

С. В. МЯМЛИН, А. Н. ПШИНЬКО, Е. А. ПИСЬМЕННЫЙ (ДИИТ),
В. И. ПРИХОДЬКО (ОАО «Крюковский вагоностроительный завод»)

ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ РЕЛЬСОВЫХ ЭКИПАЖЕЙ

Докладно розглянуто методику складання диференціальних рівнянь коливань рейкового екіпажа, що дозволяє визначити принципи «автоматичної» побудови цих рівнянь. Описано класи, що містять функції, які виконують усі необхідні операції над самими об'єктами і зв'язками, що їх з'єднують, і з яких може бути побудована модель екіпажа.

Подробно рассмотрена методика составления дифференциальных уравнений колебания рельсового экипажа, что позволило определить принципы «автоматического» построения этих уравнений. Описаны классы, которые содержат функции, выполняющие все необходимые операции над самими объектами и связями, их соединяющими, из которых может быть построена модель экипажа.

In article the technique of drawing up of the differential equations of fluctuation of rail crew that has allowed to define principles of «automatic» construction of these equations is in detail considered. Classes which contain the functions which are carrying out all necessary operations above objects and communications, their connecting from which the model of crew can be constructed are described.

В настоящее время существует множество математических моделей, описывающих пространственные колебания и динамическую нагруженность различных типов подвижного состава [1–5], однако большинство из них предназначено для моделирования какого-то одного типа подвижного состава. В настоящей работе предложен метод, позволяющий «собирать» модель любого типа подвижного состава. Рельсовый экипаж органично разделяется на объекты, в качестве которых могут быть выбраны элементы его конструкции. Например, для полувагона объектами динамической системы могут быть колесные пары, боковые рамы тележек, надрессорные балки и кузов, а для вагона с двойным рессорным подвешиванием – те же тела, только вместо боковых рам объектами являются рамы тележек.

Вначале рассмотрим методику составления уравнений пространственных колебаний объекта, на который действуют силы со стороны других объектов [6–9].

На рис. 1 показан объект и силы, действующие на него со стороны двух других объектов. Составим выражения для перемещений точек A и B объекта:

- для точки A

$$\left. \begin{aligned} Z_A &= L_Z - L_X\varphi + L_Y\theta, \\ Y_A &= L_Y + L_X\psi - L_Z\theta, \\ X_A &= L_X + L_Z\varphi - L_Y\psi; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

- для точки B

$$\left. \begin{aligned} Z_B &= L_Z - L_X\varphi - L_Y\theta, \\ Y_B &= L_Y + L_X\psi - L_Z\theta, \\ X_B &= L_X + L_Z\varphi + L_Y\psi, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $Z_A, Z_B, Y_A, Y_B, X_A, X_B$ – координаты точек A и B по осям Z, Y, X соответственно; φ, θ, ψ – углы поворота объекта вокруг осей X, Y и Z соответственно.

Как видно из уравнений (1) и (2), формулы определения перемещений во всех плоскостях для точек A и B отличаются только знаками перед $L_Y\theta$ и $L_Y\psi$, так как проекции этих точек на ось Y находятся по разные стороны от центра масс объекта. Для других точек выражения перемещений запишутся аналогично с учетом знаков перед L_X, L_Y и L_Z . Например, уравнения для точки D будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} Z_D &= L_Z + L_X\varphi - L_Y\theta, \\ Y_D &= L_Y - L_X\psi + L_Z\theta, \\ X_D &= L_X - L_Z\varphi + L_Y\psi. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Таким образом, если под величинами L_X, L_Y и L_Z понимать не абсолютные значения координаты точки на оси X, Y и Z , а учитывать знаки координаты, то для произвольной точки объек-

та уравнение перемещений можно записать в общем виде (4), где у величин L_X , L_Y и L_Z необходимо учесть знаки.

$$\left. \begin{aligned} Z &= L_Z - L_X\varphi + L_Y\theta, \\ Y &= L_Y + L_X\psi - L_Z\theta, \\ X &= L_X + L_Z\varphi - L_Y\psi. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

