УДК 62–50

Н. І. ПОСЛАЙКО (ДІІТ)

ОБЧИСЛЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ЧИСЛА ОБСЛУГОВУЮЧИХ ПРИЛАДІВ У СИСТЕМАХ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ, НЕОДНОРІДНИХ ЗА ЧАСОМ

У статті запропонована методика розрахунку оптимального числа обслуговуючих приладів у системі масового обслуговування типу $\mathrm{M}|\mathrm{M}|\mathrm{n}$ з чергою, до якої надходить нестаціонарний, неординарний пуассонівський потік заявок і інтенсивність обслуговування заявок є функцією часу, на підставі використання чисельних методів.

В статье предложена методика расчета оптимального числа обслуживающих устройств в системе массового обслуживания типа $\mathrm{M}|\mathrm{M}|\mathrm{n}$ с очередью, в которую поступает нестационарный, неординарный пуассоновский поток заявок и интенсивность обслуживания заявок является функцией времени, на основании использования численных методов.

The paper concerns a queuing-type mass service system, being disturbed by a non-stationary, non-ordinary Poisson flow of requests, when the intensity of serving is a function on time. On the basis of numerical methods, a technique of calculating the optimal number of serving devices has been offered.

Для більшості реальних систем масового обслуговування, в тому числі на транспорті, спостерігається залежність параметрів надходження й обслуговування заявок від часу. Наприклад, інтенсивності потоків пасажирів, вантажів, заявок на ремонтні роботи змінюються протягом доби залежно від сезону і т. ін. Такі системи практично неможливо розрахувати аналітичними методами. Дещо вдається зробити, якщо вхідний потік має інтенсивність, що періодично змінюється. Так, для системи масового обслуговування з відмовами доведено [1], що граничні ймовірності станів системи в цьому випадку є періодичними функціями часу, причому їх період співпадає з періодом вхідного потоку. Системи обслуговування з чергою, що однорідні за часом, у випадку відсутності післядії або «слабкої» післядії добре досліджені [2]. Методи теорії марковських процесів дають досить прості аналітичні умови існування стаціонарного режиму в таких системах. При порушенні цих умов зі зростанням часу довжина черги у вказаних системах наближається до нескінченності за ймовірністю. Використовуючи ці умови, можна вказати мінімальну кількість приладів, при якій стаціонарний режим у системі існує. Будемо називати цю кількість приладів оптимальною.

У цій роботі пропонується методика обчислення оптимального числа обслуговуючих приладів у системах масового обслуговування певного виду на підставі використання чисельних методів.

Розглядається система масового обслуговування, що складається з $m\left(1 \le m < \infty\right)$ приладів. До неї надходить неоднорідний за часом неординарний пуассонівський потік заявок. З цього випливає, якщо ν_t – число заявок, що надійшли в систему на $(0;t)$, то ν_t – процес з незалежними приростами. Припустимо, що при $\Delta \downarrow 0$

$$P\left\{\nu_{t+\Delta} - \nu_t = k\right\} = \lambda_k(t)\Delta + o(\Delta), \quad k \ge 1, \quad (1)$$

де функції $\lambda_k(t)$ вимірні (за Лебегом) і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(t) = \lambda(t) < \infty$$

збігається майже всюди на $(0;\infty)$; $\lambda_k(t)$ – інтенсивність надходження в систему групи з k заявок у момент часу t. З (1) випливає, що

$$M\theta^{\nu_t} = \sum_{k=0}^{\infty} P\left\{\nu_t = k\right\}\theta^k = \\ = \exp\left\{\int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(u)\left(\theta^k - 1\right)du\right\}$$

або в більш загальному випадку

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k P\left\{\nu_s - \nu_t = k\right\} = \\ = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\theta^k - 1\right)\int_t^{\rho} \lambda_k(u)\,du\right\}, \quad |\theta| \le 1. \quad (2)$$

Покладемо

$$r_k(t,s) = p\{\nu_s - \nu_t = k\}, \quad k \ge 0 .$$

Згідно з (2)

$$r_0(t,s) = \exp\left\{-\int_t^s \lambda(u)\,du\right\},$$

$$r_m(t,s) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\theta|=1} \frac{1}{\theta^{m+1}} \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\theta^k - 1\right)\int_t^s \lambda_k(u)\,du\right\} d\theta$$

$$m > 0 .$$

Якщо в момент надходження групи з r заявок l приладів вільні, то:

- кожна заявка займає вільний прилад і негайно починає обслуговуватись, якщо $l \ge r$;
- l заявок (без різниці які) займають кожна вільний прилад, а інші стають в чергу, якщо $l < r\ (r \ge 1, 0 \le l \le m)$.

