УДК 656.224.027

А. А. БОСОВ (ДИИТ), Б. П. ПИХ (Львовская ж. д.)

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВАРИАНТОВ СОКРАЩЕНИЯ ВРЕМЕНИ ХОДА

Скорочення часу руху поїзда за рахунок заходів реконструкції колії та інших транспортних засобів розглядається як задачі векторної оптимізації. Запропонована методика оцінки залежності витрат ресурсів від часу скорочення руху поїзда.

Сокращение времени хода поезда за счет мероприятий реконструкции пути и других транспортных средств рассматривается как задачи векторной оптимизации. Предложена методика оценки зависимости затрат средств от времени сокращения движения поезда.

Reduction of the running time of train on account of reconstruction of the track and the vehicles is considered as a problem of vector optimization. A technique of estimation of expenditures dependence on the saved running time of train has been proposed.

В работе [1] рассмотрена задача сокращения времени доставки за счет использования различных вариантов организации доставки грузов.

В основу данной задачи был положен метод фаз и указаны условия, когда внутренние резервы не позволяют дальнейшее сокращение времени доставки без реконструкции пути.

Используя методику работы [1], рассмотрим задачу реконструкции пути, которую будем оценивать в первом приближении двумя показателями:

– затраты капитальных вложений в реконструкцию пути и другие устройства;

– сокращение времени доставки.

Рассматриваемое направление разобьем на элементы (станции и перегоны), на которых возможны определенные мероприятия по реконструкции, каждое из которых оцениваем капитальными затратами и временем сокращения времени хода поезда на данном элементе.

Чтобы придать данной задаче количественную форму, введем обозначения: $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\ldots\omega_n\}$ – множество элементов направления, в порядке их следования; $\Theta_i=\{\Theta_{i1},\Theta_{i2},\ldots\Theta_{ik_i}\}$ – множество мероприятий на элементе ω_i, где Θ_{ij} – j-тое мероприятие на элементе ω_i; $Z(\Theta_{ij})$ – затраты средств при реализации мероприятия Θ_{ij}; $\Delta t(\Theta_{ij})$ – сокращение времени хода на элементе ω_i при реализации мероприятия Θ_{ij}.

Рассмотрим некоторый вариант реконструкции

$$\gamma=\{\Theta_{1j_1},\Theta_{2j_2},\ldots\Theta_{nj_n}\},$$

где $\Theta_{ij_i}\in\Theta_i$ и представляет некоторое мероприятие на элементе ω_i.

Затраты средств, соответствующие варианту γ, будут вычисляться по формуле

$$Z(\gamma)=\sum Z(\Theta_{ij_i}), \quad (1)$$

$$\Theta_{ij_i}\in\gamma,$$

а сокращение времени хода поезда определяться по формуле

$$\Delta t(\gamma)=\sum\Delta t(\Theta_{ij_i}), \quad (2)$$

$$\Theta_{ij_i}\in\gamma.$$

Обозначим через Γ набор всевозможных вариантов из рассматриваемых мероприятий. Число вариантов множества Γ определится по формуле

$$|\Gamma|=\prod_{i=1}^{п}K_i.$$

Так, например, если число элементов $п=50$, а на каждом элементе может быть реализовано 4 мероприятия, то

$$|\Gamma|=1,268\cdot10^{30}.$$

Таким образом, множество Γ достаточно «богато» вариантами γ. Желательно найти такой вариант $\gamma_*\in\Gamma$, чтобы затраты были как можно меньшими, а время сокращения хода поезда было бы как можно больше.

Очевидно, что сформулированные пожелания носят противоречивый характер. Математической формой данных пожеланий служит задача векторной оптимизации [2], которую запишем в виде

$$\begin{pmatrix} Z(\gamma) \\ -\Delta t(\gamma) \end{pmatrix} \to \min \tag{3}$$

при условии

$$\gamma \in \Gamma. \tag{4}$$

Остановимся на понятии решения задачи (3)–(4).

Определение 1. Вариант реконструкции γ_* будем называть эффективным, если любое отклонение от него приводит к ухудшению хотя бы одного из показателей, т. е. к увеличению затрат на реконструкцию или уменьшению сокращения времени хода поезда.