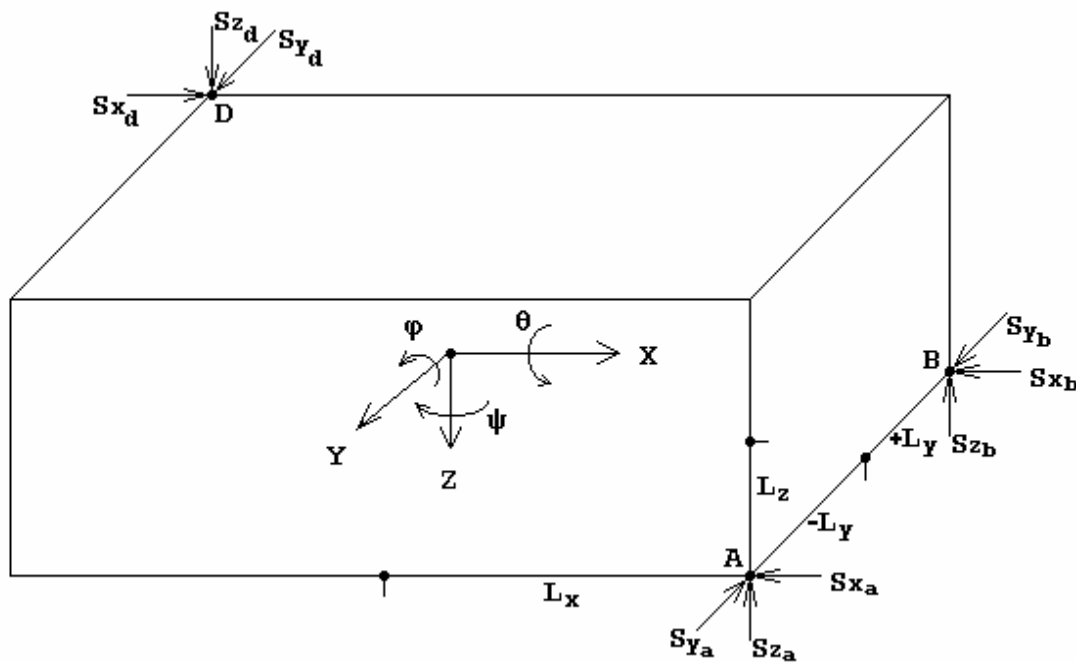


Рис. 1. Объект динамической системы

Рассмотрим методику составления уравнений динамики для объекта, изображенного на рис. 1. При этом будем считать, что силы (S_{ZA} , S_{ZB} , S_{ZD} , S_{YA} , S_{YB} , S_{YD} , S_{XA} , S_{XB} , S_{XD}), действующие на объект со стороны объекта, который расположен «ниже» по оси Z («правее» по оси Y или «дальше» по оси X), положительные, а силы, действующие со стороны объекта, который расположен «выше» по оси Z («левее» по оси Y или «ближе» по оси X), отрицательные. Тогда

$$\begin{aligned} m\ddot{Z} + S_{ZA} + S_{ZB} - S_{ZD} &= W, \\ m\ddot{Y} + S_{YA} + S_{YB} - S_{YD} &= 0, \\ m\ddot{X} + S_{XA} + S_{XB} - S_{XD} &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_Y\ddot{\varphi} - S_{ZA}(L_{XA} + L_{ZA}\varphi) - S_{ZB}(L_{XB} + L_{ZB}\varphi) - \\ - S_{ZD}(L_{XD} + L_{ZD}\varphi) + S_{XA}(L_{ZA} - L_{XA}\varphi) + \\ + S_{XB}(L_{ZB} - L_{XB}\varphi) + S_{XD}(L_{ZD} - L_{XD}\varphi) = 0, \\ J_Z\ddot{\psi} + S_{YA}(L_{XA} - L_{YA}\psi) + S_{YB}(L_{XB} - L_{YB}\psi) + \\ + S_{YD}(L_{XD} - L_{YD}\psi) - S_{XA}(L_{YA} + L_{XA}\psi) - \\ - S_{XB}(L_{YB} + L_{XB}\psi) - S_{XD}(L_{YD} + L_{XD}\psi) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} J_X\ddot{\theta} + S_{ZA}(L_{YA} - L_{ZA}\theta) + S_{ZB}(L_{YB} - L_{ZB}\theta) + \\ + S_{ZD}(L_{YD} - L_{ZD}\theta) - S_{YA}(L_{ZA} + L_{YA}\theta) - \\ - S_{YB}(L_{ZB} + L_{YB}\theta) - S_{YD}(L_{ZD} + L_{YD}\theta) = 0, \end{aligned}$$

