

ВЛИЯНИЕ ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВАНТ

Стаття присвячена аналізу впливу згинальної жорсткості на динамічні властивості вант. Побудовано математичну модель вільних коливань вант без урахування демпфірування. Виконано дослідження впливу згинальної жорсткості на вільні коливання системи. Зазначено, що урахування згинальної жорсткості призводить до збільшення частоти вільних коливань вант.

Статья посвящена анализу влияния изгибной жесткости на динамические свойства вант. Построена математическая модель свободных колебаний ванты без учета демпфирования. Выполнено исследование влияния изгибной жесткости на свободные колебания системы. Отмечено, что учет изгибной жесткости приводит к увеличению частоты свободных колебаний ванты.

The paper is devoted to the analysis of influence of bending rigidity on dynamical properties of cables. A mathematical model of free oscillations of the cable without account of the damping is developed. An investigation of influence of bending rigidity on free oscillations of the system has been carried out. It has been noted that consideration of bending rigidity leads to an increase in frequency of free oscillations of the cable.

Введение

В современной практике мостостроения сооружают различные типы висячих мостов. Среди них видное место занимают вантовые мосты, у которых несущими элементами являются ванты – элементы, имеющие значительную гибкость. Исследованию динамических свойств вант посвящен широкий ряд работ [1; 2].

Ряд исследований не учитывает влияние изгибной жесткости на динамические свойства вант [2]. Изгибная жесткость ванты по отношению к осевой незначительна, однако может привести к изменению параметров свободных колебаний.

В данной статье выполнено сопоставление двух подходов к определению частот и амплитуд свободных колебаний вант.

Постановка задачи. Рассмотрим ванту длиной L , точки подвеса которой расположены на разных уровнях. Нагрузка, действующая на ванту, является равномерно распределенной по длине ванты.

Решаемые технические задачи:

- проанализировать влияние изгибной жесткости на характеристики свободных колебаний вант;
- построить амплитудно-частотные зависимости свободных колебаний.

1. Дифференциальное уравнение свободных колебаний вант без учета изгибной жесткости

Используем дифференциальное уравнение свободных колебаний вант без учета демпфирования [2]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{EA}{l} \left(\frac{dy}{dx} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \times \left(\int_0^l \left[\frac{dy}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx \right) \right) = m \ddot{v}, \quad (1)$$

где T_0 – максимальное растягивающее усилие в сечении нити; l – расстояние между опорами в направлении ванты (рис. 1); E – модуль упругости материала ванты; m – масса единицы длины ванты; $y(x)$ – уравнение кривой провисания нити; $v(x, t)$ – вертикальные перемещения местной координаты системы.

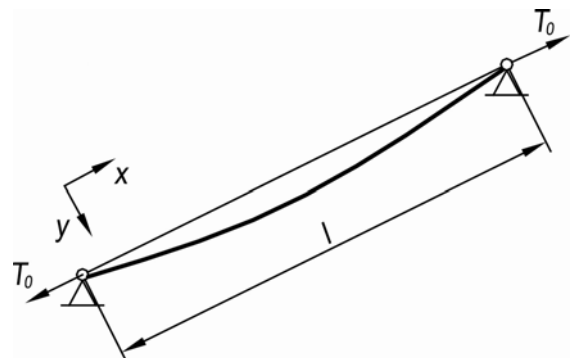


Рис. 1. Анализируемая модель ванты

Предполагая, что нижняя точка кривой провисания нити находится вне пролета ванты (на значительном расстоянии от левой опоры), прием уравнение кривой провисания нити в виде

$$v(x) = \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (2)$$

Так как оба конца ванты шарнирно оперты, представляем функцию $v(x, t)$ в виде [3]

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (3)$$

Подставив выражения (2) и (3) в выражение (1) и выполнив необходимые преобразования, получаем при $n=1$

$$m\ddot{q}(t) + \left(T_0 \frac{\pi^2}{l^2} + \frac{1}{2} EA \frac{\pi^4}{l^4} \right) q(t) + \frac{3}{4} EA \frac{\pi^4}{l^4} q^2(t) + \frac{1}{4} EA \frac{\pi^4}{l^4} q^3(t) = 0$$

Введем обозначение восстанавливающей силы

$$R_1(q) = \alpha_1 q + \gamma q^2 + \beta q^3, \quad (4)$$

где

$$\alpha_1 = \left(T_0 \frac{\pi^2}{l^2} + \frac{1}{2} EA \frac{\pi^4}{l^4} \right),$$

$$\gamma = \frac{3}{4} EA \frac{\pi^4}{l^4},$$

$$\beta = \frac{1}{4} EA \frac{\pi^4}{l^4},$$

получим уравнение свободных колебаний ванты

$$m\ddot{q} + R_1(q) = 0. \quad (5)$$

Данная система является нелинейной и не-симметричной, а следовательно, обладает свойством неизохронности – частоты свободных колебаний зависят от амплитуды.

