

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

У статті подані методика та результати обчислювального експерименту: властивості та особливості змущених коливань нелінійних механічних систем, які описуються нелінійними диференціальними рівняннями. При розробці програмного забезпечення, необхідного для рішення даної задачі, використані методи численного інтегрування (метод Рунге-Кутта 4-го порядку), спектрального аналізу (алгоритм Герцеля), комп'ютерної графіки та ін.

В статье приведены методика и результаты вычислительного эксперимента: свойства и особенности вынужденных бигармонических колебаний нелинейных механических систем, описываемых нелинейным дифференциальным уравнением. При разработке программного обеспечения, необходимого для решения данной задачи, использованы методы численного интегрирования (метод Рунге-Кутта 4-го порядка), спектрального анализа (алгоритм Герцеля), компьютерной графики.

The methods and results of the numerical modelling, qualities and peculiarities of the non-linear mechanical system biharmonic forced oscillations, described by the non-linear differential equation, are presented in the paper. The method of numerical integration (Runge-Kutta method of the fourth order), spectral analysis (Hertzal algorithm), computer graphic were used working out of the software necessary for the solution of the given task.

Периодические колебательные режимы механических систем, динамическое поведение которых описывается уравнением типа Дуффинга, при моногармоническом возмущении достаточно подробно изучены [5]. Наибольший практический и теоретический интерес представляет вопрос о поведении таких систем, в тех случаях, когда внешнее возмущение, оставаясь периодическим, будет изменяться по более сложному закону. Можно ожидать, что в качественной структуре получаемых периодических колебательных режимов произойдут существенные изменения.

Качественное исследование поведения динамической системы сводится к изучению поведения траекторий в фазовом пространстве. Основы качественной теории исследования динамических процессов были созданы Пуанкаре. Исключительная роль в развитии качественных методов исследования динамических систем принадлежит А. А. Андронову [1], Е. А. Леонтовичу, И. И. Гордону, А. М. Ляпунову. Основной задачей классической теории качественно-исследования является определение динамических свойств систем без получения замкнутого аналитического решения. С этой целью широко использовались фазовые траектории на плоскости (y, \dot{y}) .

Отметим, что фазовое пространство динамических систем многомерно. Возможен и иной выбор параметров фазовых плоскостей. Впервые попытка применить фазовые траекто-

рии на плоскостях (y, \dot{y}) и (\dot{y}, \ddot{y}) к исследованию динамических систем была сделана в монографии [2]. Как следует из полученных результатов, фазовые траектории на плоскости (y, \dot{y}) могут быть весьма эффективно использованы для идентификации [3].

Целью данной работы является изучение динамического поведения несимметричных систем с кусочно-линейной упругой характеристикой, получение временных процессов и фазовых траекторий (y, \dot{y}) и (\dot{y}, \ddot{y}) для различных режимов колебаний и выявление их особенностей

1. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

Для широкого ряда механических динамических систем внешнее возмущение отлично от моногармонического. Оно может содержать несколько гармоник, имеющих различные амплитуды. Вынужденные колебания таких систем могут быть описаны дифференциальным уравнением вида [4]

$$\ddot{y} + \varepsilon \dot{y} + R(y) = F(t);$$

$$F(t) = F_0 +$$

$$+ \sum_{i=1}^n F_i(t) \cos(\omega_i t) + \sum_{j=1}^n F_j(t) \sin(\omega_j t), \quad (2)$$

$$i = 1, 2, 3 \dots n, \quad j = 1, 2, 3 \dots n,$$

где y – обобщенная координата; ε – коэффициент демпфирования; $R(y)$ – упругая характеристика системы; $F(t)$ – характеристика внешнего полигармонического возмущения.

Предположим, что упругая характеристика динамической системы нелинейная и изменяется по закону

$$R(y) = -\alpha y + \beta y^3. \quad (2)$$

Ограничимся случаем несимметричного бигармонического возмущения. Предположим, что характеристика внешнего полигармонического возмущения имеет вид

$$F(t) = F_1 \cos(\omega_1 t) + F_m \cos(\omega_m t), \quad (3)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

Известно, что характеристика внешнего возмущения является периодической функцией времени t только в случае кратности частот, т. е. $\omega_m = \mu \omega_1$, $\mu = 0, 1, 2, 3, \dots$. Отметим, что появление стационарных колебаний возможно только при периодическом возбуждении. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать случай кратности частот.