где m , W – соответственно масса и вес объекта; Z , Y , X – координаты центра масс объекта; J_Y , J_Z , J_X – моменты инерции объекта относительно соответствующих осей.

В формуле (5) выражения типа $S_{ZA}(L_{XA} + L_{ZA}\varphi)$ представляют собой моменты соответствующих сил, а сумма в скобках – изменяющиеся в зависимости от угла поворота плечи сил.

Для использования полученных выше уравнений динамики для составления программы вычислений их целесообразно переписать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{Z} &= W + \sum S_Z, \\ m\ddot{Y} &= \sum S_Y, \\ m\ddot{X} &= \sum S_X, \\ J_Z\ddot{\psi} &= \sum M_Z, \\ J_Y\ddot{\varphi} &= \sum M_Y, \\ J_X\ddot{\theta} &= \sum M_X. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Теперь в правых частях уравнений стоят суммы сил или суммы моментов сил. Для решения полученных уравнений динамики необходимо определить основные параметры объектов динамической системы. В качестве объектов рассматриваются кузов, элементы тележек, колесные пары. Перечень объектов и обозначения масс даны в табл. 1.

Таблица 1

Обозначения масс объектов рельсового экипажа

| Объект модели | Условное обозначение массы |
|---------------|----------------------------|
| Экипаж | m_3 |
| Кузов | m |
| Тележка | m_T |
| Рама тележки | m_p |
| Колесная пара | m_k |

Помимо этого объектами модели «экипаж-путь», общими для всех типов рельсовых экипажей, являются приведенные массы пути – в вертикальной m_p^B и горизонтальной m_p^r плоскостях.

Для удобства расчетов кроме перечисленных основных параметров объектов введены некоторые дополнительные. Это, прежде всего, параметры, необходимые для расчетов движения экипажа на криволинейных участках пути, название объекта, указатель на экипаж, к которому относится данный объект, и некоторые другие.

Параметры объектов рельсовых экипажей приводятся в технической документации.

Теперь для составления уравнений динамики группы объектов необходимы уравнения связи, которые определяют зависимость величин сил в связях от величины относительных перемещений объектов.

Для линейной упруговязкой связи эта зависимость определяется выражением

$$S_1 = k\Delta + \beta\dot{\Delta}, \quad (7)$$

где k – жесткость связи в одном из трех направлений; $\Delta = D_2 - D_1$ (D_1 – перемещение в одном из трех линейных или угловых направлений «нижнего» объекта, D_2 – перемещение в одном из трех линейных или угловых направлений «верхнего» объекта); β – вязкость связи в одном из трех направлений; $\dot{\Delta} = \dot{D}_2 - \dot{D}_1$ (\dot{D}_1 , \dot{D}_2 – скорости перемещений соответствующих объектов).

Для моделирования пространственных колебаний реальных рельсовых экипажей необходимо использовать и другие возможные связи между объектами [6; 7; 9]:

1. Билинейная упруговязкая связь (рис. 2).

