УДК 519.6

А. А. БОСОВ (ДИИТ), Б. П. ПИХ (Львовская ж. д.)

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РЕКОНСТРУКЦИИ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ МЕТОДОМ ОПТИМИЗАЦИИ ЛАГРАНЖА

Задачі реконструкції транспортних засобів сформульовані як задачі векторної оптимізації. Запропонована методика побудови трьох розв’язків задач на умовний екстремум з використанням технолого-економічної карти. Розв’язок, отриманий за допомогою функції Лагранжа, є випуклою комбінацією для точок точного розв’язку.

Задачи реконструкции транспортных средств сформулированы как задачи векторной оптимизации. Предложена методика построения трех решений задач на условный экстремум с использованием технолого-экономической карты. Решение, полученное с помощью функции Лагранжа, является выпуклой комбинацией для точек точного решения.

The tasks of reconstruction of vehicles are formulated as the problems of vector optimization. The authors have proposed a method of constructing the three solution of conventional extremum tasks with the use of technological & economic card. The solution, obtained with the use of Lagrange function, is a prominent combination for the points of precise solution.

В данной работе рассматривается задача векторной оптимизации

$$\begin{pmatrix} z(\gamma) \\ -\tau(\gamma) \end{pmatrix} \to \min \tag{1}$$

при условии, что

$$\gamma \in \Gamma. \tag{2}$$

В инженерной интерпретации γ – перечень работ (мероприятий) по реконструкции пути и подвижного состава железнодорожного направления, по которому желаем ускорить доставку грузов и пассажиров. Данному перечню работ γ соответствуют затраты средств $z(\gamma)$ и сокращение времени доставки $\tau(\gamma)$. Относительно множества Γ предполагаем, что оно дискретно и конечно. С математической точки зрения γ – селектор многозначного отображения

$$\Gamma(\omega):\Omega \to \mathrm{A},$$

где a – множество мероприятий, которые могут быть использованы, например, при реконструкции пути; Ω – перечень элементов ω, из которых состоит путь.

Решением задачи векторной оптимизации (1)–(2) является множество $\Gamma_* \subseteq \Gamma$, элементы которого образуют наборы γ_* между собой несравнимые.

Не ограничивая общности рассмотрения, считаем, что $\gamma_* \in \Gamma_*$ пронумерованы так, что имеет место

$$\begin{bmatrix} z(\gamma_i) < z(\gamma_{i+1}) \\ \tau(\gamma_i) < \tau(\gamma_{i+1}) \end{bmatrix}, i = \overline{1, n}, \tag{3}$$

где n – число вариантов γ_* в множестве Γ_*.

Если исходное множество Γ содержит незначительное количество вариантов γ, то построение множества Γ_* можно выполнять непосредственным перебором, используя правило отбора (критерий) (3).

Однако при решении реальных задач по реконструкции транспортных средств применение непосредственного перебора является неэффективным с точки зрения затрат времени на получение решения исходной задачи (1)–(2).

Поэтому с задачей (1)–(2) связывают задачу на условный экстремум

$$z(\gamma) \to \min \tag{4}$$

при условии, что

$$\tau(\gamma) \ge \tau_*, \quad \gamma \in \Gamma, \tag{5}$$

решение которой определяют по методу Лагранжа, сводя задачу (4)–(5) к задаче минимизации функции Лагранжа [1]

$$L(\gamma,\mu) = z(\gamma) - \mu\tau(\gamma), \ \gamma \in \Gamma,$$

где μ – неопределенный множитель Лагранжа, такой, что $\mu \ge 0$.

Обозначим через $\gamma(\mu)$ решение задачи

$$L(\gamma,\mu) \to \min, \quad \gamma \in \Gamma.$$

Неопределенный множитель Лагранжа традиционно определяется из неравенства $\tau\left[\gamma(\mu)\right] \geq \tau_*$. Мы же поступим иначе. Сформируем множество

$$\tilde{\Gamma}_* = \left\{\gamma(\mu) : \mu \geq 0, L\left[\gamma(\mu), \mu\right] = \min_{\gamma \in \Gamma} L(\gamma, \mu)\right\}. \quad (6)$$

Теорема. Множество $\tilde{\Gamma}_*$ является выпуклой комбинацией множества Γ_*.