Определение 2. Под решением задачи (3)–(4) будем понимать некоторый набор вариантов $\Gamma_* \in \Gamma$, такой, что любой вариант из Γ_* является эффективным.

Отметим основное свойство вариантов из множества Γ_*, которое заключается в том, что какие бы два варианта мы не взяли из Γ_*, то они между собой несравнимы. Пусть γ_1 и γ_2 из Γ_*, тогда, если

$$Z(\gamma_1) > Z(\gamma_2),$$

то обязательно имеет место

$$-\Delta t(\gamma_1) < -\Delta t(\gamma_2)$$

или

$$\Delta t(\gamma_1) > \Delta t(\gamma_2).$$

В силу конечности множества Γ существование множества Γ_* не вызывает сомнения. Однако построение (определение) множества Γ_* вызывает определенные затруднения, так как непосредственный перебор вариантов из Γ является практически нереализуемой процедурой.

Действительно, если для анализа одного варианта из Γ потребуется 10^{-6} с, то общее время составит порядка $4 \cdot 10^{16}$ лет, что сравнимо с существованием жизни на Земле. Вот в этом и заключается принципиальная трудность решения дискретных задач оптимизации непосредственным перебором.

Учитывая сделанное замечание, перейдем от задачи (3)–(4) к задаче на условный экстремум:

$$Z(\gamma) \to \min \tag{4}$$

при условии

$$\Delta t(\gamma) \geq \tau, \quad \gamma \in \Gamma, \tag{5}$$

где величина τ задается и может быть из некоторого интервала $\left[\underline{\tau}, \bar{\tau}\right]$.

Очевидно, что в качестве $\underline{\tau}$ можно взять ноль, а набор мероприятий, соответствующий решению задачи (4)–(5), при $\tau = 0$ можно толковать как порядок (технологию) движения поездов при существующем состоянии транспортных средств (пути, подвижного состава и т. д.).

Относительно величины $\bar{\tau}$ можно указать, что это желаемая величина сокращения времени хода в плане конкурентной способности железнодорожного транспорта по сравнению с другими видами транспорта.

С другой стороны задача (4)–(5) позволяет оценить максимальное значение $\bar{\tau}$ при достижении определенного уровня в развитии транспортных средств или каким должен быть уровень транспортных средств для реализации желаемого сокращения не только времени хода, но и времени доставки.

При решении задач на условный экстремум используется метод неопределенных коэффициентов Лагранжа, состоящий в том, что вводится функция Лагранжа

$$L(\gamma, \mu) = Z(\gamma) - \mu \Delta t(\gamma),$$

и решается задача

$$L(\gamma, \mu) \to \min \tag{6}$$

при $\gamma \in \Gamma$.

Очевидно, что если γ_* доставляет минимум функции Лагранжа, то γ_* зависит от множителя Лагранжа μ, что будем отмечать записью $\gamma_*(\mu)$. Неопределенный множитель Лагранжа μ определяется из неравенства

$$\Delta t\left[\gamma_*(\mu)\right] \geq \tau.$$

Таков традиционный алгоритм решения задач на условный экстремум [3].

В силу соотношений (1) и (2) функцию Лагранжа можно записать в виде

$$L(\gamma, \mu) = \sum \left[Z\left(\Theta_{ij_i}\right) - \mu \Delta t\left(\Theta_{ij_i}\right) \right], \tag{7}$$

$$\Theta_{ij_i} \in \gamma,$$

что позволяет утверждать об оптимальности любой части варианта $\gamma_*(\mu)$.

Геометрическая интерпретация $\gamma_*(\mu)$ представлена на рис. 1.