2. Дифференциальное уравнение свободных колебаний вант с учетом изгибной жесткости

Уравнение свободных колебаний вант с учетом изгибной жесткости имеет вид

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} EI + \frac{\partial}{\partial x} \left(T_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{EA}{l} \left(\frac{dy}{dx} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \times \left(\int_0^l \left[\frac{dy}{dx} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx \right) \right) = m\dot{v}, \quad (6)$$

где l – момент инерции поперечного сечения ванты.

Подставив выражения (2) и (3) в выражение (6) и выполнив необходимые преобразования, получаем при $n=1$

$$m\ddot{q}(t) + \left(T_0 \frac{\pi^2}{l^2} + \frac{1}{2} EA \frac{\pi^4}{l^4} + EI \frac{\pi^4}{l^4} \right) q(t) + \frac{3}{4} EA \frac{\pi^4}{l^4} q^2(t) + \frac{1}{4} EA \frac{\pi^4}{l^4} q^3(t) = 0.$$

Введем обозначение восстанавливающей силы

$$R_2(q) = \alpha_2 q + \gamma q^2 + \beta q^3. \quad (7)$$

Как видим из уравнения (7), выражение восстанавливающей силы с учетом изгибной жесткости отличается от аналогичного выражения без учета изгибной жесткости лишь коэффициентом α_2 при линейном члене

$$\alpha_2 = \left(T_0 \frac{\pi^2}{l^2} + \frac{1}{2} EA \frac{\pi^4}{l^4} + EI \frac{\pi^4}{l^4} \right),$$

в то время как, коэффициенты при нелинейных членах остаются те же.

Уравнение свободных колебаний в этом случае будет иметь вид

$$m\ddot{q} + R_2(q) = 0. \quad (8)$$

Все свойства системы остаются такими же, как и без учета изгибной жесткости.

3. Анализ влияния изгибной жесткости на свободные колебания вант

Для анализа влияния изгибной жесткости на свободные колебания вант рассмотрим следующий численный пример.

Пусть дана наклонная ванта, шарнирно закрепленная на концах (рис. 2).

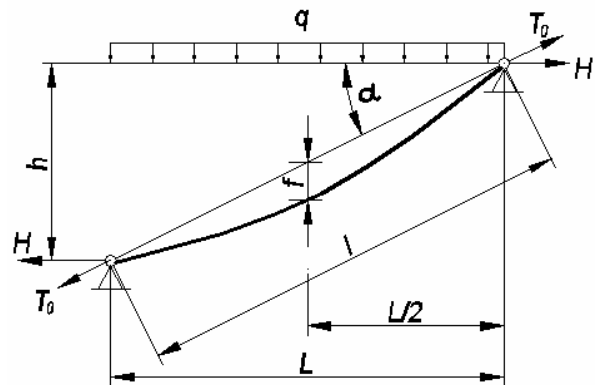


Рис. 2. Расчетная схема ванты

Исходные данные системы:

- пролет ванты $L = 70$ м;
- угол наклона $\alpha = 45^\circ$;
- диаметр ванты $d = 140$ мм;
- прогиб посередине пролета $f = \frac{1}{250}L$;

– материал ванты – сталь класса С345 ($\gamma = 7850$ кг/м³, $E = 2,1 \cdot 10^{10}$ кг/м²).

Площадь поперечного сечения ванты $A = \frac{\pi d^2}{4}$, момент инерции сечения $I = \frac{\pi d^4}{64}$. Нагрузка от собственного веса, действующая на ванту: $p_1 = \gamma A$. Статически эквивалентная нагрузка, распределенная вдоль пролета: $p_2 = \frac{p_1}{\cos(\alpha)}$. Высота крепления ванты $h = L \operatorname{tg}(\alpha)$. Расстояние между опорами в направлении ванты $l = \frac{L}{\cos(\alpha)}$.

Для нахождения максимального растягивающего усилия в сечении ванты определим сначала горизонтальную составляющую усилия [4]:

$$H = \frac{p_2 L^2}{8f}. \quad (9)$$

Максимальное растягивающее усилие

$$T_0 = \sqrt{H^2 + \left(H \frac{h}{L} + p_2 \frac{L}{2} \right)^2}. \quad (10)$$

Построим нелинейные характеристики данной системы (рис. 3).