Утверждение этой теоремы необходимо понимать в том смысле, что если элементам из $\tilde{\Gamma}_*$ и Γ_* поставить в соответствие точки на плоскости (z, τ), то точки, соответствующие множеству $\tilde{\Gamma}_*$, образуют выпуклую комбинацию точек (z, τ), соответствующих $\gamma_* \in \Gamma_*$.

Доказательство теоремы будем проводить в предположении, что

$$z(\gamma) \geq 0, \quad \tau(\gamma) \geq 0 \quad \text{при} \quad \gamma \in \Gamma. \quad (7)$$

Если это условие не выполняется, то введя разности

$$z(\gamma) - \min_{\gamma \in \Gamma} z(\gamma);$$

$$\tau(\gamma) - \min_{\gamma \in \Gamma} \tau(\gamma),$$

приходим к соотношениям (7) для данных разностей.

На плоскости с координатами L и μ функция Лагранжа при $\gamma \in \Gamma$ как функция μ представляет собой прямую, причем этих прямых конечное количество в силу конечности множества Γ. Если в функцию Лагранжа вместо γ поставить $\gamma(\mu)$, то получим кусочно-линейную кривую, которая является огибающей снизу указанных прямых.

Пусть $\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_m$ представляют собой точки излома огибающей, тогда $\gamma(\mu_1)$, $\gamma(\mu_2), \ldots, \gamma(\mu_m)$ представляют содержание множества Γ_*, а пары точек

$$z_i = z\left[\gamma(\mu_i)\right]; \quad (8)$$

$$\tau_i = \tau\left[\gamma(\mu_i)\right], \; i = \overline{1, m}$$

будут отображением множества $\tilde{\Gamma}_*$ на плоскость функционалов (z, τ).

Возьмем какие-либо три точки (z_i, τ_i), (z_{i+1}, τ_{i+1}), (z_{i+2}, τ_{i+2}), тогда из свойства огибающей имеем:

$$z_i - \mu_{i+1}\tau_i = z_{i+1} - \mu_{i+1}\tau_{i+1};$$

$$z_{i+1} - \mu_{i+2}\tau_{i+1} = z_{i+2} - \mu_{i+2}\tau_{i+2}.$$

Откуда в силу того, что $\mu_{i+1} < \mu_{i+2}$ получаем

$$\frac{z_{i+1} - z_i}{\tau_{i+1} - \tau_i} < \frac{z_{i+2} - z_{i+1}}{\tau_{i+2} - \tau_{i+1}},$$

что эквивалентно неравенству

$$z_{i+1} < \frac{z_{i+2} - z_i}{\tau_{i+2} - \tau_i}\left(\tau_{i+1} - \tau_i\right) + z_i,$$

которое означает, что ломаная, проходящая через точки (8), является выпуклой.

Рассмотрим $\mu \in (\mu_i, \mu_{i+1})$. Откуда получаем

$$z_i - \mu\tau_i < z_{i+1} - \mu\tau_{i+1}$$

или

$$\mu\left(\tau_{i+1} - \tau_i\right) < z_{i+1} - z_i. \quad (9)$$

Если $\mu = \mu_{i+1}$, то неравенство (9) переходит в равенство

$$\mu_{i+1}\left(\tau_{i+1} - \tau_i\right) = z_{i+1} - z_i,$$

что следует из свойства огибающей.

Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что $\mu_1 < \mu_2 - \varepsilon$, тогда из неравенства (9) получаем

$$-\varepsilon\left(\tau_{i+1} - \tau_i\right) < 0,$$

что имеет место, если $\tau_{i+1} > \tau_i$, но тогда из (9) следует $z_{i+1} > z_i$. Таким образом, точки из последовательности (8) удовлетворяют соотношению

$$\begin{pmatrix} z_i < z_{i+1} \\ \tau_i < \tau_{i+1} \end{pmatrix}, i = \overline{1, m},$$

а в силу критерия (3) они образуют несравнимые варианты, что и доказывает теорему.

Доказанная теорема может быть обобщена для случая, когда множество Γ является континуумом. Чтобы не загромождать исследования, будем рассматривать случай, когда Γ является отрезком действительной оси $\Gamma = \left\{x : a \leq x \leq b\right\}$, а $z(x)$ и $\tau(x)$ определены и непрерывны вместе со своими первыми производными по x при $x \in \Gamma$.

