

А. Н. ПШИНЬКО, С. В. МЯМЛИН (ДИИТ), В. И. ПРИХОДЬКО, О. А. ШКАБРОВ,  
Г. С. ИГНАТОВ (ОАО «Крюковский вагоностроительный завод»),  
А. В. ДОНЧЕНКО (Украинский научно-исследовательский институт вагоностроения),  
Ю. М. ФЕДЮШИН (Укрзалізниця)

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПАССАЖИРСКОГО ВАГОНА В ОБЫЧНОЙ ПОСТАНОВКЕ**

Запропонована математична модель для вивчення просторових коливань пасажирських вагонів, за допомогою якої проведено значні теоретичні дослідження з вивчення нових моделей пасажирських вагонів виробництва Крюківського вагонобудівного заводу. Дослідження у подальшому проводилися у робочому діапазоні швидкостей 20...200 км/год на різних ділянках колії. Результати розрахунків підтвердили правильність конструкційних рішень.

Предложена математическая модель для изучения пространственных колебаний пассажирских вагонов, на которой проведены обширные теоретические исследования по изучению новых моделей пассажирских вагонов производства Крюковского вагоностроительного завода. Исследования в дальнейшем проводились в рабочем диапазоне скоростей 20...200 км/ч на различных участках пути. Результаты расчетов подтвердили правильность конструкторских решений.

In article the mathematical model for studying spatial fluctuations of carriages on which extensive theoretical researches on studying new models of carriages of manufacture car-building factory Kryukov are lead is offered. Researches further were carried in a working range of speeds 20...200 km/h on various sites of a way. Results of calculations have proved design decisions.

Важной задачей в динамике рельсовых экипажей является определение рационального соотношения между жесткостями двух ступеней подвешивания для экипажа с двойным рессорным подвешиванием, а также определение рационального соотношения параметров демпфирования этих же ступеней.

Для решения этой задачи разработана математическая модель пространственных колебаний такого экипажа в обычной постановке.

Для разработки математической модели пространственных колебаний рельсового экипажа с двухступенчатым рессорным подвешиванием примем во внимание, что расчетная схема рассматриваемого рельсового экипажа близка к расчетной схеме пассажирского вагона с тележками типа КВЗ-ЦНИИ и тележки модели 68-7007. У этих тележек передача вертикальных сил осуществляется через скользуны надрессорной балки. В безлюлочных конструкциях тележек через них передаются также горизонтальные продольные и поперечные силы. В люлочных конструкциях тележек для этого служит шкворень. Для уменьшения ударных нагрузок в шкворневом узле и в скользунах предполагается установка в них упруговязких (резиновых)

элементов. Следовательно, в рассматриваемых конструкциях необходимо принимать во внимание перемещения надрессорной балки относительно кузова в продольном и поперечном направлениях и при вилянии.

Связь надрессорной балки с рамой тележки осуществляется в безлюлочной конструкции с помощью пружины повышенной гибкости типа флексикойл, которая создает восстанавливающие моменты при взаимных перемещениях надрессорной балки и рамы тележки во всех направлениях, а в люлочных конструкциях эту функцию выполняет люлька. Следует также учесть, что при взаимных горизонтальных продольных перемещениях надрессорной балки и рамы тележки люлочной конструкции работают упругие поводки.

В буксовом узле упругодиссипативные элементы допускают взаимные перемещения рамы тележки и колесной пары во всех направлениях. В некоторых тележках здесь установлены поводки.

Расчетная схема экипажа с рассматриваемыми тележками представляет собой систему, состоящую из 9 твердых тел (кузов, 2 надрессорные балки, 2 рамы тележки, 4 колесные пары) (рис. 1).

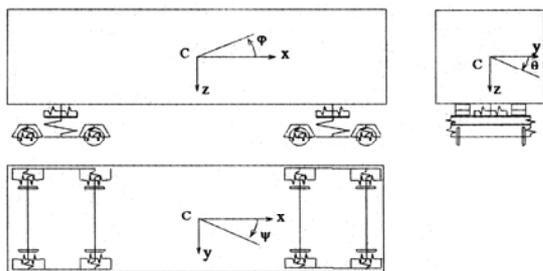


Рис. 1. Расчетная схема экипажа с двухступенчатым рессорным подвешиванием

Введем следующие обозначения (см. рис. 1):  $x, y, z$  – перемещения тел системы вдоль оси пути ( $x$  – подергивание), поперек оси пути ( $y$  – боковой относ) и по вертикали ( $z$  – подпрыгивание);  $\theta, \varphi, \psi$  – угловые перемещения относительно осей  $x$  ( $\theta$  – боковая качка),  $y$  ( $\varphi$  – продольная качка или галомирование) и  $z$  ( $\psi$  – виляние). Положительные поступательные перемещения – вдоль соответствующих осей, а положительные угловые перемещения – против часовой стрелки, если смотреть с положительного направления соответствующей оси. На рис. 1 показаны положительные направления перемещений для кузова с центром масс в точке  $C$ .