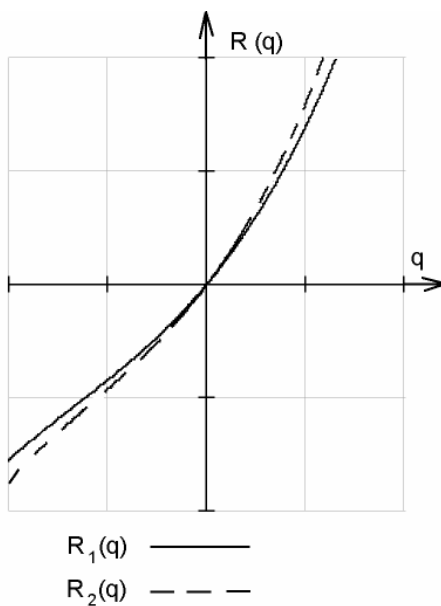


Рис. 3. Графики восстанавливающей силы

Обе характеристики восстанавливающей силы являются жесткими, т. е. с возрастанием перемещения возрастает жесткость системы. Также следует заметить, что сравнение зависимостей не выявляет существенного отличия характеристик.

Проинтегрировав выражения (4) и (7), получим выражение потенциальной энергии ванты:

$$U_1(q) = \frac{1}{2} \alpha_1 q^2 + \frac{1}{3} \gamma q^3 + \frac{1}{4} \beta q^4, \quad (11)$$

$$U_2(q) = \frac{1}{2} \alpha_2 q^2 + \frac{1}{3} \gamma q^3 + \frac{1}{4} \beta q^4. \quad (12)$$

Графики функций $U_1(q)$ и $U_2(q)$ приведены на рис. 4.

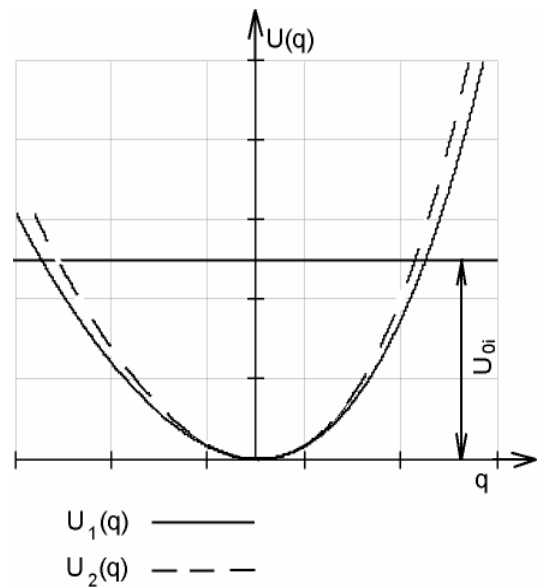


Рис. 4. Графики потенциальной энергии системы

Рассмотрим колебания системы на фазовой плоскости. Уравнение фазовой траектории имеет вид [5]

$$\dot{q} = \sqrt{\frac{2[U_{0i} - U_i(q)]}{m}}, \quad (13)$$

где U_{0i} – начальный запас полной потенциальной энергии системы; m – распределенная масса ванты

$$m = \frac{p_2}{g},$$

где g – ускорение свободного падения. Графики кривых приведены на рис. 5.

Как видим, ни по графикам потенциальной энергии, ни по графикам фазовых траекторий системы невозможно оценить влияние изгибной жесткости.

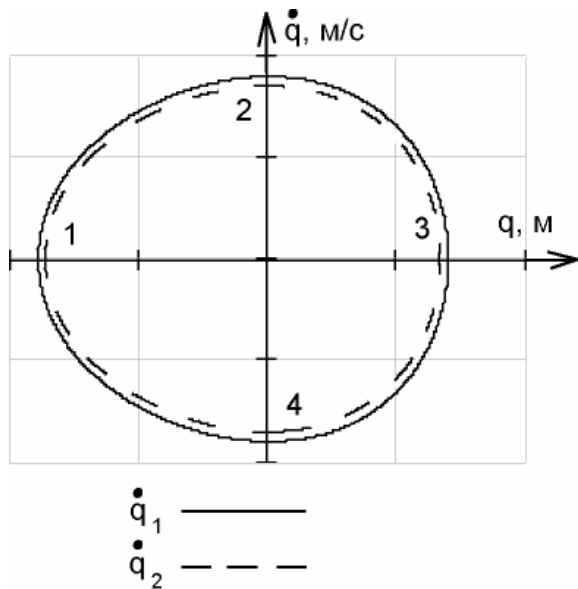


Рис. 5. Графики фазовых траекторий системы

Построим амплитудно-частотные характеристики для обоих случаев. Для этого найдем период колебаний системы. Так как система нелинейная и несимметричная, то, как видно на графиках фазовых траекторий (см. рис. 5), $T_{1-2} \neq T_{2-3}$ и $T_{3-4} \neq T_{4-1}$. Полный период колебаний системы будет равен

$$T = 2(T_1 + T_2), \quad (14)$$

где T_1 и T_2 являются четвертями периодов колебаний, совершаемых от q_1 до q_2 и от q_2 до q_3 , то есть

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}} \int_{q_1}^{q_2} \frac{dq}{\sqrt{[U_{0i} - U_i(q)]}}, \\ T_2 &= \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}} \int_{q_2}^{q_3} \frac{dq}{\sqrt{[U_{0i} - U_i(q)]}} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Частота колебаний будет определяться по формуле

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (16)$$

Амплитудно-частотные характеристики свободных колебаний приведены на рис. 6.

