_2 – векторные множители размерности l_1, которые определяются согласно процедуре метода проекции градиента [2].

Из соотношения (4) видно, что для вычисления вектора приращений параметров на каждом шаге итерации необходимо определять значения компонентов векторов ξ и матрицы η. Из приведенных выше определений можем записать аналитические выражения для их определения

$$\xi = \frac{\partial F(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F(X)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F(X)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F(X)}{\partial x_m} \end{bmatrix}; \eta = \frac{\partial \psi(X,Z)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_{l_i}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \psi_{l_i}}{\partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_m} & \cdots & \frac{\partial \psi_{l_i}}{\partial x_m} \end{bmatrix}.$$

Из приведенного соотношения видно, что компоненты матрицы η зависят от переменных состояния конструкции . Вычисление этой матрицы является наиболее трудоемкой операцией в алгоритме метода проекции градиента, так как при решении практических задач оптимизации конструкции получить аналитические выражения $\psi(X,Z)$, а, следовательно, и $\dfrac{\partial\psi(X,Z)}{\partial X}$, как правило, не удается.

Поэтому предлагается численное определение коэффициентов матрицы η с использованием известного соотношения для вычисления частных производных от функции многих переменных:

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}=\frac{\psi_i\left(x_1,x_2,..,x_j+\Delta x_j,..x_m\right)-\psi_i\left(x_1,x_2,..,x_j,..x_m\right)}{\Delta x_j}.$$

В свою очередь, для определения значений функции ψ_i производится расчет конструкции по МКЭ и определяется напряжение σ_i' в элементе, для которого заданы ограничения. Затем дается приращение j-му параметру оптимизации, вновь производится расчет конструкции и определяется напряжение σ_i'' при измененном значении j-го параметра. Тогда, принимая во внимание (3), компоненты матрицы η можно определить из соотношения:

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}=\frac{\sigma''_i-\sigma'_i}{\Delta x_j}\lambda,$$

где λ – нормирующий множитель, который определяется из выражения вида:

$$\lambda=\frac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left(\dfrac{\sigma''_i-\sigma'_i}{\Delta x_j}\right)^2}}.$$

Основным недостатком изложенного способа вычисления градиентов функций, задающих ограничения по прочности, является необходимость многократного расчета конструкции с использованием МКЭ. Однако при определенном виде нагружения прочность конструкции в целом обусловлена прочностью нескольких элементов. Следовательно, число функций, задающих ограничения по прочности, и размерность матрицы η будут небольшими. Поэтому, принимая во внимание вышесказанное, а также высокое быстродействие современных ЭВМ, можно рекомендовать описанный метод для проведения практических оптимизационных расчетов несущих конструкций подвижного состава на стадии проектирования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 350 с.
2. Хог Э., Арора Е. Прикладное оптимальное проектирование. – М.: Мир, 1983. – 480 с.

Поступила в редколлегию 18.10.03.