В дальнейшем без индекса будем обозначать перемещения кузова. Индексом  $i$  ( $i=1, 2$  – номер тележки) – рамы тележки, индексом  $ni$  – надрессорных балок, индексом  $im$  ( $m=1, 2$  – номер колесной пары в тележке) – колесных пар,  $pink$  ( $k=1$  – левая по ходу движения,  $k=2$  – правая сторона вагона) – рельсов в точках контакта с колесами. В расчетной схеме принимаем во внимание приведенные массы пути в точках контакта колес с рельсами, которые перемещаются в двух направлениях – горизонтальном поперек оси пути и по вертикали.

Общее число перемещений равно

$$9 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 70.$$

Рассмотрим связи, наложенные на систему:

- между кузовом и надрессорными балками возможны взаимные перемещения в горизонтальном продольном и поперечном направлениях и при вилянии, т. е. подпрыгивание, боковая и продольная качка надрессорных балок определяются соответствующими перемещениями кузова:

$$\left. \begin{aligned} z_{ni} &= z + (-1)^i l \varphi, \\ \theta_{ni} &= \theta, \\ \varphi_{ni} &= \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $l$  – половина базы экипажа;

- продольная качка колесных пар определяется их подергиванием (проскальзывания определены при вычислении сил псевдоскольжения)

$$\varphi_{im} = \frac{x_{im}}{r}, \quad (2)$$

где  $r$  – радиус колеса по кругу катания;

- колеса движутся без отрыва от рельсов:

$$z_{pink} = z_{im} + (-1)^k b_2 \theta_{im} + \Delta r_{imk} - \eta_{nimk}, \quad (3)$$

где  $b_2$  – половина расстояния в поперечном направлении между кругами катания колес;  $\Delta r_{imk}$  – изменение радиуса круга катания колеса при боковом относ колесной пары;  $\eta_{nimk}$  – ординаты вертикальной неровности пути.

Таким образом, введено 18 уравнений связи. Следовательно, система имеет  $70 - 18 = 52$  степени свободы. Запишем обобщенные координаты:

- перемещения кузова:

$$q_1 = z, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = \theta, \quad q_4 = y, \quad q_5 = \psi;$$

- перемещения рам тележек:

$$q_n = z_i \quad (n = 6, 7), \quad q_n = \varphi_i \quad (n = 8, 9),$$

$$q_n = \theta_i \quad (n = 10, 11), \quad q_n = y_i \quad (n = 12, 13),$$

$$q_n = \psi_i \quad (n = 14, 15);$$

- перемещения колесных пар:

$$q_n = z_{im} \quad (n = \overline{16, 19}), \quad q_n = \theta_{im} \quad (n = \overline{20, 23}),$$

$$q_n = y_{im} \quad (n = \overline{24, 27}), \quad q_n = \psi_{im} \quad (n = \overline{28, 31});$$

- перемещения надрессорных балок:

$$q_n = y_{ni} \quad (n = 32, 33), \quad q_n = \psi_{ni} \quad (n = 34, 35);$$

- отжатия рельсов в точках контакта с колесами:

$$q_n = y_{pink} \quad (n = \overline{36, 43});$$

- подергивания тел системы:

$$q_n = x_i \quad (n = 44, 45), \quad q_n = x_{ni} \quad (n = 46, 47),$$

$$q_n = x_{im} \quad (n = \overline{48, 51}), \quad q_{52} = x.$$

Статическое давление:

- колеса на рельс

$$P_{ст} = \frac{m_3 g}{8},$$

где  $m_3$  – масса экипажа (полная);  $g$  – ускорение свободного падения;

- на рессорные комплекты центрального подвешивания

$$P_{\text{стц}} = \frac{(m + 2m_{\text{н}})g}{4},$$

где  $m$  – масса кузова (полная);  $m_{\text{н}}$  – масса наддрессорной балки;

- на рессорные комплекты буксового подвешивания

$$P_{\text{стб}} = \frac{(m + 2m_{\text{н}} + 2m_{\text{т}})g}{8},$$

где  $m_{\text{т}}$  – масса рамы тележки.

При определении инерционных параметров учтено, что масса тележки

$$m_{\text{тел}} = m_{\text{т}} + m_{\text{н}} + 2m_{\text{к}},$$

а масса экипажа

$$m_{\text{э}} = m + 2m_{\text{тел}}.$$

Общий статический прогиб рессорного подвешивания определяются по формуле:

$$f = f_{\text{ц}} + f_{\text{б}},$$

где  $f_{\text{ц}}$  и  $f_{\text{б}}$  – статические прогибы рессорного подвешивания второй и первой ступеней соответственно:

$$f_{\text{ц}} = \frac{P_{\text{стц}}}{k_{\text{ц}}}, \quad f_{\text{б}} = \frac{P_{\text{стб}}}{k_{\text{б}}},$$

где  $k_{\text{ц}}$  – приведенная жесткость центрального рессорного подвешивания;  $k_{\text{б}}$  – жесткость буксового подвешивания.