Задача векторной оптимизации имеет вид

$$\begin{bmatrix} z(x) \\ -\tau(x) \end{bmatrix} \to \min$$

при условии $x \in \Gamma$.

В предположении существования ее решения $\Gamma_* \subseteq \Gamma$ имеем, что $\forall x_* \in \Gamma_*$ является эффективным, т. е. любая вариация x_* приводит к увеличению $z(x_*)$ или уменьшению $\tau(x_*)$.

Функция Лагранжа принимает вид

$$L(x,\mu)=z(x)-\mu\tau(x),$$

минимум которой достигается при $x=x(\mu)\in\Gamma$. Существование $x(\mu)$ следует из теоремы Вейерштрасса [1].

Из необходимого условия минимума $L(x,\mu)$ следует

$$\left(\frac{dz}{dx}-\mu\frac{d\tau}{dx}\right)\Bigg|_{x=x(\mu)}=0.$$

Откуда, если

$$\left.\frac{d\tau}{dx}\right|_{x=x(\mu)}\neq 0,$$

получаем

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x(\mu)}=\mu.$$

И так как $\mu\geq 0$, то кривая $z=z(\tau)$ или в параметрической форме

$$\tilde{P}_*=\begin{cases}z=z\left[x(\mu)\right],\\ \tau=\tau\left[x(\mu)\right],\mu\geq 0\end{cases}$$

является возрастающей и выпуклой кривой. Если построить кривую

$$P_*=\left\{(z,\tau):z=z(x_*),\tau=\tau(x_*),x_*\in\Gamma_*\right\},$$

то имеем $\tilde{P}_*\subseteq P_*$, что и является вариантом доказанной теоремы в континуальном случае. Не останавливаясь на случае, когда z и τ полунепрерывные снизу функции, перейдем к рассмотрению ситуации, когда они являются функциями множества.

Определенности ради будем рассматривать пространство с мерой

$$<\Omega,\mathbf{A}(\Omega),\lambda(\cdot)>,$$

где $\mathbf{A}(\Omega)$ – алгебра, элементы которой являются подмножествами множества Ω. На элементах из $\mathbf{A}(\Omega)$ определена и конечна мера $\lambda(\cdot)$. Относительно меры $\lambda(\cdot)$ предполагаем, что она однородна и аддитивна. Относительно z и τ предполагаем, что они определены и конечны на элементах из $\mathbf{A}(\Omega)$, причем удовлетворяют условиям:

1. $\tau(\varnothing)=z(\varnothing)=0;$
2. $\forall E\in\mathbf{A}(\Omega)$,

имеем $z(E)>0;\ \ \tau(E)>0$ если $E\neq\varnothing$.

Задачу векторной оптимизации формально можно записать в виде

$$\begin{pmatrix}z(E)\\ -\tau(E)\end{pmatrix}\to\min \tag{10}$$

при условии $E\in\mathbf{A}(\Omega)$.

Пусть $\omega\in E$ и B_n, $n=1,2,\ldots$ последовательность множеств из $\mathbf{A}(\Omega)$, которая имеет своим пределом одноточечное множество $\{\omega\}$. Считаем, что существуют внутренние производные от $z(E)$ и $\tau(E)$ ω в точке на последовательности $\{B_n\}$. [2]

С задачей (10) связываем задачу на условный экстремум

$$z(E)\to\min \tag{11}$$

при условии

$$\tau(E)\geq\tau_*,\ E\in\mathbf{A}(\Omega).$$

Вводим функцию Лагранжа

$$L(E,\mu)=z(E)-\mu\tau(E),\quad \mu\geq 0.$$

Пусть $E_*(\mu)$ такое подмножество множества Ω из $\mathbf{A}(\Omega)$, при котором функция Лагранжа принимает минимальное значение, а набор $\tilde{\varepsilon}_*=\left\{E_*(\mu):\mu\geq 0\right\}$ – множество решений задачи (11) при различных τ_* или $\mu\geq 0$.

Если ε_* – решение задачи векторной оптимизации, то в данных обозначениях рассмотренная теорема принимает вид $\tilde{\varepsilon}_*\subseteq\varepsilon_*$.