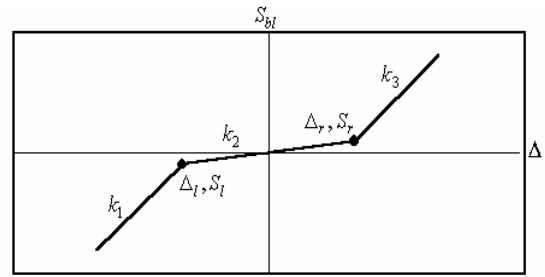


Рис. 2. Характеристика билинейной упруговязкой связи: Δ_l, S_l и Δ_r, S_r – координаты точек, в которых происходит изменение жесткости связи; k_1, k_2, k_3 – жесткость связи на соответствующих участках

Усилие в связи вычисляется по формуле (8)

$$\left. \begin{aligned} S_{bl} &= S_l + k_1(\Delta - \Delta_l) + \beta\dot{\Delta} && \text{при } \Delta \leq \Delta_l, \\ S_{bl} &= S_l + k_2(\Delta - \Delta_l) + \beta\dot{\Delta} && \text{при } \Delta_l < \Delta < \Delta_r, \\ S_{bl} &= S_r + k_3(\Delta - \Delta_r) + \beta\dot{\Delta} && \text{при } \Delta \geq \Delta_r. \end{aligned} \right\} (8)$$

Задавая различные значения параметров $\Delta_l, S_l, \Delta_r, S_r$ и k_1, k_2, k_3 , можно получить практически любую желаемую характеристику связи.

2. Связь типа «сухое трение» (рис. 3).

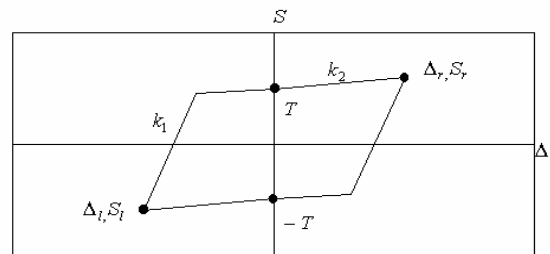


Рис. 3. Характеристика связи типа «сухое трение»: T – сила сухого трения; k_1, k_2 – жесткости соответствующих участков характеристики связи

Усилие в связи вычисляется по формуле (9)

$$\left. \begin{aligned} T &= fN, \\ S_d &= k_2\Delta + \beta\dot{\Delta} + T \operatorname{sign}(\dot{\Delta}) && \text{при } \Delta_l < \Delta < \Delta_r, \\ S_d &= S_r + k_1(\Delta - \Delta_r) && \text{при } \Delta \geq \Delta_r, \\ S_d &= S_l + k_1(\Delta - \Delta_l) && \text{при } \Delta \leq \Delta_l, \end{aligned} \right\} (9)$$

где f – коэффициент трения; N – сила, действующая по нормали к поверхности трения.

3. Связь между колесом и рельсом (крип) (рис. 4).

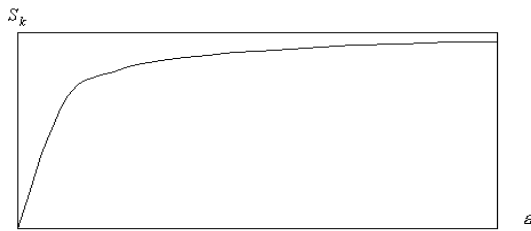


Рис. 4. Характеристика связи между колесом и рельсом (крип):
 ε – относительная скорость проскальзывания колеса по рельсу; S_k – полная сила крипа

Проскальзывания и силы крипа, согласно теории Картера, определяются следующими выражениями [6; 10; 11]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \left(\frac{b\dot{\psi}}{V} + \frac{\Delta r}{r} \right), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{V} (\dot{y}_{\text{кр}} - r\dot{\theta}) - \psi, \\ \varepsilon &= \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2}, \\ f &= 235P - 2,4P^2 + 0,01P^3, \\ h &= \frac{f}{Pf_T}, \\ F &= \frac{f}{\sqrt{1+h^2\varepsilon^2}}, \\ S_k &= -F\varepsilon, \quad S_{kx} = -F\varepsilon_x, \quad S_{ky} = -F\varepsilon_y, \end{aligned} \quad (10)$$

где b – половина расстояния между точками контакта колес одной колесной пары с рельсами; ψ – влияние колесной пары; $\dot{y}_{\text{кр}}$ – поперечное смещение колесной пары относительно рельса; Δr – отклонение от среднего значения радиуса колеса; θ – боковая качка колесной пары; f_T – коэффициент трения колеса о рельс; S_{kx} , S_{ky} – силы крипа в горизонтальном продольном и горизонтальном поперечном направлениях соответственно.