При значениях $\mu = 0$ и $\mu = 1$ формула (2) описывает гармоническое возмущение частотой ω и амплитудами F_1 и $F_1 + F_m$ соответственно.

2. Методика численного моделирования

Для получения на ЭВМ численного решения уравнения (1) был использован метод Рунге-Кутты 4-го порядка. Учитывая сложный характер колебаний нелинейных систем, описываемых уравнением (1), шаг интегрирования Δt выбирался в диапазоне $T/250 \leq \Delta t \leq T/150$, где $T = 2\pi/\omega$ – период гармонической составляющей внешнего воздействия. Выполнение данного условия обеспечивало устойчивость процедуры численного решения уравнения (1) при всех рассмотренных вариантах значений его коэффициентов.

Для определения амплитуд этих гармонических составляющих был использован алгоритм Герцеля.

3. Анализ полученных результатов

В статье приведены результаты исследования бигармонических колебаний симметричной системы с двумя потенциальными ямами. В качестве эталона была принята система с линейной упругой характеристикой.

На закон изменения внешнего возмущения, в общем случае, достаточно точно можно наложить следующее ограничение – функция $F(t)$ должна удовлетворять условию Дирихле.

Сопоставим поведение изучаемой системы (1) с системами

$$\ddot{y} + \varepsilon \dot{y} + R(y) = F_1 \cos(\omega_1 t); \quad (4 a)$$

$$\ddot{y} + \varepsilon \dot{y} + R(y) = F_m \cos(\omega_m t). \quad (4 б)$$

Амплитудно-частотная характеристика для уравнения (1) представлена на рис. 1. На рис. 1. ярко выражены две резонансные области, соответствующие резонансам для каждой из гармоник внешнего возмущения. Сопоставление их с амплитудно-частотными характеристиками для систем (4 а) и (4 б) в области основного резонанса (рис. 2) показывает достаточно близкое совпадение параметров колебаний на резонирующих гармониках. В области второго резонанса наблюдается незначительное расширение частотного диапазона и увеличение амплитуды для системы (4 б).

Характеристики субгармонических резонансов порядков $\omega/2$ для систем (1) и (4 а) совпадают. В то время как наблюдается незначительное расширения частотного диапазона субгармонических колебаний на частоте $\omega/3$ для случая бигармонического возмущения.

Таким образом, можно сделать заключение, что для некоторых участков характеристики амплитудно-частотных зависимостей могут быть получены, с достаточной точностью, при изучении систем с более простой структурой внешнего возмущения.

Наличие двух гармоник внешнего возмущения приводит к изменениям в структуре проявляющихся периодических режимов. Эти изменения в основном затрагивают частотный диапазон до первого резонанса, и выражаются, прежде всего, в изменении порядков проявляющихся субультрагармонических тонов.

В промежутке между первым и вторым частотными диапазонами системы (1) ярко проявляются резонансные колебания порядка $(\mu + 1)\omega/\mu$. Заметим, что в данном диапазоне колебания на частоте ω становятся неустойчивыми, и возникает пара субгармонических режимов на частоте ω/μ (резонансный и нерезонансный). Амплитуда колебаний на гармонике $(\mu + 1)\omega/\mu$ быстро возрастает, и в дальнейшем даже превышает амплитуду колебаний на частоте ω .