Что касается отображений множеств ε_* и $\tilde{\varepsilon}_*$ на плоскость функционалов (z,τ), то отображение множества $\tilde{\varepsilon}_*$ является выпуклой комбинацией для точек отображения множества ε_*.

Доказательство этих фактов выполним для случая, когда множество Ω является конечным дискретным, а $\mathbf{A}(\Omega)$ всевозможные подмножества множества Ω.

Если $E_*(\mu)$ при фиксированном μ доставляет минимум функции Лагранжа $L(E,\mu)$, то имеет место

$$L(E,\mu)-L\left[E_*(\mu),\mu\right]\geq 0.$$

Выбирая множество E в виде

$$E=E_*(\mu)\Delta B_n,$$

где Δ – операция симметрической разности двух множеств, получаем

$$DL \equiv L\left[E_*(\mu)\Delta B_n, \mu\right] - L\left[E_*(\mu), \mu\right] \geq 0,$$

а изменение меры будет

$$D\lambda \equiv \lambda\left[E_*(\mu)\Delta B_n\right] - \lambda\left[E_*(\mu)\right] = -\lambda(B_n).$$

Отношение полученных разностей удовлетворяет неравенству

$$\left.\frac{DL}{D\lambda}\right|_{B_n} \leq 0.$$

Устремляя $n \to \infty$, получаем

$$\left.\frac{dL}{d\lambda}\right|_{\{B_n\}\to\{\omega\}} = \left.\left(\frac{dz}{d\lambda} - \mu\frac{d\tau}{d\lambda}\right)\right|_{\{B_n\}\to\{\omega\}} \leq 0. \quad (12)$$

Относительно выбора меры $\lambda(\cdot)$ предполагаем, что она однородная и аддитивная функция множества. Чтобы воспользоваться неравенством (12), на меру $\lambda(\cdot)$ накладываем условие:

1. Если E содержит изолированные точки ω', то

$$\lambda(E) = \lambda_L(E) + \sum_{\omega'\in E} H(\omega'),$$

где $\lambda_L(E)$ Лебегова мера множества E.

2. $H(\omega') = 1, \forall \omega' \in E.$

При этих предположениях неравенство (12) принимает вид

$$z\left[E_*(\mu)\setminus\{\omega\}\right] - z\left[E_*(\mu)\right] -$$

$$-\mu\left\{\tau\left[E_*(\mu)\setminus\{\omega\}\right] - \tau\left[E_*(\mu)\right]\right\} \geq 0. \quad (13)$$

Далее считаем, что функции множества $z(E)$ и $\tau(E)$ имеют вид

$$\begin{cases} z(E) = \sum\limits_{\omega\in E} z(\{\omega\}), \\ \tau(E) = \sum\limits_{\omega\in E} \tau(\{\omega\}). \end{cases} \quad (14)$$

При таком представлении неравенство (13) будет следующим:

$$-z(\{\omega\}) + \mu\tau(\{\omega\}) \geq 0,$$

что с необходимостью позволяет сформировать множество

$$E_*(\mu) = \left\{\omega \in \Omega : z(\{\omega\}) - \mu\tau(\{\omega\}) \leq 0\right\}, \quad (15)$$

тогда

$$L\left[E_*(\mu)\right] = z\left[E_*(\mu)\right] - \mu\tau\left[E_*(\mu)\right] \leq 0,$$

а так как

$$L(E,\mu) \geq L\left[E_*(\mu), \mu\right],$$

то на плоскости с координатами (L,μ) ломаная

$$L = z\left[E_*(\mu)\right] - \mu\tau\left[E_*(\mu), \mu\right]$$

является огибающей снизу прямых

$$L = z(E) - \mu\tau(E), \quad E \in \mathbf{A}(\Omega).$$

Заметим, что в силу дискретности и конечности множества Ω следует конечность и дискретность $\mathbf{A}(\Omega)$ и, если пронумеровать элементы из $\mathbf{A}(\Omega)$, то получаем последовательность пар

$$\begin{cases} z_i = z(E_i), \\ \tau_i = \tau(E_i), i = \overline{1,n}, \end{cases}$$

где n – число элементов множества $\mathbf{A}(\Omega)$.

Данное замечание сводится к рассматриваемому случаю, для которого доказывалась теорема. Более того, представление (14) не обязательно при доказательстве отношения $\tilde{\varepsilon}_* \subseteq \varepsilon_*$.