Будемо вважати, що час обслуговування заявок на кожному приладі не залежить від часу обслуговування інших заявок і від характеру їх надходження, а також, що функція розподілу тривалості обслуговування повністю визначається моментом початку обслуговування. Тобто, якщо заявка почала обслуговуватись в момент t і $s > t$, то ймовірність того, що до моменту s обслуговування буде закінчено, дорівнює

$$1 - \exp\left\{-\int_t^s \mu(u)\,du\right\},$$

де $\mu(u) \ge 0$ вимірна функція на $(0;\infty)$. Це очевидно рівносильне тому, що, якщо заявка займає прилад у момент t і $\Delta \to 0$, то ймовірність того, що вона буде займати прилад у момент $t + \Delta$ (звільнить його до цього моменту) дорівнює

$$1 - \mu(t)\Delta + o(\Delta) \quad \left(\mu(t)\Delta + o(\Delta)\right),$$

де $\lim\limits_{\Delta\to 0} \frac{o(\Delta)}{\Delta} = 0$.

Величину черги і час дожидання кожною заявкою початку обслуговування будемо вважати необмеженими. Обслужені заявки негайно покидають систему. Описану систему обслуговування будемо називати системою $M_t|M_t|m$. В тому випадку, коли

$$\lambda_k(u) = \lambda_k \ (k \ge 1), \quad \mu(u) = \mu \quad (0 \le u < \infty),$$

тобто, якщо «інфінітезимальні» характеристики системи не залежать від часу, ця система переходить (за термінологією Д. Кендалла [3]) в добре вивчену систему $M|M|m$. Оптимальна кількість приладів в такій системі визначається з умови

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\lambda_k < n\mu .$$

Доведено, що за цієї умови функція розподілу періоду зайнятості системи (інтервалу часу, що починається в момент надходження у вільну систему заявок і закінчується в найближчий момент звільнення системи від заявок) є властивою – з ймовірністю 1 період зайнятості є скінченною величиною. У разі $\sum_{k=1}^{\infty} k\lambda_k > n\mu$ функція розподілу є невластивою, тобто з додатною ймовірністю інтервал зайнятості може бути нескінченним. А коли $\sum_{k=1}^{\infty} k\lambda_k = n\mu$, математичне сподівання періоду зайнятості є нескінченним.

Для системи $M_t|M_t|m$ розглянемо $\tau_{ij}(t)$ – час, за який процес ξ_t , що співпадає з числом заявок у системі в момент t , вперше досягне стану j :

$$\tau_{ij}(t) = \inf\{u : \xi_u = j, \xi_t = i\} \quad u \ge t$$

і нехай

$$D = \{0,1,2,\ldots,m-1\} .$$

Періодом зайнятості (з початком в стані к) в системі обслуговування $M_t|M_t|m$ будемо називати величину $\tau_{k,m-1}(t)$, де $k \ge m$. Нехай $q_{kr}(t,s)$ – ймовірність того, що процес ξ_t на відрізку $[t;s]$ перейде зі стану k у стан r $(k, r \,\overline{\in}\, D)$ без попадання в множину D :

$$q_{kr}(t,s) = P\{\xi_s = r, \xi_u \,\overline{\in}\, D, u \in (t,s] / \xi_t = k\} .$$

Доведено [4], що

$$p\{\tau_{k,m-1}(t) \le s - t\} = m\int_t^s q_{km}(t,\upsilon)\mu(\upsilon)\,d\upsilon , \quad (3)$$

де $q_{kr}(t,s)$ задовольняє інтегральне рівняння Вольтерра другого роду:

$$q_{km}(t,s)=\rho_{m-k}(t,s)-$$

$$-m\int_t^s q_{km}(t,\upsilon)\mu(\upsilon)\rho_1(\upsilon,s)d\upsilon. \quad (4)$$

Тут $\rho_k(t,s)$ – ймовірності станів цілочисельного процесу η_t з незалежними приростами, для якого

$$M\theta^{\eta_s-\eta_t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\rho_k(t,s)\theta^k=\exp\left\{\int_t^s a(u,\theta)du\right\},$$

звідки [5]

$$\rho_k(t,s)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\theta|=1}\frac{1}{\theta^{k+1}}\exp\left\{\int_t^s a(u,\theta)du\right\}d\theta, \quad (5)$$

$$k=0,\pm1,\pm2,\ldots,$$

де

$$a(s,\theta)=\sum_{l=1}^{\infty}\lambda_l(s)\theta^l+\frac{m\mu(s)}{\theta}-\lambda(s)-m\mu(s).$$

Вираз (3) задає функцію розподілу ймовірностей періоду зайнятості в системі $M_t|M_t|m$. Якщо при $s\to\infty$, $p\{\tau_{k,m-1}(t)\le s-t\}\to p^*$, де $p^*<1$, то стаціонарний режим у системі не існує.

Знайдемо найменше m, для якого

$$\lim_{s\to\infty}P\{\tau_{k,m-1}(t)\le s-t\}=1.$$

Для цього задамо ε (мале додатне число) і з точністю до ε будемо обчислювати розподіл (3), починаючи з $m=1$. При фіксованому m інтеграл у правій частині (3) можна обчислювати, наприклад, за формулою прямокутників

$$F_k(t,s)=P\{\tau_{k,m-1}(t)\le s-t\}\approx$$

$$\approx m\cdot h\sum_{k=0}^{n-1}q_k(t,\upsilon_k)\mu(\upsilon_k),$$

де $t=\upsilon_0<\upsilon_1<\ldots<\upsilon_n=s$, $\upsilon_k=t+kh$, $h=\dfrac{s-t}{n}$, починаючи з $s=t$, збільшуючи значення s з кроком h_1 до тих пір, поки значення $F_k(t,s_i)$ та $F_k(t,s_{i+1})$ не будуть відрізнятись за абсолютною величиною не більше, ніж на ε_1 $(s_i=t+ih_1, i\ge1)$.