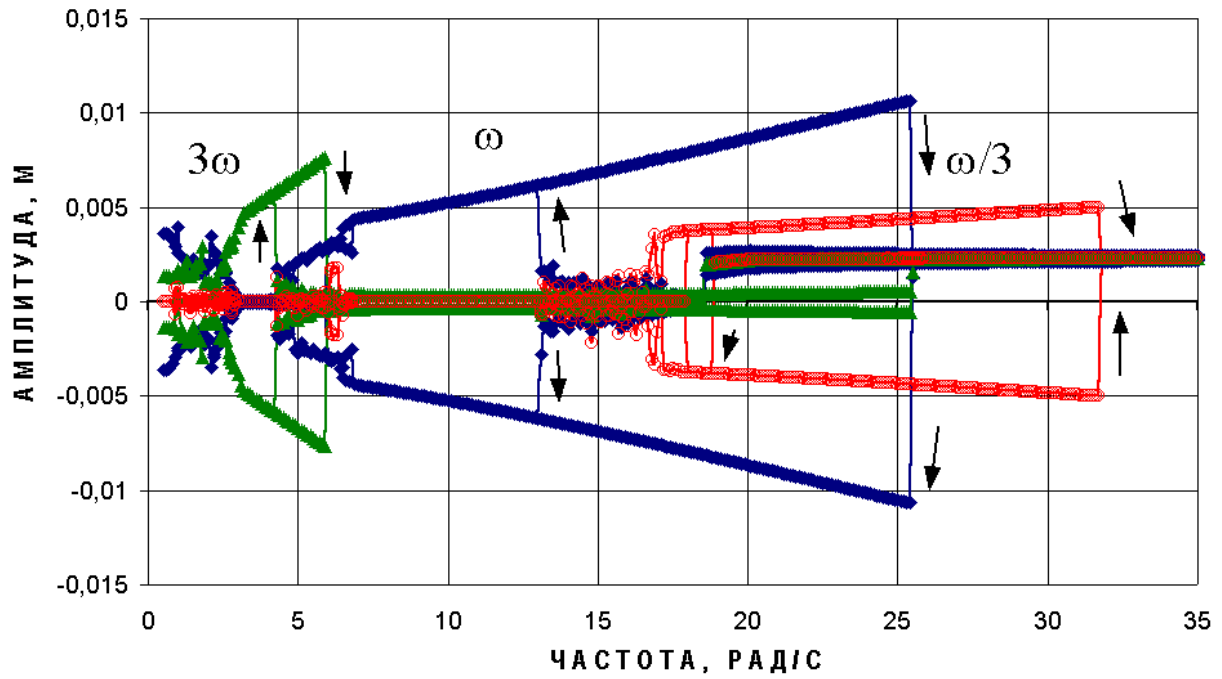


Рис. 1. Амплитудно-частотная характеристика симметричной системы с двумя потенциальными ямами:
 $\mu = 3$; $\varepsilon = 0,5 \text{ с}^{-1}$; $\alpha = 40,8 \text{ с}^2$; $\beta = 7660000 \text{ м}^2\text{с}^{-2}$; $F_1 = 0,15 \text{ мс}^{-2}$; $F_2 = 0,075 \text{ мс}^{-2}$

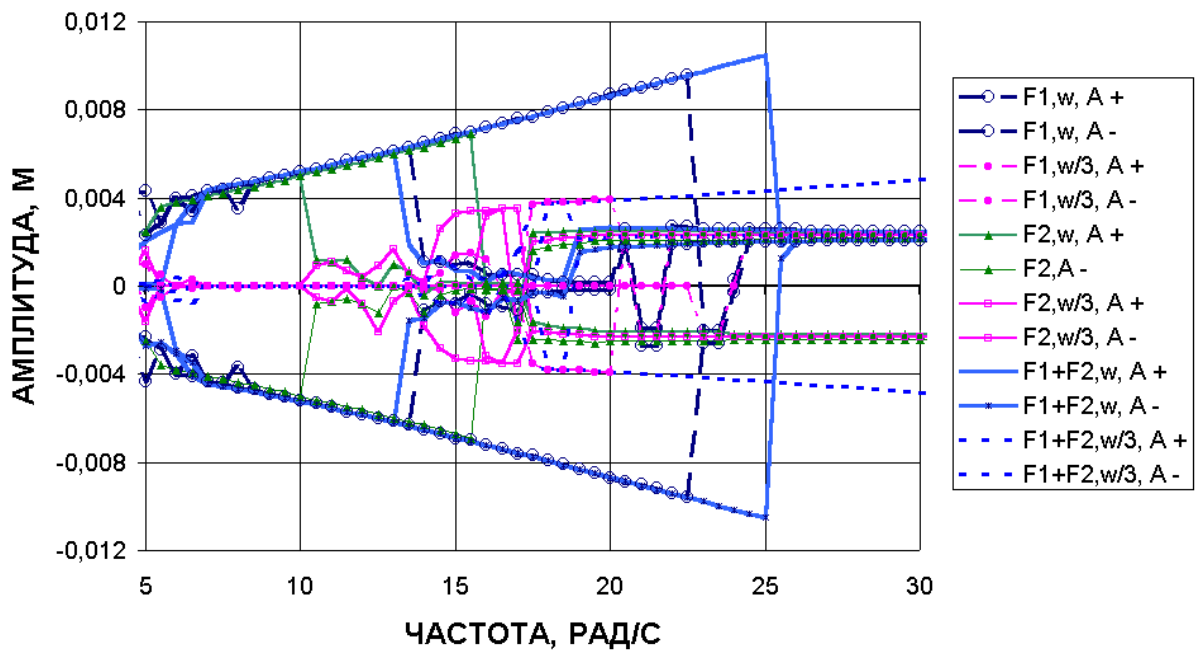


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики симметричной системы с двумя потенциальными ямами при различных видах внешнего возмущения:
 $\mu = 3$; $\varepsilon = 0,5 \text{ с}^{-1}$; $\alpha = 40,8 \text{ с}^2$; $\beta = 7660000 \text{ м}^2\text{с}^{-2}$; $F_1 = 0,15 \text{ мс}^{-2}$; $F_2 = 0,075 \text{ мс}^{-2}$. Диапазон основного резонанса