Представление (14) позволяет конструктивно строить множество $E_*(\mu)$ и использовать его, если имеет место

$$z(E) \leq \sum_{\omega\in E} z(\{\omega\}); \quad (16)$$

$$\tau(E) \geq \sum_{\omega\in E} \tau(\{\omega\}). \quad (17)$$

Неравенство (16) имеет место, когда некоторые элементы из Е имеют общие операции в соответствии с технолого-экономической картой (ТЭК) реконструкции того или иного объекта (перегона, станции и т. д.) [3]

Что касается неравенства (17), то с ним впервые встретились при выполнении тяговых расчетов [4]. Действительно, если ω_1 и ω_2 – два элемента на перегоне, которые подвергаются реконструкции, то выполнив реконструкцию элемента ω_1, получим время движения поезда t_1, которое меньше чем t_0 – время движения поезда до реконструкции и сокращение времени движения будет $\tau_1 = t_0 - t_1$.

Аналогично получаем и для элемента ω_2: $\tau_2 = t_0 - t_2$.

Если же выполнены реконструкции обоих элементов, то сокращение времени хода составит $\tau_{12} = t_0 - t_{12}$.

В общем случае имеет место $\tau_{12} \ge \tau_1 + \tau_2$. Равенство достигается в том случае, когда расстояние между элементами больше расстояния, на котором реализуется переход поезда с одной скорости движения на другую.

В математической литературе [5] функции типа $z(E)$ известны как полуаддитивные функции множества. Чтобы различать ситуации (16) и (17) предлагается функции типа $z(E)$ называть полуаддитивными сверху, а функции типа $\tau(E)$ – полуаддитивными снизу.

Взяв в качестве

$$\tilde{z}(E) = \sum_{\omega \in E} z(\{\omega\});$$

$$\tilde{\tau}(E) = \sum_{\omega \in E} \tau(\{\omega\})$$

и решив задачу

$$\begin{bmatrix} \tilde{z}(E) \\ -\tilde{\tau}(E) \end{bmatrix} \to \min \qquad (18)$$

при $E \in \mathbf{A}(\Omega)$, получаем решение, которое гарантирует, что затраты будут не более, а время сокращения хода поезда не менее, чем для вариантов решения задачи (18).

Если $\underset{\sim}{z}(E)$ – аддитивная функция, но такая, что выполняется неравенство

$$\underset{\sim}{z}(E) \le z(E), \quad \forall E \in \mathbf{A}(\Omega),$$

то рассмотрение задачи

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{z}(E) \\ -\tilde{\tau}(E) \end{bmatrix} \to \min \qquad (19)$$

при условии $\forall E \in \mathbf{A}(\Omega)$, позволяет построить решение, дающее оценку затрат снизу. Тем самым задачи (18) и (19) приводят к оценке решения исходной задачи (10) снизу и сверху по затратам средств с гарантированной оценкой снизу по сокращению времени хода поезда.

В общем случае построение аддитивных функций множества $\underset{\sim}{z}(E)$ и $\tilde{z}(E)$ выходит за рамки данной работы. Ограничимся ситуацией, когда для реконструкции объекта, состоящего из элементов $\omega_i \in \Omega$, необходимо выполнение работы $A_j \in \mathcal{A}$ – перечень работ при заданной организации и технологии реконструкции. Пусть c_j – затраты средств при выполнении работы A_j, $j = \overline{1, N}$. Работа A_j может понадобиться нескольким элементам из Ω, что будем отражать в виде матрицы T, элементы которой представляют собой

$$T_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если работа } A_j \text{ необходима для } \omega_i, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Точная формула для вычисления $z(E)$ будет следующей:

$$z(E) = \sum_{j=1}^{N} c_j \sigma\left(\sum_{\omega_i \in E} T_{ij} \right),$$

где

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, x > 0; \\ 0, x \le 0. \end{cases}$$

Положив

$$\overline{z}(\{\omega_i\}) = \sum_{j=1}^{N} c_j T_{ij}, \qquad (20)$$

получим

$$z(E) \le \sum_{\omega_i \in E} \overline{z}(\{\omega_i\}).$$

Для получения аддитивной оценки снизу принимаем

$$\underline{z}(\{\omega_i\}) = \sum_{j=1}^{N} \frac{c_j}{\sum_{\omega_i \in \Omega} T_{ij}} T_{ij} = \sum_{j=1}^{N} \underline{c}_j T_{ij}, \qquad (21)$$

что приводит к неравенству

$$\sum_{\omega_i \in E} \underline{z}(\{\omega_i\}) \le z(E),$$

а равенство достигается только тогда, когда множество E содержит все элементы, для реконструкции которых и только их необходим перечень работ $\tilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}$, а для $\omega_i \in \Omega \setminus E$ работы из перечня не используются.