Как видим, учет изгибной жесткости ванты оказывает влияние на значения собственных частот колебаний. Основные частоты свободных колебаний составляют: без учета изгибной жесткости $\omega_0 = 3,77$ рад/с; с учетом изгибной жесткости $\omega_0 = 3,83$ рад/с.

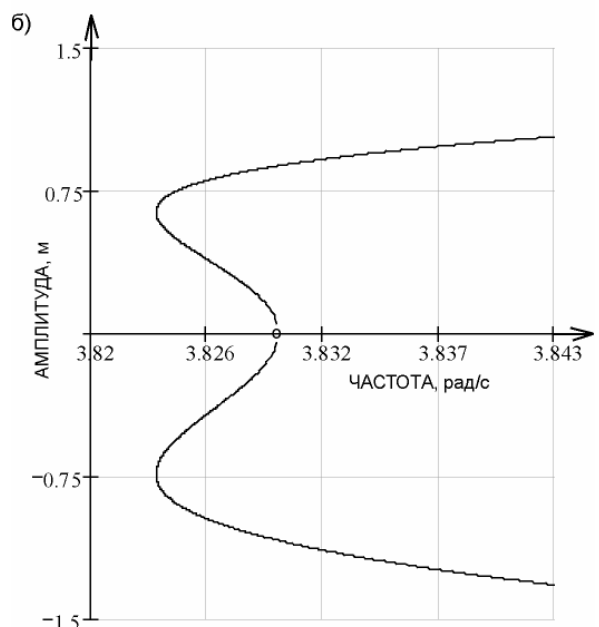
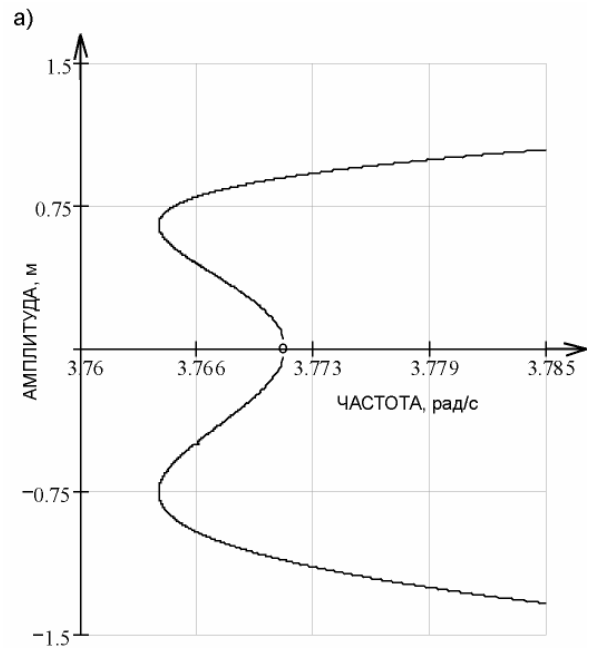


Рис. 6. Амплитудно-частотные характеристики системы:

а) без учета изгибной жесткости; б) с учетом изгибной жесткости

Анализируя амплитудно-частотные характеристики, можно отметить наличие области двузначности, то есть в некотором диапазоне частот система может колебаться с двумя различными амплитудами.

Вывод

Учет изгибной жесткости вант не оказывает существенного влияния на основные характеристики системы – обе являются нелинейными и несимметричными, однако приводит к увеличению значений частоты свободных колебаний.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Смирнов В. А. Висячие мосты больших пролетов. – М.: Высш. шк., 1975. – 368 с.
2. Juwon Seo \$ Namsik Kim; Dong-Ho Ha; Jeongin Suh. Development of cable damper with high damping rubber bearing for cable stayed bridge.– Structural Dynamics, EURODYN2002, Grundmann \$ Schueller (eds.) – P. 217–221.
3. Каудерер Г. Нелинейная механика. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. – 778 с.
4. Писаренко Г. С. Справочник по сопротивлению материалов / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев – К.: Наукова думка, 1975. – 704 с.
5. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. – М.: Наука, 1964. – 438 с.

Поступила в редколлегию 07.05.04.