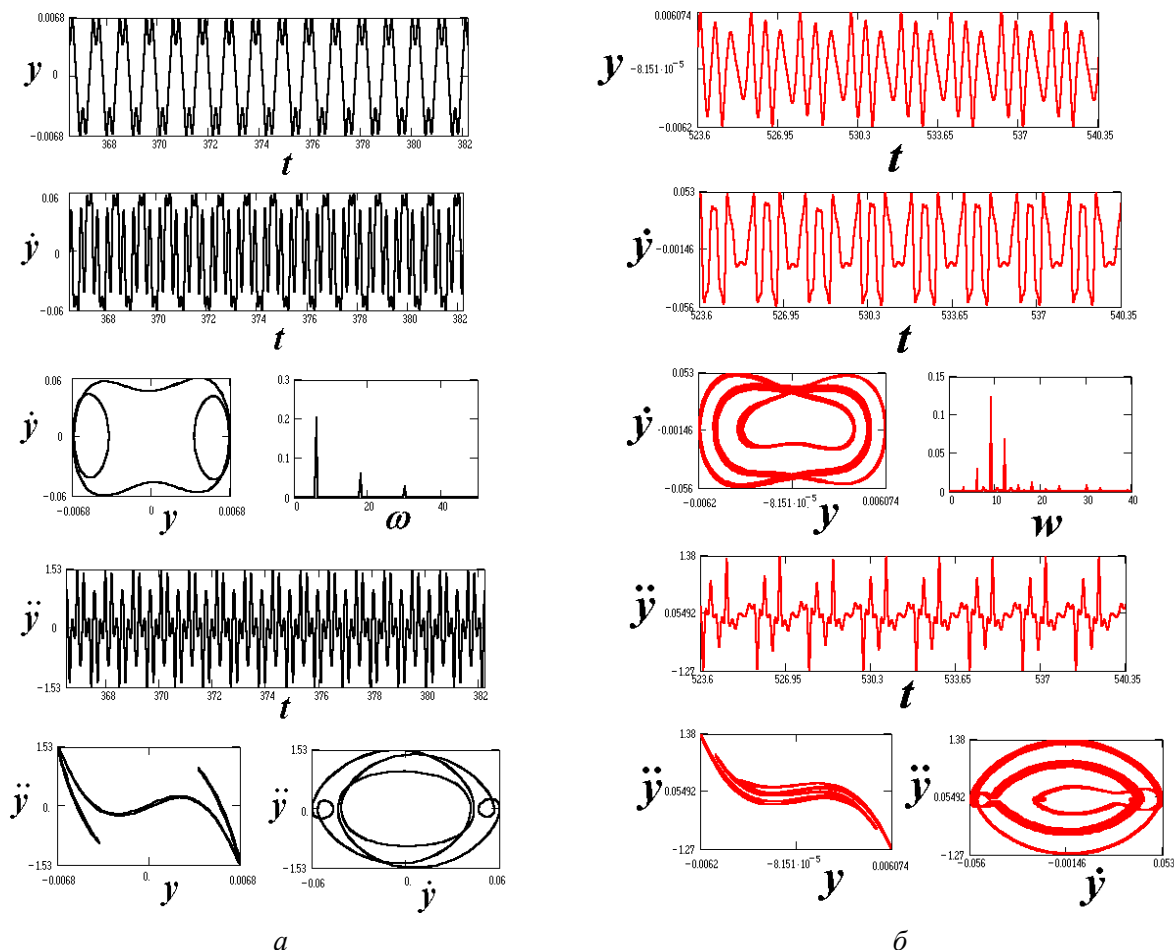


Рис. 3. Временные процессы, спектральные характеристики и фазовые траектории симметричной системы с двумя потенциальными ямами. Диапазон II:
a – моногармоническое возмущение; *б* – бигармоническое возмущение