Рассмотрим числовой пример, исходная информация которого дана в табл. 1, представляет собой ТЭК для объекта, состоящего из семи элементов $\omega_i, i = \overline{1,7}$. Реконструкция этого объекта предусматривает выполнение двадцати работ A_j, $j = \overline{1, 20}$. Строчка c_j – в табл. 1 рассчитана по формуле

$$\underline{c}_j = \frac{c_j}{\sum_{i=1}^{7} T_{ij}},$$

а столбцы $\underline{z}(\omega_i)$ и $\overline{z}(\omega_i)$ определены по формулам (21) и (20) соответственно.

Таблица 1

A_i \ ω_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}	A_{17}	A_{18}	A_{19}	A_{20}	ς_i	$\bar{z}(\omega_i)$	$\tau(\omega_i)$
ω_1	1		1	1	1										1		1		1	1	4,7931	14,1	7,0
ω_2	1	1	1			1						1			1	1		1	1	1	7,3231	21,0	11,0
ω_3	1		1	1			1					1			1	1	1		1	1	8,0831	21,6	12,0
ω_4	1	1		1				1					1			1		1		1	7,6131	16,6	7,8
ω_5	1	1	1	1					1			1	1			1	1			1	8,8831	20,5	9,5
ω_6	1		1							1		1	1	1		1		1	1	1	10,7731	24,3	15,0
ω_7	1	1		1							1			1			1	1	1	1	9,1314	20,0	9,0
c_i	0,5000	1,20	1,60	1,30	2,1	3,3	4,2	4,9	5,4	6,3	5,5	2,20	1,7000	1,50	1,7000	3,20	2,700	3,100	3,5	0,7			
$\sum_i T_{ij}$	7,0000	4,00	5,00	5,00	1,0	1,0	1,0	1	1,0	1,0	1,0	4,00	3,0000	2,00	3,0000	5,00	4,000	4,000	5,0	7,0			
ω_i	0,0714	0,30	0,32	0,26	2,1	3,3	4,2	4,9	5,4	6,3	5,5	0,55	0,5667	0,75	0,5667	0,64	0,675	0,775	0,7	0,1			

Возьмем множество E, состоящее из элементов $E = \{\omega_1, \omega_5, \omega_7\}$, и вычислим точное значение затрат на реконструкцию этих элементов.

$$z(E) = 0,5 + 1,2 + 1,6 + 1,3 + 2,1 + 5,4 + 5,5 + 2,2 +$$

$$+1,7 + 1,5 + 1,7 + 3,2 + 2,7 + 3,1 + 3,5 + 0,7 = 37,9\,.$$

Оценка этих затрат снизу составит

$$\underset{\sim}{z}(E) = \underline{z}(\omega_1) + \underline{z}(\omega_5) + \underline{z}(\omega_7) =$$

$$= 4,7931 + 8,8831 + 9,1314 = 22,8076\,.$$

Оценка $z(E)$ сверху будет равна

$$\tilde{z}(E) = \overline{z}(\omega_1) + \overline{z}(\omega_5) + \overline{z}(\omega_7) =$$

$$= 14,1 + 20,5 + 20,0 = 54,6.$$

Для данного множества среднее значение

$$\frac{\underset{\sim}{z}(E) + \tilde{z}(E)}{2} = 38,7038,$$

что достаточно близко к точному значению $z(E) = 37,9.$ Погрешность составляет 2,1 ‰.