Рассмотрим взаимные перемещения всех тел системы. Обозначения геометрических параметров, входящих в выражения перемещений, подробно описаны в [1].

Взаимные перемещения между кузовом и наддрессорной балкой:

- в зоне шкворня в продольном и горизонтальном поперечном направлении:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\text{шxi}} &= x + h_{\text{ш}}\varphi - x_{\text{ни}} \\ \Delta_{\text{шыi}} &= y - h_{\text{ш}}\theta - (-1)^i l_{\psi} - y_{\text{ни}}; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

- между скользящими в продольном и горизонтальном поперечном направлении:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\text{сxi}} &= x + h_{\text{с}}\varphi - (-1)^k b_{\text{с}}\psi - x_{\text{ни}} + (-1)^k b_{\text{с}}\psi_{\text{ни}}, \\ \Delta_{\text{сyi}} &= y - h_{\text{с}}\theta - (-1)^i l_{\psi} - y_{\text{ни}}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Соответствующие силы определяются по формуле:

$$\left. \begin{aligned} S_{\text{шxi}} &= k_{\text{шx}}\Delta_{\text{шxi}} + \beta_{\text{шx}}\dot{\Delta}_{\text{шxi}}, \\ S_{\text{шыi}} &= k_{\text{шы}}\Delta_{\text{шыi}} + \beta_{\text{шы}}\dot{\Delta}_{\text{шыi}}, \\ S_{\text{сxi}} &= k_{\text{сx}}\Delta_{\text{сxi}} + \beta_{\text{сx}}\dot{\Delta}_{\text{сxi}}, \\ S_{\text{сyi}} &= k_{\text{сы}}\Delta_{\text{сyi}} + \beta_{\text{сы}}\dot{\Delta}_{\text{сyi}}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Взаимные перемещения между наддрессорной балкой и рамой тележки по всем направлениям (деформации рессорных комплектов)

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\text{цxi}} &= x_{\text{ни}} - (-1)^k b_{\psi_{\text{ни}}} - x_i + (-1)^k b_{\psi_i}, \\ \Delta_{\text{цyi}} &= y_{\text{ни}} - y_i, \\ \Delta_{\text{цzi}} &= z + (-1)^i l_{\varphi} + (-1)^k b_{\theta} - z_i - (-1)^k b_{\theta_i}, \\ \Delta_{\text{ц\psi i}} &= \psi_{\text{ни}} - \psi_i. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Соответствующие упругие силы равны:

$$\left. \begin{aligned} S_{\text{цxi}} &= k_{\text{цx}}\Delta_{\text{цxi}}, \\ S_{\text{цyi}} &= k_{\text{цy}}\Delta_{\text{цyi}}, \\ S_{\text{цzi}} &= k_{\text{цz}}\Delta_{\text{цzi}}, \\ S_{\text{ц\psi i}} &= k_{\text{ц\psi}}\Delta_{\text{ц\psi i}}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Взаимные перемещения между наддрессорной балкой и рамой тележки в зоне установки гасителей колебаний

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\text{цyi}}^{\text{д}} &= y_{\text{ни}} - y_i, \\ \Delta_{\text{цzi}}^{\text{д}} &= z + (-1)^i l_{\varphi} + (-1)^k b_{\text{дн}}\theta - z_i - (-1)^k b_{\text{дт}}\theta_i \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Соответствующие силы в гидроамортизаторах будут выглядеть следующим образом

$$\left. \begin{aligned} S_{\text{цyi}}^{\text{д}} &= \beta_{\text{цy}}\dot{\Delta}_{\text{цyi}}^{\text{д}}, \\ S_{\text{цzi}}^{\text{д}} &= \beta_{\text{цz}}\dot{\Delta}_{\text{цzi}}^{\text{д}}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где  $\beta_{\text{цy}} = \beta_{\text{ц}} \cos^2 \alpha_{\text{д}}$ ,  $\beta_{\text{цz}} = \beta_{\text{ц}} \sin^2 \alpha_{\text{д}}$ , угол наклона гидроамортизаторов к горизонтали:

$$\text{tg} \alpha_{\text{д}} = \frac{h_{\text{кт}} - h_{\text{дк}} - h_{\text{дт}}}{b_{\text{дт}} - b_{\text{дн}}}.$$

Запишем взаимные перемещения и силы, возникающие в поводках центральной ступени подвешивания:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\text{цxi}}^{\text{п}} &= x_{\text{ни}} - (-1)^k b_{\text{пц}}\psi_{\text{ни}} - x_i + (-1)^k b_{\text{пц}}\psi_i, \\ \Delta_{\text{цyi}}^{\text{п}} &= y_{\text{ни}} - y_i, \\ \Delta_{\text{цzi}}^{\text{п}} &= z + (-1)^i l_{\varphi} + (-1)^k b_{\text{пц}}\theta - z_i - (-1)^k b_{\text{пц}}\theta_i. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Соответствующие силы равны:

$$\left. \begin{aligned} S_{\text{иxik}}^{\text{п}} &= k_{\text{иx}}^{\text{п}} \Delta_{\text{иxik}}^{\text{п}} + \beta_{\text{иx}}^{\text{п}} \dot{\Delta}_{\text{иxik}}^{\text{п}}, \\ S_{\text{иyik}}^{\text{п}} &= k_{\text{иy}}^{\text{п}} \Delta_{\text{иyik}}^{\text{п}} + \beta_{\text{иy}}^{\text{п}} \dot{\Delta}_{\text{иyik}}^{\text{п}}, \\ S_{\text{иzik}}^{\text{п}} &= k_{\text{иz}}^{\text{п}} \Delta_{\text{иzik}}^{\text{п}} + \beta_{\text{иz}}^{\text{п}} \dot{\Delta}_{\text{иzik}}^{\text{п}}. \end{aligned} \right\} (12)$$

При наличии ограничений хода надрессорной балки относительно рамы тележки в горизонтальном продольном и поперечном направлениях в центральном подвешивании после выбора соответствующих зазоров  $\Delta_{\text{иx0}}$ ,  $\Delta_{\text{иy0}}$  возникают силы, в которых учтена жесткость и диссипация

$$\left. \begin{aligned} S_{\text{иxik}}^{\text{к}} &= \begin{cases} 0, & \text{если } |\Delta_{\text{иxik}}^{\text{к}}| \leq \Delta_{\text{иx0}}; \\ k_{\text{иx}}^{\text{к}} (\Delta_{\text{иxik}}^{\text{к}} - (-1)^k \Delta_{\text{иx0}}) \beta_{\text{иx}}^{\text{к}} \dot{\Delta}_{\text{иxik}}^{\text{к}}, & \text{если } |\Delta_{\text{иxik}}^{\text{к}}| > \Delta_{\text{иx0}}; \end{cases} \\ S_{\text{иyik}}^{\text{к}} &= \begin{cases} 0, & \text{если } |\Delta_{\text{иyik}}^{\text{к}}| \leq \Delta_{\text{иy0}}; \\ k_{\text{иy}}^{\text{к}} (\Delta_{\text{иyik}}^{\text{к}} - (-1)^k \Delta_{\text{иy0}}) \beta_{\text{иy}}^{\text{к}} \dot{\Delta}_{\text{иyik}}^{\text{к}}, & \text{если } |\Delta_{\text{иyik}}^{\text{к}}| > \Delta_{\text{иy0}}. \end{cases} \end{aligned} \right\} (14)$$

Запишем взаимные перемещения между рамой тележки и колесной парой:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\delta \text{.ximk}} &= x_i - (-1)^k b_1 \psi_i - x_{im} + (-1)^k b_1 \psi_{im}, \\ \Delta_{\delta \text{.yimk}} &= y_i - (-1)^m l_1 \psi_i - y_{im}, \\ \Delta_{\delta \text{.zimek}} &= z_i + (-1)^m l_1 \varphi_i + (-1)^k b_1 \theta_i - \\ &- z_{im} - (-1)^k b_1 \theta_{im}, \\ \Delta_{\delta \text{.psimek}} &= \psi_i - \psi_{im}. \end{aligned} \right\} (15)$$

В буксовой ступени подвешивания в некоторых тележках установлены гасители колебаний сухого трения и имеются резиновые элементы, в которых предполагается вязкое трение. Поэтому силы в буксовом подвешивании в общем случае равны:

$$\left. \begin{aligned} S_{\delta \text{.ximk}} &= k_{\delta \text{.x}} \Delta_{\delta \text{.ximk}} + \beta_{\delta \text{.x}} \dot{\Delta}_{\delta \text{.ximk}} + \\ &+ F_{\delta \text{.x}} \text{sign}(\dot{\Delta}_{\delta \text{.ximk}}), \\ S_{\delta \text{.yimk}} &= k_{\delta \text{.y}} \Delta_{\delta \text{.yimk}} + \beta_{\delta \text{.y}} \dot{\Delta}_{\delta \text{.yimk}} + \\ &+ F_{\delta \text{.y}} \text{sign}(\dot{\Delta}_{\delta \text{.yimk}}), \\ S_{\delta \text{.zimek}} &= k_{\delta \text{.z}} \Delta_{\delta \text{.zimek}} + \beta_{\delta \text{.z}} \dot{\Delta}_{\delta \text{.zimek}} + \\ &+ F_{\delta \text{.z}} \text{sign}(\dot{\Delta}_{\delta \text{.zimek}}), \\ S_{\delta \text{.psimek}} &= k_{\delta \text{.ps}} \Delta_{\delta \text{.psimek}} + \beta_{\delta \text{.ps}} \dot{\Delta}_{\delta \text{.psimek}} + \\ &+ F_{\delta \text{.ps}} \text{sign}(\dot{\Delta}_{\delta \text{.psimek}}), \end{aligned} \right\} (16)$$

энергии в самой конструкции. Эти силы возникают при перемещениях надрессорной балки относительно тележки в зоне скользунов:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\text{иxik}}^{\text{к}} &= x_{ni} - (-1)^k b_c \psi_{ni} - x_i + \\ &+ (-1)^k b_c \psi_i, \\ \Delta_{\text{иyik}}^{\text{к}} &= y_{ni} - y_i, \end{aligned} \right\} (13)$$

превышающих по абсолютной величине зазоры  $\Delta_{\text{иx0}}$ ,  $\Delta_{\text{иy0}}$ .