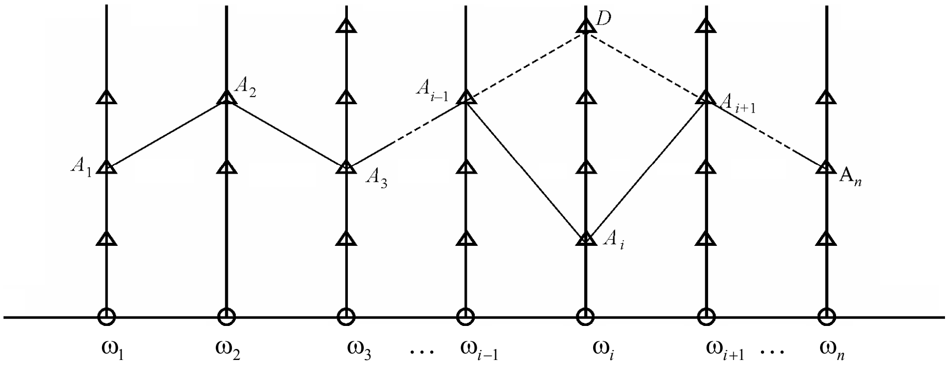

Рис. 1. Геометрическая интерпретация варианта $\gamma_*(\mu)$

Сплошной ломаной линией представлен вариант $\gamma_*(\mu)$, который доставляет минимум функции Лагранжа. Символом Δ на вертикальных линиях условно показаны мероприятия на том или ином элементе.

Ломаная линия, соответствующая варианту $\gamma_*(\mu)$, проходит через точки $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n$ и этому варианту соответствует значение функции Лагранжа, которое обозначим через $\Delta A_1, \ldots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n$.

Значение функции Лагранжа между A_{i-1}, A_i, A_{i+1} обозначим через $L_{A_{i-1}A_iA_{i+1}}$, а значение функции Лагранжа на $A_{i-1}DA_{i+1}$ обозначим через $L_{A_{i-1}DA_{i+1}}$, тогда утверждается, что

$$L_{A_{i-1}A_iA_{i+1}} \le L_{A_{i-1}DA_{i+1}}.$$

Предположим, что это не так. Тогда вариант $A_1, \ldots, A_{i-1}, D, A_{i+1}, \ldots, A_n$ позволяет получить меньшее значение функции Лагранжа в силу (7), что противоречит оптимальности варианта $\gamma_*(\mu)$.

Из этого простейшего анализа следует, что при построении $\gamma_*(\mu)$ необходимо для каждого элемента ω_i найти такое мероприятие $\Theta_{ij_*(i)}^{(\mu)}$, которое минимизировало бы

$$Z\left(\Theta_{ij_i}\right) - \mu\Delta t\left(\Theta_{ij_{(i)}}\right),$$

тогда вариант $\gamma_*(\mu)$ будет состоять из мероприятий

$$\Theta_{ij_*(i)}^{(\mu)},\ i = \overline{1, n}.$$

Чтобы упростить обозначения обозначим через $\Theta_i^*(\mu)$ мероприятие из перечня Θ_i, которое определяется соотношением

$$Z\left[\Theta_i^*(\mu)\right] - \mu\Delta t\left[\Theta_i^*(\mu)\right] = \\ = \min_{\Theta_{ij}\in\Theta_i}\left[Z\left(\Theta_{ij}\right) - \mu\Delta t\left(\Theta_{ij}\right)\right]. \quad (8)$$

Пример 1. Данный пример носит демонстрационный характер и ради обозримости множества Ω состоит из трех элементов:

– две станции (ω_1 и ω_3);

– перегон между ними ω_2.

Мероприятия посвящены повышению скорости движение.

Исходная информация приведена в табл. 1.

Таблица 1

	l_i	$\nu_1 = 100$	$\nu_2 = 120$	$\nu_3 = 140$	$\nu_4 = 160$
ω_1	2,115	–	2030	8345	–
ω_2	19,090	–	–	9165	33065
ω_3	1,957	–	3460	9500	–

Будем считать, что время движения по элементу равно

$$t_{ij} = \frac{l_i}{\upsilon_{ij}},$$

где l_i в км, а скорость υ_{ij} в км/ч.

Сформируем табл. 2, в которой отражены затраты в грн (числитель) и сокращение времени хода в с (знаменатель).

Таблица 2

ω_i / ν_i	ω_1	ω_2	ω_3
100	0	–	0
120	$\frac{2030}{12{,}69}$	0	$\frac{3460}{11{,}74}$
140	$\frac{8345}{21{,}75}$	$\frac{9165}{81{,}81}$	$\frac{9500}{20{,}13}$
160	–	$\frac{33065}{143{,}18}$	–

Всего в данном примере 27 вариантов, которые представлены в табл. 3, что отражает множество Γ.