Обнаружено, что некоторые субгармонические режимы, например, порядков $(2\mu + 1)\omega/\mu$ и $(3\mu + 1)\omega/\mu$ проявляются не в одном, а в двух частотных диапазонах. При этом наблюдаются многократные бифуркации колебаний на частоте ω и ω/μ , связанные с удвоением периода колебаний (две зоны хаоса для колебаний по первой и второй гармоникам – переходы «малые» колебания – «большие», и наоборот). Амплитуды колебаний на частотах $(2\mu + 1)\omega/\mu$ и $(3\mu + 1)\omega/\mu$ быстро возрастают (убывают) с изменением частоты внешнего возмущения. Вследствие большой крутизны соответствующих участков амплитудно-частотных характеристик, исследование данных режимов численными методами затруднено. Наличие изолированных (расщепленных) частотных диапазонов, проявление некоторых дополнительных суб- ультра- гармонических режимов, являются следствием того, что частота собственных колебаний существенно нелинейных систем зависит от параметров

сравнительно большого числа входящих в решение гармоник.

Устойчивые ветви амплитудно-частотной характеристики системы (1) формируют пять диапазонов частот, для которых получены временные процессы, спектральные характеристики и фазовые траектории на плоскостях (y, \dot{y}) , (y, \ddot{y}) и (\dot{y}, \ddot{y}) . Переход от одного режима вынужденных колебаний к другому сопровождается не только переходом от «больших» колебаний к «малым», или наоборот, но также и появлением колебаний на комбинационных тонах.

Диапазон I ($\omega = 0 \div 3$ рад/с) является областью наложения «малых» ультрагармонических колебаний порядка $n\omega$ ($n = 2, 3, 4, 5 \dots$) на «большие» колебания основного тона как при увеличении, так и при уменьшении основной частоты возмущения.

Диапазон II ($\omega = 3 \div 7$ рад/с) – область биений «больших» ультрагармонических колебаний порядка μ и «больших» колебаний основного тона (рис. 4, б).

Диапазон III ($\omega = 7 \div 26$ рад/с) характеризуется установлением резонансных «больших» колебаний основного тона при увеличении частот возмущения, и комбинационных ультра- и субгармонических колебаний порядков 2ω , 3ω и $\omega/2$ соответственно при уменьшении частоты внешнего возмущения. Необходимо отметить, что колебания на четных гармониках не устойчивы, так как система симметрична. В данном диапазоне частот возможно возникновение хаотических колебаний (рис. 4, б).

Диапазон IV ($\omega = 26 \div 32$ рад/с) – область «больших» субгармонических колебаний по-

рядка $\omega/3$ как при увеличении, так и при уменьшении частоты возмущения.

Диапазон V ($\omega > 32$ рад/с) – является зарезонансной областью, где реализуются только «малые» колебания относительно одного из несмежных положений равновесия. В этом диапазоне возможны скачкообразные переходы от колебаний относительно одного положения равновесия к другому.

На рис. 3, а и 4, а представлены временные процессы, спектральные характеристики и соответствующие фазовые траектории для системы (4 а) для тех же частот низшей гармоники.