Эти силы запишутся следующим образом:

где  $F_{\delta}$  – амплитудные значения сил сухого трения:

$$\begin{aligned} F_{\delta \text{.x}} &= f_{\delta \text{.x}} \cdot P_{\text{стб}}, & F_{\delta \text{.y}} &= f_{\delta \text{.y}} \cdot P_{\text{стб}}, \\ F_{\delta \text{.z}} &= f_{\delta \text{.z}} \cdot P_{\text{стб}}, & F_{\delta \text{.ps}} &= f_{\delta \text{.ps}} \cdot P_{\text{стб}}. \end{aligned}$$

Взаимные перемещения и силы, возникающие в поводках буксовой ступени:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\delta \text{.ximk}}^{\text{п}} &= x_i - (-1)^k b_{\text{пб}} \psi_i - x_{im} + \\ &+ (-1)^k b_{\text{пб}} \psi_{im}, \\ \Delta_{\delta \text{.yimk}}^{\text{п}} &= y_i - (-1)^m l_i \psi_i - y_{im}, \\ \Delta_{\delta \text{.zimek}}^{\text{п}} &= z_i + (-1)^m l_i \varphi_i + (-1)^k b_{\text{пб}} \theta_i - \\ &- z_{im} - (-1)^k b_{\text{пб}} \theta_{im}, \end{aligned} \right\} (17)$$

$$\left. \begin{aligned} S_{\delta \text{.ximk}}^{\text{п}} &= k_{\delta \text{.x}}^{\text{п}} \Delta_{\delta \text{.ximk}}^{\text{п}} + \beta_{\delta \text{.x}}^{\text{п}} \dot{\Delta}_{\delta \text{.ximk}}^{\text{п}}, \\ S_{\delta \text{.yimk}}^{\text{п}} &= k_{\delta \text{.y}}^{\text{п}} \Delta_{\delta \text{.yimk}}^{\text{п}} + \beta_{\delta \text{.y}}^{\text{п}} \dot{\Delta}_{\delta \text{.yimk}}^{\text{п}}, \\ S_{\delta \text{.zimek}}^{\text{п}} &= k_{\delta \text{.z}}^{\text{п}} \Delta_{\delta \text{.zimek}}^{\text{п}} + \beta_{\delta \text{.z}}^{\text{п}} \dot{\Delta}_{\delta \text{.zimek}}^{\text{п}}. \end{aligned} \right\} (18)$$

Поводки и шпинтоны, установленные в буксовой ступени подвешивания, ограничивают перемещения рамы тележки относительно колесной пары в горизонтальном продольном и поперечном направлениях. Обозначим через  $\Delta_{\delta \text{.x0}}$ ,  $\Delta_{\delta \text{.y0}}$  соответствующие зазоры, в пределах которых работают буксовые рессорные комплекты. После выбора этих зазоров необходимо учиты-

вать жесткости и коэффициенты вязкого трения конструкции. Перемещения и силы, возникающие после выбора этих зазоров, равны:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\delta x i m k}^k &= \Delta_{\delta x i m k}, \\ \Delta_{\delta y i m k}^k &= \Delta_{\delta y i m k}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$S_{\delta x i m k}^k = \begin{cases} 0, & \text{если } |\Delta_{\delta x i m k}^k| \leq \Delta_{\delta x 0}; \\ k_{\delta x}^k \left[ \Delta_{\delta x i m k}^k - (-1)^k \Delta_{\delta x 0} \right] \beta_{\delta x}^k \dot{\Delta}_{\delta x i m k}^k, & \text{если } |\Delta_{\delta x i m k}^k| > \Delta_{\delta x 0}; \end{cases}$$

$$S_{\delta y i m k}^k = \begin{cases} 0, & \text{если } |\Delta_{\delta y i m k}^k| \leq \Delta_{\delta y 0}; \\ k_{\delta y}^k \left[ \Delta_{\delta y i m k}^k - (-1)^k \Delta_{\delta y 0} \right] \beta_{\delta y}^k \dot{\Delta}_{\delta y i m k}^k, & \text{если } |\Delta_{\delta y i m k}^k| > \Delta_{\delta y 0}. \end{cases} \quad (20)$$

Силы, действующие на колесную пару в зоне контакта, определяются как обычно по теории Картера [2; 3].

Для составления дифференциальных уравнений колебаний системы воспользуемся уравнением Лагранжа 2-го рода в виде:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \right) = Q_n, \quad (21)$$

где  $T$  – кинетическая энергия системы;  $q_n$  – обобщенные координаты;  $Q_n$  – соответствующие им обобщенные силы.