Таблица 3

ω_i / γ_i	ω_1	ω_2	ω_3	Z	Δt
γ_1	100	120	100	0	0,00
γ_2	100	120	120	3460	11,74
γ_3	100	120	140	9500	20,13
γ_4	100	140	100	9165	81,81
γ_5	100	140	120	12625	93,55
γ_6	100	140	140	18665	104,94
γ_7	100	160	100	33065	143,18
γ_8	100	160	120	36525	154,92
γ_9	100	160	140	42565	163,31
γ_{10}	120	120	100	2030	12,69
γ_{11}	120	120	120	5490	24,43
γ_{12}	120	120	140	11530	32,82
γ_{13}	120	140	100	11195	94,50
γ_{14}	120	140	120	14655	106,24
γ_{15}	120	140	140	20695	114,63
γ_{16}	120	160	100	35095	155,87
γ_{17}	120	160	120	38555	167,61
γ_{18}	120	160	140	44595	176,00
γ_{19}	140	120	100	8345	21,75
γ_{20}	140	120	120	11805	33,49
γ_{21}	140	120	140	17845	41,88
γ_{22}	140	140	100	17510	103,56
γ_{23}	140	140	120	20970	115,30
γ_{24}	140	140	140	27010	123,69
γ_{25}	140	160	100	41410	164,93
γ_{26}	140	160	120	44870	176,67
γ_{27}	140	160	140	50910	185,06

Отобрав несравнимые варианты из табл. 3, сформируем множество Γ_*, являющееся решением данного примера и его оформим в виде табл. 4, расположив варианты γ_i^* по возрастанию затрат.

Таблица 4

γ_i^*	ω_1	ω_2	ω_3	Z	Δt
γ_1	100	120	100	0	0,00
γ_{10}	120	120	100	2030	12,69
γ_{11}	120	120	120	5490	24,43
γ_4	100	140	100	9165	81,81
γ_{15}	120	140	140	20695	114,63
γ_{23}	140	140	120	20970	115,30
γ_{24}	140	140	140	27010	123,69
γ_7	100	160	100	33065	143,18
γ_8	100	160	120	36525	154,92
γ_{17}	120	160	120	38555	167,61
γ_{18}	120	160	140	44595	176,00
γ_{26}	140	160	120	44870	176,67
γ_{27}	140	160	140	50910	185,06

Для сравнения выполним определение эффективных вариантов γ_i, используя соотношение (8). Положим $Z_{ij} = Z(\Theta_{ij})$, $\Delta t_{ij} = \Delta t_{ij}(\Theta_{ij})$ и $L_{ij} = Z_{ij} - \mu \Delta t_{ij}$. Пусть минимум L_{ij} реализуется при $j = j_*$, что соответствует мероприятию Θ_{ij_*}. Так как функция Лагранжа на варианте γ_* достигает минимального значения, то вариация этого варианта на элементе ω_i (см. рис. 1) приводит к соотношению

$$Z_{ij} - \mu \Delta t_{ij} \ge Z_{ij_*} - \mu \Delta t_{ij_*}.$$

Откуда получаем

$$Z_{ij} - Z_{ij_*} \ge \mu\left(\Delta t_{ij} - \Delta t_{ij_*}\right).$$

Так как $\mu \ge 0$, то возможны два случая:

$$\text{C1: } \Delta t_{ij} \ge \Delta t_{ij_*},$$

$$\text{C2: } \Delta t_{ij} \le \Delta t_{ij_*}.$$

При С1 имеем

$$Z_{ij} \geq Z_{ij_*},$$

$$\Delta t_{ij} \geq \Delta t_{ij_*}.$$

откуда следует, что проварьированный вариант несравним с γ_*.

В случае С2 получаем

$$\Delta t_{ij} \leq \Delta t_{ij_*},$$

$$Z_{ij} \geq Z_{ij_*},$$

что свидетельствует о предпочтении варианта γ_* по сравнению с проварьированным, а так как вариация произвольна, то вариант $\gamma_*(\mu)$ при данном μ является эффективным.