Перечисленные выше типы динамических связей используются в рельсовых экипажах. Анализ выражений (7)–(10) и рис. 1 позволяют определить основные параметры связей. Во-первых, это направления связи (вертикальная, горизонтальная продольная и горизонтальная поперечная), во-вторых, объекты, к которым приложена каждая связь, в-третьих, координаты точек приложения связи к объектам (на рис. 1 обозначены L_X , L_Y , L_Z), в-четвертых, деформация и скорость деформации связи – для расчета сил в связи. Полный текст программы вычислений характеристик связей между телами рельсовых экипажей приведен в [6].

Таким образом, подробное рассмотрение методики составления дифференциальных уравнений колебания рельсового экипажа позволило определить принципы «автоматического» построения этих уравнений. Разработаны классы для описания объектов и связей рельсового экипажа. Описанные выше классы содержат функции, выполняющие все необходимые операции над самими объектами и связями, их соединяющими. То есть классы, описывающие объекты и связи рельсового экипажа как механической системы, являются теми «кирпичиками», из которых может быть построена («собрана») модель экипажа.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Блохин Е. П. Математическая модель пространственных колебаний четырехосного рельсового экипажа / Е. П. Блохин, В. Д. Данович, Н. И. Морозов; Днепропетровский институт инженеров железнодорожного транспорта. – Д., 1986. – 39 с. – Рус.-Деп. в ЦНИИТЭИ МПС 29.09.86, № 7252 ж. д.
2. Коротенко М. Л. Дифференциальные уравнения пространственных колебаний четырехосного вагона с учетом конечной жесткости кузова и инерционных свойств основания / М. Л. Коротенко, В. Д. Данович // Проблемы механики наземного транспорта: Межвуз. сб. науч. тр. – Д.: ДИИТ, 1973. – Вып. 199/25. – С. 3–13.
3. Математическое моделирование колебаний рельсовых транспортных средств / Под ред. В. Ф. Ушкалова. – К.: Наук. думка, 1989. – 240 с.
4. М. Ф. Вериго, Взаимодействие пути и подвижного состава / М. Ф. Вериго, А. Я. Коган – М.: Транспорт, 1986. – 560 с.
5. Гарг В. К. Динамика подвижного состава / В. К. Гарг, Р. В. Дуккипати. – М.: Транспорт, 1988. – 391 с.
6. Мямлин С. В. Моделирование динамики рельсовых экипажей. – Д.: Новая идеология, 2002. – 240 с.
7. Мямлин С. В. Методика моделирования пространственных колебаний железнодорожного экипажа // Залізничний транспорт України. – 2001. – № 2. – С. 2–5.
8. Pshin'ko O. Simulation of vehicle dynamic loading by means of object-oriented programming / O. Pshin'ko, Y. Blokhin, S. Myamlin // Archives of transport. Polish academy of sciences. Committee of transport. – 2002. – Vol.14, issue 1. – P. 67–75.
9. Blokhin Y. P. Mathematical modeling of body braces in a railway vehicle / Y. P. Blokhin, S. V. Myamlin, O. M. Pshin'ko // Problemy eksploatacji: Kwartalnik. – Radom: Wyd. Instytutu Technologii Eksploatacji. – 2002. – № 1. – P. 269–276.
10. Carter F. W. On the Action of a Locomotive Driving Wheel // Proc. Royal Soc. – Vol. 112, ser. A. – 1926. – P. 151–157.
11. Carter F. W. On the Stability of Running of Locomotives // Proc. Royal Soc. – Vol. 121, ser. A. – 1928. – P. 585–611.

Поступила в редколлегию 25.02.2005.