Для обчислення функції $q_k(t,\upsilon)$, що стоїть під знаком інтегралу в (3) і є розв'язком інтегрального рівняння Вольтерра другого роду (4), можна застосувати метод скінченних сум $[6]$

$$q_{km}(t,u_j)=\rho_{m-k}(t,u_j)-mh_2\sum_{k=0}^{j-1}q_{km}(t,u_k)\mu(u_k),$$

де $u_j=t+j\cdot h_2$, $h_2=\dfrac{s-t}{N}$, $j=0,1,\ldots,N$, $u_N=s$.

Для обчислення ймовірностей $\rho_k(t,s)$ (5) при великому κ застосування формул наближеного обчислення визначених інтегралів типу прямокутників, трапецій, Симпсона неможливе, оскільки підінтегральна функція в (5), як можна показати, звівши криволінійний інтеграл до визначеного (доведення наведемо нижче), швидко осцилює. Для цього випадку є доцільним застосування методу Філона $[7]$, що призначений якраз для обчислення інтегралів від функцій, які швидко осцилюють.

Розрахункові формули цього методу мають вигляд

$$\int_a^b f(p)\cos xpdp\approx H\{\alpha[f(b)\sin xb-$$

$$-f(a)\sin xa]+\beta C_{2s}+\gamma C_{25-1}\},$$

де C_{2s} означає суму всіх парних ординат кривої $y=f(p)\cos xp$, що знаходяться між a та b, за виключенням першої та останньої ординати; C_{2s-1} – сума всіх непарних ординат, а величини α, β, γ, що є функціями від $\theta=xH$ (H – інтервал поділу; $[a;b]$ ділиться на $2n$ рівних частин) визначаються виразами:

$$\theta^3\alpha=\theta^2+\theta\sin\theta\cos\theta-2\sin^2\theta,$$

$$\theta^3\beta=2\left[\theta\left(1+\cos^2\theta\right)-2\sin\theta\cos\theta\right],$$

$$\theta^3\gamma=4[\sin\theta-\theta\cos\theta].$$

Для інтегралу, що містить $\sin xp$:

$$\int_a^b f(x)\sin xpdp\approx H\{-\alpha[f(b)\cos xb-$$

$$-f(a)\cos xa]+\beta S_{2s}+\gamma S_{2s-1}\},$$

де S_{2s} – сума всіх парних ординат кривої $y=f(p)\sin xp$, що знаходяться між a та b, за виключенням половини першої та останньої ординати, S_{2s-1} – сума всіх непарних ординат, а величини α, β, γ мають попередній смисл.

Вираз для $\rho_k(t,s)$ через визначений інтеграл можна знайти, використовуючи заміну $\theta = e^{i\varphi}$ враховуючи, що $\operatorname{Im}\rho_k(t,s) = 0$, та представляючи $e^{i\varphi}$ як $\cos\varphi + i\sin\varphi$.

Після ряду перетворень (з огляду на їх громіздкість вони опущені), одержимо вираз

$$\rho_k(t,s) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{A(t,s,\varphi)} \cos B(t,s,\varphi) \cdot \cos k\varphi d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{A(t,s,\varphi)} \sin B(t,s,\varphi) \sin k\varphi du, \quad (6)$$

де

$$A(t,s,\varphi) = \int_t^s \left(\sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l(u) \cos l\varphi + \right.$$

$$\left. + m\mu(u)\cos\varphi - \lambda(u) - m\mu(u) \right) du,$$

$$B(t,s,\varphi) = \int_t^s \left(\sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l(u) \sin e\varphi - m\mu(u) \sin\varphi \right) du.$$

У правій частині (6) маємо при великому κ суму двох інтегралів від функцій, що швидко осцилюють, і які можна наближено обчислити за методом Філона. При малих κ розрахункові формули цього методу переходять в формулу Симпсона.

Результати статті можуть бути використані для розрахунку оптимального числа обслуговуючих приладів в реальних системах обслуговування вказаного вище типу та на стадії їх проектування.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Гнеденко Б. В. О задачах теории массового обслуживания. Теория массового обслуживания // Тр. Всесоюзного совещания школы по теории массового обслуживания. Дилижан 1970. Изд-во МГУ. 1972.
2. Абольников Л. М. Переходной режим в системе $M|M|n$ с неординарным входящим потоком // Известия АН СССР: Техническая кибернетика. 1970. № 5.
3. Кендалл Д. Стохастические процессы, встречающиеся в теории очередей, и их анализ методом вложенных цепей Маркова // Математика. 1959. № 3 : 6.

Надійшла до редколегії 29.09.03.