Выполним решение задачи векторной оптимизации, когда в качестве затрат принимается их оценка снизу, т. е. рассматривается задача

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{z}(x) \\ -\tau(x) \end{bmatrix} \to \min, \qquad (22)$$

где

$$\underset{\sim}{z}(E) = \sum_{\omega_i \in E} \underline{z}(\omega_i);$$

$$\tau(E) = \sum_{\omega_i \in E} \tau(\omega_i).$$

В соответствии с формулой (15) формируем множества

$$\underset{\sim}{E}_*(\mu) = \left\{\omega \in \Omega : \underline{z}(\omega) - \mu\tau(\omega) \le 0\right\}, \ \mu \ge 0.$$

При формировании множества $\underset{\sim}{E}_*(\mu)$ предварительно для каждого ω_i определяем μ_i, при котором реализуется равенство

$$\underline{z}(\omega_i) - \mu_i\tau(\omega_i) = 0.$$

В данном примере получаем:

$$\omega_1 : \mu_1 = \frac{4,7931}{7} = 0,6842;$$

$$\omega_2 : \mu_2 = \frac{7,3231}{11} = 0,6657;$$

$$\omega_3 : \mu_3 = \frac{8,0831}{12} = 0,6842;$$

$$\omega_4 : \mu_4 = \frac{\underline{z}(\omega_4)}{\tau(\omega_4)} = 0,9760;$$

$$\omega_5 : \mu_5 = \frac{\underline{z}(\omega_5)}{\tau(\omega_5)} = 0,9351;$$

$$\omega_6 : \mu_6 = \frac{\underline{z}(\omega_6)}{\tau(\omega_6)} = 0,7182;$$

$$\omega_7 : \mu_7 = \frac{\underline{z}(\omega_7)}{\tau(\omega_7)} = 1,0146.$$

Полученные значения μ упорядочиваем по возрастанию и формируем множества $\underset{\sim}{E}_*(\mu)$, а результаты сводим в табл. 2.

Таблица 2

μ	$\underset{\sim}{E}_*(\mu)$	$\underset{\sim}{z}\left[\underset{\sim}{E}_*(\mu)\right]$	$\tau\left[\underset{\sim}{E}_*(\mu)\right]$	$z\left[\underset{\sim}{E}_*(\mu)\right]$
$0 \le \mu < 0,6657$	$\varnothing$	0,0000	0,0	0,0
$0,6657 \le \mu < 0,6736$	ω_2	7,3231	11,0	21,0
$0,6736 \le \mu < 0,6842$	ω_2, ω_3	15,4062	23,0	29,2
$0,6842 \le \mu < 0,7182$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3$	20,1997	30,0	31,3
$0,7182 \le \mu < 0,9351$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_6$	30,9724	45,0	40,8
$0,9351 \le \mu < 0,9760$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_6$	39,8555	54,5	46,2
$0,9760 \le \mu < 1,0146$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$	47,4686	62,3	51,1
$1,0146 \le \mu$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7$	56,6000	71,3	56,6

Аналогичным образом строим решение задачи

$$\begin{bmatrix} \tilde{z}(E) \\ -\tau(E) \end{bmatrix} \to \min, \tag{23}$$

где

$$\tilde{z}(E) = \sum_{\omega_i \in E} \overline{z}(\omega),$$

а показатель $\tau(E)$ вычисляется по такой же формуле, как и в задаче (22).

Значения μ в задаче (23) следующие:

$$\mu_1 = 2{,}0143; \quad \mu_2 = 1{,}09091;$$

$$\mu_3 = 1{,}8; \quad \mu_4 = 2{,}1282;$$

$$\mu_5 = 2{,}1579; \quad \mu_6 = 1{,}62; \quad \mu_7 = 2{,}(2).$$

Используя формулу (15), решение задачи (23) по методу Лагранжа формируем в виде

$$\tilde{E}_*(\mu) = \left\{\omega \in \Omega : \overline{z}(\omega) - \mu\tau(\omega) \le 0\right\}, \mu \ge 0.$$

Результаты сводим в табл. 3.