Пусть $\widetilde{\Gamma_*}$ представляет набор несравнимых вариантов при $\mu \geq 0$, тогда изложенное доказывает:

Лемма. Множество несравнимых вариантов, построенных с использованием функции Лагранжа, принадлежит множеству Γ_* – решению задачи векторной оптимизации, т. е. имеет место

$$\widetilde{\Gamma_*} \subseteq \Gamma_*.$$

Заметим, что при решении задачи (4)–(5) на условный экстремум традиционно задается величина τ. Мы же предлагаем задать множитель Лагранжа μ и перебирать по μ из области $\mu \geq 0$. И тем самым получать $\tau(\mu) = \Delta t_{ij_*}$, где j_* зависит от μ.

Казалось бы, что возникает проблема выбора шага по μ и до какого значения μ необходимо перебирать.

Однако эту трудность можно обойти, если учесть, что $L_{ij} = Z_{ij} - \mu\Delta t_{ij}$ является линейной функцией по μ. Для пояснения данного приема выполним рассмотрение L_{ij} для элемента ω_1, из примера 1.

Так как для данного элемента имеют место только три мероприятия, то при скорости $\nu = 100$ км/ч функция Лагранжа $L_{1,100} \equiv 0$, при скорости $\nu = 120$ км/ч получаем $L_{1,120} \equiv 2030 - 12{,}69\mu$, а для $\nu = 140$ км/ч имеем $L_{1,140} \equiv 8345 - 21{,}75\mu$.

На рис. 2 эти зависимости представлены в виде соответствующих прямых.

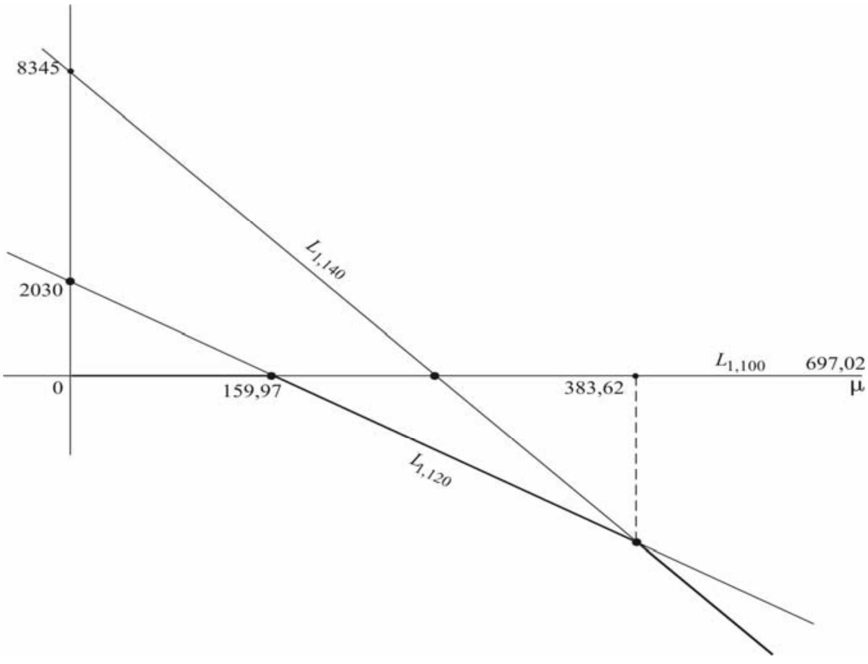

Рис. 2. Геометрический метод определения зависимости от μ

Жирной линией на рис. 2 указана зависимость функции Лагранжа от множества μ для элемента ω_1.

Так как $L_1(\mu)$ должна быть меньше или равна L_{ij}, то получаем, что при $0 \leq \mu \leq 159{,}97$ должно выбираться мероприятие, обеспечивающее движение поезда по элементу ω_1 со скоростью 100 км/ч.

Когда же $159{,}97 < \mu \leq 697{,}02$, то скорость движения поездов по элементу ω_1 должна быть 120 км/ч и при $\mu > 697{,}02$ скорость должна быть равной 140 км/ч.