Составим кинетическую энергию системы по теореме Кенига:

$$T = T_0 + \sum_{i=1}^2 T_{hi} + \sum_{i=1}^2 T_i + \sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^2 T_{im} + \sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{k=1}^2 T_{pimk}. \quad (22)$$

Кинетическая энергия кузова выражена в обобщенных координатах:

$$T_0 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} I_x \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_y \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_z \dot{\psi}^2.$$

Кинетическая энергия надрессорных балок

$$\sum_{i=1}^2 T_{hi} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left[ m_n (\dot{x}_{hi}^2 + \dot{y}_{hi}^2 + \dot{z}_{hi}^2) + \frac{1}{2} I_{hx} \dot{\theta}_{hi}^2 + \frac{1}{2} I_{hy} \dot{\phi}_{hi}^2 + \frac{1}{2} I_{hz} \dot{\psi}_{hi}^2 \right]$$

с использованием уравнений связи может быть выражена через обобщенные координаты следующим образом:

$$\sum_{i=1}^2 T_{hi} = \frac{1}{2} 2m_n \dot{z}^2 + \frac{1}{2} 2(m_n J^2 + I_{ny}) \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} 2I_{nx} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left[ m_n (\dot{x}_{hi}^2 + \dot{y}_{hi}^2) + I_{nz} \dot{\psi}_{hi}^2 \right].$$

Кинетическая энергия рам тележек выражена в обобщенных координатах:

$$\sum_{i=1}^2 T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \left[ m_r (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) + \frac{1}{2} I_{tx} \dot{\theta}_i^2 + \frac{1}{2} I_{ty} \dot{\phi}_i^2 + \frac{1}{2} I_{tz} \dot{\psi}_i^2 \right].$$

Кинетическая энергия колесных пар равна

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^2 T_{im} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left[ \left( m_k + \frac{I_{ky}}{r^2} \right) x_{im}^2 + m_k (\dot{y}_{im}^2 + \dot{z}_{im}^2) + I_{kx} \dot{\theta}_{im}^2 + I_{kz} \dot{\psi}_{im}^2 \right].$$

Кинетическая энергия приведенных масс рельсов в точках контакта имеет много динамических связей. Запишем здесь только диагональные члены:

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{k=1}^2 T_{pimk} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^2 m_z \left[ 2\dot{z}_{im}^2 + (tg^2 \alpha_{im1} + tg^2 \alpha_{im2}) \dot{y}_{im}^2 + (b_{im1}^2 + b_{im2}^2) \dot{\theta}_{im}^2 \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{k=1}^2 m_y \dot{y}_{pimk}^2,$$

где  $m_z$ ,  $m_y$  – приведенные массы пути в вертикальном и горизонтальном поперечных направлениях,  $tg \alpha_{imk}$  – тангенс угла наклона поверхности катания колеса к рельсу в точке контакта,

$$b_{imk} = (-1)^k b_2 - r \operatorname{tg} \alpha_{imk}.$$

Общее выражение для кинетической энергии имеет вид:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \left[ a_z \dot{z}^2 + a_\varphi \dot{\varphi}^2 + a_\theta \dot{\theta}^2 + a_y \dot{y}^2 + a_\psi \dot{\psi}^2 + \right. \\ & + a_x \dot{x}^2 + \sum_{i=1}^2 \left( a_{zi} \dot{z}_i^2 + a_{\varphi i} \dot{\varphi}_i^2 + a_{\theta i} \dot{\theta}_i^2 + a_{yi} \dot{y}_i^2 + \right. \\ & \left. \left. + a_{\psi i} \dot{\psi}_i^2 + a_{xi} \dot{x}_i^2 + a_{y_{\text{ни}}} \dot{y}_{\text{ни}}^2 + a_{\psi_{\text{ни}}} \dot{\psi}_{\text{ни}}^2 + a_{x_{\text{ни}}} \dot{x}_{\text{ни}}^2 \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left( a_{zim} \dot{z}_{im}^2 + a_{\theta im} \dot{\theta}_{im}^2 + a_{yim} \dot{y}_{im}^2 + a_{\psi im} \dot{\psi}_{im}^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + a_{xim} \dot{x}_{im}^2 \right) + \sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{k=1}^2 a_{y_{\text{пимк}}} \dot{y}_{\text{пимк}}^2 \right], \quad (23) \end{aligned}$$