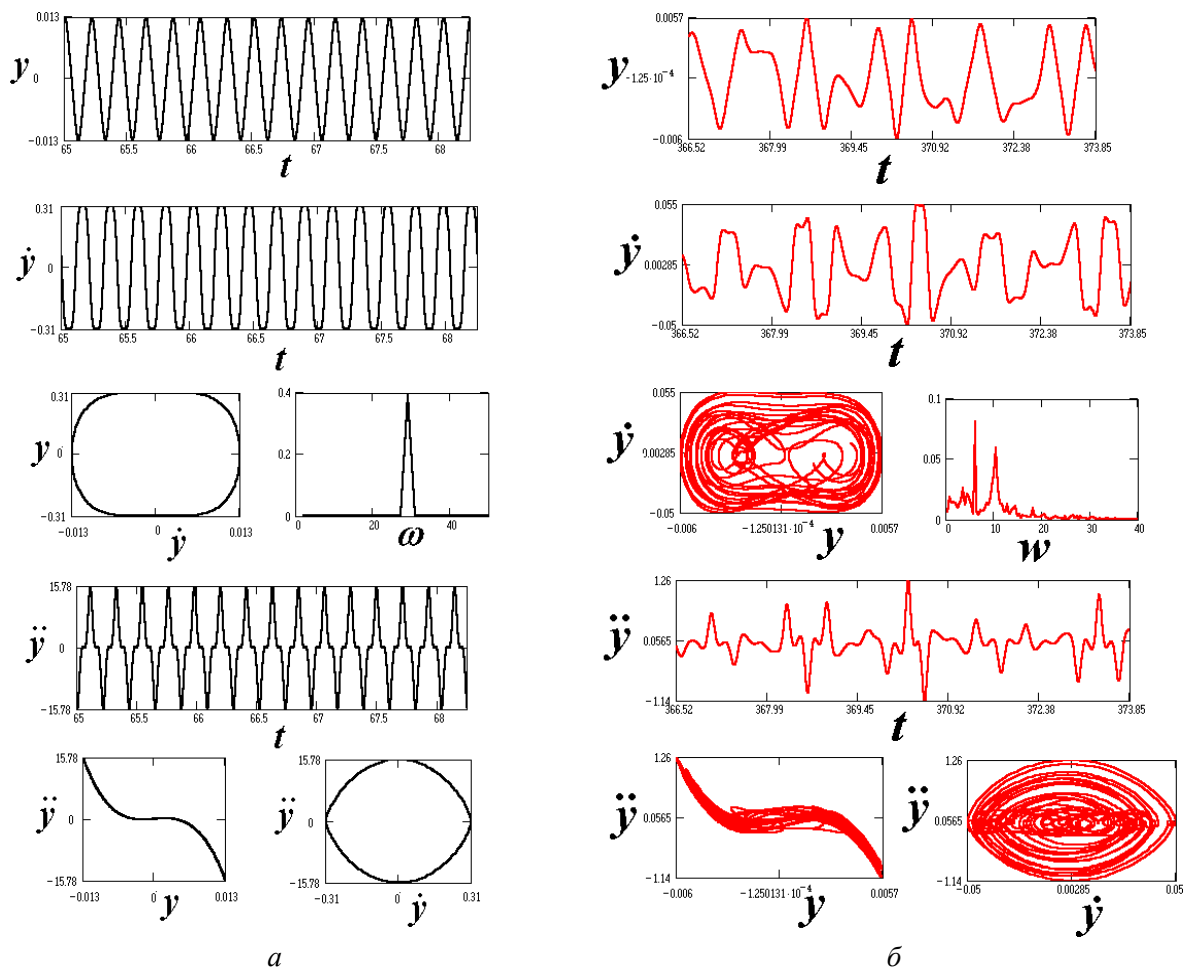


Рис. 4. Временные процессы, спектральные характеристики и фазовые траектории симметричной системы с двумя потенциальными ямами. Диапазон III: а – моногармоническое возмущение; б – бигармоническое возмущение

С изменением частоты внешнего возмущения спектральный состав решения может кардинально меняться, что следует из анализа представленных амплитудно-частотных характеристик и спектральных характеристик отдельных временных процессов. Бигармоническое внешнее возмущение способ-

ствует таким изменениям спектрального состава. Варьируя законом изменения внешнего возмущения, можно получить либо расширения требуемых частотных диапазонов, либо исчезновение нежелательных. Это создает основу для проектирования элементов конструкций, рабочие динамические режимы которых выбираются изначально.

4. Заключение

Анализ полученных результатов позволяет утверждать, что системы с нелинейными упругими характеристиками весьма чувствительны к закону изменения внешнего возмущения. Поэтому широко применяемые при исследовании реальных механических систем допущения, о моногармоническом законе изменения внешнего возмущения, не всегда являются корректными. Так, сравнительно небольшие отклонения формы внешнего возмущения от моногармонического, не оказывают значительного влияния в широких диапазонах частот (резонансы на частотах ω и $\omega/3$), но могут привести к качественным изменениям в прочих диапазонах.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Андронов А. А., Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. Качественная теория динамических систем второго порядка – М.: Главное издательство. Государственное издательство физико-математической литературы, 1966. – 568 с.
2. Казакевич М. И., Волкова В. Е. Динамика систем с двумя потенциальными ямами. – Д.: Арт-Пресс, 2000. – 160 с.
3. Казакевич М. И., Волкова В. Е. Фазовые траектории нелинейных динамических систем. Атлас. – Д.: Наука и образование, 2002. – 94 с.
4. Вибрации в технике: Справочник. В 6 т. Т. 2. – М.: Машиностроение, 1979. – 315 с.
5. Бондарь Н. Г. Устойчивость и колебания упругих систем в современной технике(конструкции с прощелкиванием). – К.: Вища шк., 1987. – 200 с.

Поступила в редколлегию 12.02.04.