Аналитическая запись данного рассмотрения представляет собой

$$\nu(\omega_1,\mu)=\begin{cases}100, & 0\le\mu\le 159{,}97,\\ 120, & 159{,}97<\mu\le 697{,}02,\\ 140, & 697{,}02<\mu.\end{cases}$$

Аналогичные рассмотрения для ω_2 и ω_3 приводят к зависимостям:

$$\nu(\omega_2,\mu)=\begin{cases}120, & 0\le\mu\le 112{,}03,\\ 140, & 112{,}03<\mu\le 389{,}44,\\ 160, & 389{,}44<\mu.\end{cases}$$

$$\nu(\omega_3,\mu)=\begin{cases}100, & 0\le\mu\le 294{,}72,\\ 120, & 294{,}72<\mu\le 719{,}90,\\ 140, & 719{,}90<\mu.\end{cases}$$

Данные зависимости позволяют строить несравнимые варианты по формуле

$$\gamma_*(\mu)=\left\{\left[\nu(\omega_1,\mu),\nu(\omega_2,\mu),\nu(\omega_3,\mu)\right]:0\le\mu\right\}$$

или в общем виде, когда элементов n штук

$$\gamma_*(\mu)=\left\{\nu(\omega_i,\mu):i=\overline{1,n}\ \ \mu\ge 0\right\}.$$

Используя аналитические представления $\nu(\omega_i,\mu)$, определяем $\gamma_*(\mu)$ и соответствующие значения затрат средств $Z(\mu)$ и время сокращения движения поезда $\Delta t(\mu)$, что и оформим в виде табл. 5.

Как следует из табл. 5, множество несравнимых вариантов, построенных с использованием функции Лагранжа, представляет собой

$$\widetilde{\Gamma_*}=\{\gamma_1,\gamma_4,\gamma_{13},\gamma_{14},\gamma_{17},\gamma_{26},\gamma_{27}\},$$

а точное решение, как следует из табл. 4, равно

$$\widetilde{\Gamma_*}=\{\gamma_1,\gamma_{10},\gamma_{11},\gamma_4,\gamma_{13},\gamma_{14},\gamma_{15}\gamma_1,$$
$$\gamma_{23},\gamma_{24},\gamma_7,\gamma_8,\gamma_{17},\gamma_{18},\gamma_{26},\gamma_{27}\}.$$

Таблица 5

μ	$\gamma_*(\mu)$	$\nu(\omega_1,\mu)$	$\nu(\omega_2,\mu)$	$\nu(\omega_3,\mu)$	$Z(\mu)$	$\Delta t(\mu)$
$0\le\mu\le 112{,}03$	γ_1	100	120	100	0	0
$112{,}03\le\mu\le 159{,}9$	γ_4	100	140	100	9165	81,81
$159{,}9\le\mu\le 294{,}72$	γ_{13}	120	140	100	11195	94,50
$294{,}72\le\mu\le 389{,}44$	γ_{14}	120	140	120	14655	106,24
$389{,}44\le\mu\le 697{,}02$	γ_{17}	120	160	120	38555	167,00
$697{,}02\le\mu\le 719{,}9$	γ_{26}	140	160	120	44870	176,67
$719{,}9<\mu$	γ_{27}	140	160	140	50910	185,06

Эти множества удовлетворяют соотношению

$$\widetilde{\Gamma_*}\subseteq\Gamma_*,$$

что и должно быть в силу доказанной леммы.

Используя функцию Лагранжа удалось найти семь несравнимых вариантов из 15, соответствующих множеству Γ_*.

Естественно возникает вопрос, почему множество $\widetilde{\Gamma_*}\subset\Gamma_*$ не содержит остальные варианты из Γ_* и существенна ли потеря информации о множестве Γ_*.

Некоторое представление об ответах на поставленный вопрос дает геометрическое представление множеств $\widetilde{\Gamma_*}$ и Γ_* в пространстве функционалов $Z(\gamma)$ и $\Delta t(\gamma)$ (рис. 3).

Как следует из рис. 3, множество $\widetilde{\Gamma_*}$ является выпуклой комбинацией точек из множества Γ_*. Этот факт замечен и при других численных расчетах. Однако в общем случае данный факт требует отдельного рассмотрения и выходит за рамки данной работы.

Тем не менее, множество $\widetilde{\Gamma_*}$ содержит информацию о множестве Γ_*, что в большинстве случаев для инженерных расчетов бывает достаточно. Другими словами угловые точки из $\widetilde{\Gamma_*}$ дают точную оценку затрат средств, а для остальных вариантов имеем оценку снизу для Z.