где инерционные коэффициенты определяются следующим образом:

$$a_z = m + 2m_{\text{н}}, \quad a_\varphi = I_y + 2I_{\text{н}y} + 2m_{\text{н}}l^2,$$

$$a_\theta = I_x + 2I_{\text{н}x} \quad a_y = m,$$

$$a_\psi = I_z, \quad a_x = m,$$

$$Q_z = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left( S_{uzik} + S_{uzik}^{\text{л}} + S_{uzik}^{\text{п}} \right),$$

$$Q_\varphi = - \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^m l \left( S_{uzik} + S_{uzik}^{\text{л}} + S_{uzik}^{\text{п}} \right) - h_c \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 S_{czik} - h_{\text{ш}} \sum_{i=1}^2 S_{\text{ш}xi},$$

$$Q_\theta = - \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^k \left( b S_{uzik} + b_{\text{дн}} S_{uzik}^{\text{л}} + b_{\text{пц}} S_{uzik}^{\text{п}} \right) + h_c \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 S_{cyik} - h_{\text{ш}} \sum_{i=1}^2 S_{\text{ш}yi},$$

$$Q_y = - \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 S_{cyik} - \sum_{i=1}^2 S_{\text{ш}yi}, \quad Q_\psi = - \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left[ (-1)^i l S_{cyik} + (-1)^k b_c S_{cxik} \right] + \sum_{i=1}^2 (-1)^i l S_{\text{ш}yi},$$

$$Q_{zi} = \sum_{k=1}^2 \left( S_{uzik} + S_{uzik}^{\text{л}} + S_{uzik}^{\text{п}} \right) - \sum_{m=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left( S_{\delta zimk} + S_{\delta zimk}^{\text{п}} \right), \quad Q_{\varphi i} = -l_1 \sum_{m=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^m \left( S_{\delta zimk} + S_{\delta zimk}^{\text{п}} \right),$$

$$Q_{\theta i} = \sum_{k=1}^2 (-1)^k \left( b S_{uzik} + b_{\text{дм}} S_{uzik}^{\text{л}} + b_{\text{пц}} S_{uzik}^{\text{п}} \right) - \sum_{m=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^k \left( b_1 S_{\delta zimk} + b_{\text{п}\sigma} S_{\delta zimk}^{\text{п}} \right) + h_{\text{дт}} \sum_{k=1}^2 S_{\text{ц}yik}^{\text{л}},$$

$$Q_{yi} = \sum_{k=1}^2 \left( S_{\text{ц}yik} + S_{\text{ц}yik}^{\text{л}} + S_{\text{ц}yik}^{\text{п}} + S_{\text{ц}yik}^{\text{к}} \right) - \sum_{m=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left( S_{\delta yimk} + S_{\delta yimk}^{\text{п}} + S_{\delta yimk}^{\text{к}} \right),$$

$$a_{zi} = a_{yi} = m_m, \quad a_{\varphi i} = I_{m_y}, \quad a_{\theta i} = I_{m_x},$$

$$a_{\psi i} = I_{m_z}, \quad a_{y_{\text{ни}}} = a_{x_{\text{ни}}} = m_{\text{н}},$$

$$a_{\psi_{\text{ни}}} = I_{\text{н}z}, \quad a_{zim} = m_{\text{к}} + 2m_z,$$

$$a_{\theta im} = I_{\text{к}x} + m_z \left( b_{im1}^2 + b_{im2}^2 \right),$$

$$a_{yim} = m_{\text{к}} + m_z \left( \operatorname{tg}^2 \alpha_{im1} + \operatorname{tg}^2 \alpha_{im2} \right),$$

$$a_{\psi im} = I_{\text{к}z}, \quad a_{xim} = m_{\text{к}} + \frac{I_{\text{к}y}}{r^2},$$

$$a_{y_{\text{пимк}}} = m_y.$$

Составим дифференциальные уравнения колебаний системы. Подставив выражения для кинетической энергии (23) в уравнение Лагранжа 2-го рода (21), получим систему дифференциальных уравнений в следующем виде:

$$a_n \ddot{q}_n = Q_n \quad (n = \overline{1, 52}). \quad (24)$$

Для интегрирования системы дифференциальных уравнений (24) составлена программа вычислений.

Обобщенные силы, входящие в систему уравнений (24), имеют вид:

$$\begin{aligned}
Q_{\Psi i} &= \sum_{k=1}^2 (-1)^k (b S_{\text{цхик}} + b_{\text{пц}} S_{\text{цхик}}^{\text{п}} + b_{\text{с}} S_{\text{цхик}}^{\text{к}}) + \sum_{m=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^k (b_i S_{\text{бхик}} + b_{\text{пб}} S_{\text{бхик}}^{\text{п}} + b_i S_{\text{бхик}}^{\text{к}}) + \\
&\quad + l_1 \sum_{m=1}^2 \sum_{k=1}^2 (-1)^m (S_{\text{бyimk}} + S_{\text{бyimk}}^{\text{п}} + S_{\text{бyimk}}^{\text{к}}), \\
Q_{zim} &= \sum_{k=1}^2 (S_{\text{бзим}} + S_{\text{бзим}}^{\text{п}}) - \sum_{k=1}^2 S_{\text{бзим}}, \\
Q_{\theta im} &= \sum_{k=1}^2 (-1)^k (b_1 S_{\text{бзимк}} + b_{\text{пб}} S_{\text{бзимк}}^{\text{п}}) - \sum_{k=1}^2 \left[ r (T_{yimk} - P_{\text{ср}} \text{tg} \alpha_{imk}) + (-1)^k b_2 S_{\text{бзимк}} \right], \\
Q_{yim} &= \sum_{k=1}^2 (S_{\text{бyimk}} + S_{\text{бyimk}}^{\text{п}} + S_{\text{бyimk}}^{\text{к}}) + \sum_{k=1}^2 (T_{yimk} - P_{\text{ср}} \text{tg} \alpha_{imk}), \\
Q_{\Psi im} &= - \sum_{k=1}^2 (-1)^k (b_1 S_{\text{бхик}} + b_{\text{пб}} S_{\text{бхик}}^{\text{п}} + b_1 S_{\text{бхик}}^{\text{к}} + b_2 T_{ximk}), \\
Q_{\Psi ni} &= S_{\Psi yi} + \sum_{k=1}^2 (S_{\text{сyик}} - S_{\text{цyик}} - S_{\text{цyик}}^{\text{п}} - S_{\text{цyик}}^{\text{к}} - S_{\text{цyик}}^{\text{к}}), \\
Q_{\Psi ni} &= - \sum_{k=1}^2 (-1)^k (b_{\text{с}} S_{\text{схик}} - b S_{\text{цхик}} - b_{\text{пц}} S_{\text{цхик}}^{\text{п}} - b_{\text{с}} S_{\text{цхик}}^{\text{к}}) \quad Q_{ypimk} = -S_{\text{бyimk}}, \\
Q_{xi} &= \sum_{k=1}^2 (S_{\text{цхик}} + S_{\text{цхик}}^{\text{п}} + S_{\text{цхик}}^{\text{к}}) - \sum_{m=1}^2 \sum_{k=1}^2 (S_{\text{бхик}} + S_{\text{бхик}}^{\text{п}} + S_{\text{бхик}}^{\text{к}}), \\
Q_{xni} &= S_{\Psi xi} + \sum_{k=1}^2 (S_{\text{схик}} - S_{\text{цхик}} - S_{\text{цхик}}^{\text{п}} - S_{\text{цхик}}^{\text{к}}), \\
Q_{xim} &= \sum_{k=1}^2 (S_{\text{бхик}} + S_{\text{бхик}}^{\text{п}} + S_{\text{бхик}}^{\text{к}}), \quad Q_x = - \sum_{i=1}^2 S_{\Psi xi} - \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 S_{\text{схик}}.
\end{aligned}$$

Аналогичные математические модели разработаны и для других рельсовых экипажей [4–8]. С использованием разработанной математической модели проведены обширные теоретические исследования по изучению пространственных колебаний пассажирских вагонов новых моделей производства Крюковского вагоностроительного завода. Исследования проводились в рабочем диапазоне скоростей 20...200 км/ч на различных участках пути. Результаты расчетов подтвердили правильность конструкторских решений [9].

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Блохин Е. П. Математическая модель пространственных колебаний четырехосного рельсового экипажа / Е. П. Блохин, В. Д. Данович, Н. И. Морозов; Днепропетровский институт инженеров железнодорожного транспорта. – Д., 1986. – 39 с. – Рус. – Деп. в ЦНИИТЭИ МПС 29.09.86, № 7252 ж. д.
2. Carter F.W. On the Action of a Locomotive Driving Wheel // Proc. Royal Soc. – vol. 112, ser. A. – 1926. – P. 151–157.
3. Carter F.W. On the Stability of Running of Locomotives // Proc. Royal Soc. – vol. 121, ser. A. – 1928. – P. 585–611.
4. Данович В. Д. Математическая модель пространственных колебаний электровоза с модернизированной схемой соединения кузова с тележками / В. Д. Данович, М. Л. Коротенко, С. В. Мямлин, Л. А. Недужая // Транспорт: Межвуз. сб. науч. тр. – Д.: Січ. – 1999. – С. 183–190.
5. Мямлін С. В. Вплив додаткових зв'язків між елементами ходових частин на динаміку вантажного вагона // Міжнар. симпозіуму Українських інженерів-механіків: Тези доп. – Львів: Львівська політехніка. – 1995. – С. 75.
6. Мямлин С. В. Математическая модель для исследования динамики электровоза / С. В. Мямлин, Е. П. Блохин, В. Д. Данович, Л. А. Недужая // Материалы Междунар. научн.-техн. конф. «Современные проблемы машиноведения». – Гомель: ГПИ им. Сухого П. О. – 1996. – С. 99–100.

7. Блохин Е. П. Динамика вагона с дополнительными связями между элементами ходовых частей / Е. П. Блохин, С. В. Мямлин // 2-я Международ. научно-техн. конф. «Актуальные проблемы развития железнодорожного транспорта»: Тез. докл. Т. II. – М.: МИИТ. – 1996. – С. 92.
8. Blokhin E. Influence of railway vehicles models degree of detail on the results of wheel wear prediction / E. Blokhin, V. Danovich, S. Myamlin, V. Litwin // Proc. 2nd Mini Conf. on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems. – Budapest: Techn. Univ. of Budapest. – 1996. – P. 297–303.
9. Мямлин С. В. Моделирование динамики рельсовых экипажей. – Д.: Новая идеология, 2002. – 240 с.

Поступила в редколлегию 05.03.2005.