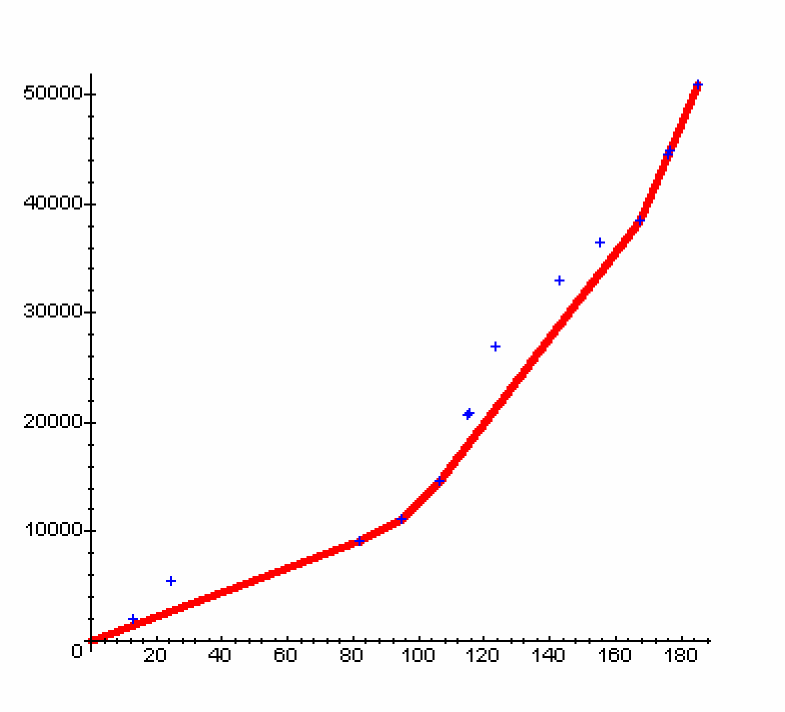

Рис. 3. + – точки из множеств Γ_*; сплошная линия, проведена через точки из $\widetilde{\Gamma_*}$

Приведем алгоритм решения задачи векторной оптимизации с использованием функции Лагранжа.

*п*1. Для каждого элемента $\omega \in \Omega$ строим зависимости $\Theta(\omega,\mu)$, представляющие собой кусочно-постоянные функции, которые формально представимы в виде

$$\Theta(\omega,\mu) = \arg\min\left\{Z\left[\Theta(\omega)\right] - \mu\Delta t\left[\Theta(\omega)\right]\right\}.$$

*п*2. Объединяем и упорядочиваем точки разрыва $\Theta(\omega,\mu)$ по $\omega \in \Omega$, число точек из этого объединения и представляет число вариантов множества $\widetilde{\Gamma_*}$.

*п*3. Строим варианты $\gamma_*(\mu)$ по формуле

$$\gamma_*(\mu) = \left\{\Theta(\omega,\mu) : \omega \in \Omega\right\}.$$

*п*4. Строим зависимость $\Delta t = f(Z)$, используя ее параметрическое представление

$$\begin{cases} \Delta t = \Delta t\left[\gamma_*(\mu)\right], \\ Z = Z\left[\gamma_*(\mu)\right], \quad \mu \geq 0, \end{cases}$$

где $\Delta t(\gamma)$ и $Z(\gamma)$ вычисляются по формулам (1), (2). В заключение отметим, что время движения по элементу ω_i вычислялось по формуле

$$t_{ij} = \frac{l_i}{\upsilon_{ij}},$$

что является определенным приближением и должно быть учтено выполнением тяговых расчетов с учетом свойств подвижного состава и реконструкции пути.

Так как данная работа посвящена методике решения задачи сокращения времени хода, то сделанное допущение приемлемо, а для реальных расчетов необходимо приведенный алгоритм пополнить элементом тяговых расчетов для подготовки исходной информации.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Левицкий И. Е. Стимулирование железных дорог за выполнение сроков доставки / И. Е. Левицкий, А. А. Босов, Н. Л. Цегельник // Залізн. трансп. України. – 2003. – № 3. – С. 37–43.
2. Босов А. А. О паритете оптимальных решений задач векторной оптимизации / А. А. Босов, В. В. Скалозуб // Диференціальні рівняння та їх застосування: Зб. наук. праць ДДУ. – Д.: ДДУ, 1998. – С. 66–70.
3. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 518 с.

Поступила в редколлегию 18.06.04.