Таблица 3

μ	$\underset{\sim}{E}_*(\mu)$	$\underset{\sim}{z}\left[\underset{\sim}{E}_*(\mu)\right]$	$\tau\left[\underset{\sim}{E}_*(\mu)\right]$	$z\left[\underset{\sim}{E}_*(\mu)\right]$
$0 \le \mu < 1{,}62$	$\varnothing$	0,0	0,0	0,0
$1{,}62 \le \mu < 1{,}8$	ω_6	24,3	15,0	24,3
$1{,}8 \le \mu < 1{,}9091$	ω_3, ω_6	45,9	27,0	34,2
$1{,}9091 \le \mu < 2{,}0143$	$\omega_2, \omega_3, \omega_6$	66,9	38,0	38,7
$2{,}0143 \le \mu < 2{,}1282$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_6$	81,0	45,0	40,8
$2{,}1282 \le \mu < 2{,}1579$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6$	97,6	52,8	45,7
$2{,}1579 \le \mu < 2{,}(2)$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$	118,1	62,3	51,1
$2{,}(2) \le \mu$	$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7$	138,1	71,3	56,6

Анализируя результаты табл. 2 и табл. 3 на предмет несравнимых вариантов по точному подсчету затрат $z(E)$ и времени сокращения хода поезда, получаем десять несравнимых вариантов, приведенных в табл. 4.

Символом E_L отмечаем множества, полученные с использованием функции Лагранжа в задачах (22) и (23).

Теперь воспользуемся производной от функции множества по мере, и принимая во внимание необходимое условие (12), определим несравнимые варианты.

Исходить будем из варианта, который принадлежит решению задачи (10). Очевидно, что таким вариантом является само множество Ω. Затем находим такое $\omega_* \in \Omega$, что имеет место

$$\left(\left.\frac{dz}{d\lambda}\right|_{\omega_*}\right) \Big/ \left(\left.\frac{d\tau}{d\lambda}\right|_{\omega_*}\right) = \max_{\omega \in \Omega} \left(\left.\frac{dz}{d\lambda}\right|_{\omega}\right) \Big/ \left(\left.\frac{d\tau}{d\lambda}\right|_{\omega}\right) \tag{24}$$

и тогда множество $\Omega \setminus \{\omega_*\}$ будет эффективным.

В нашем случае реализация соотношения (24) осуществляется при $\omega_* = \omega_4$.

Таким образом, множество

$$E = \Omega \setminus \{\omega_n\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$$

доставляет значение затрат

$$z(E) = 51{,}7 \quad \text{и} \quad \tau(E) = 63{,}5.$$

Далее с множеством E поступаем аналогично и находим ω_*, который в силу (24) надо удалить из E и т. д. Результаты данной процедуры сводим в табл. 5. Сравнивая с результатами, представленными в табл. 4, заключаем, что множество, состоящее из элемента ω_6, должно быть исключено из перечня эффективных, так как множество ω_1, ω_3 из табл. 5 дает меньшие затраты средств и большее значение τ.

Таблица 4

E_L	$z(E_L)$	$\tau(E_L)$
ω_2	21,0	11,0
ω_6	24,3	15,0
ω_2, ω_3	29,2	23,0
$\omega_1, \omega_2, \omega_3$	31,3	30,0
$\omega_2, \omega_3, \omega_6$	38,7	38,0
$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_6$	40,8	45,0
$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6$	45,7	52,8
$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_6$	46,2	54,5
$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$	51,1	62,3
Ω	56,6	71,3

Таблица 5

E_L	$z(E_L)$	$\tau(E_L)$
ω_1	14,1	7,0
ω_1, ω_3	23,7	19,0
$\omega_1, \omega_2, \omega_3$	31,3	30,0
$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_6$	46,2	54,5
$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_6, \omega_7$	51,7	62,3
Ω	56,6	71,3

Объединив решения из табл. 4, 5 и оставив несравнимые варианты, получим набор подмножеств множества Ω, которые между собой несравнимы (табл. 6).

Замечание: полученное из двенадцати несравнимых вариантов множество не обладает свойством выпуклости в пространстве функционалов (z, τ), в чем можно убедиться из геометрического представления (рис. 1).

Таблица 6

E_L	$z(E_L)$	$\tau(E_L)$
ω_1	14,1	7,0
ω_2	21,0	11,0
ω_1, ω_3	24,3	15,0
ω_2, ω_3	29,2	23,0
$\omega_1, \omega_2, \omega_3$	31,3	30,0
$\omega_2, \omega_3, \omega_6$	38,7	38,0
$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_6$	40,8	45,0
$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6$	45,7	52,8
$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_6$	46,2	54,5
$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$	51,1	62,3
$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_6, \omega_7$	51,7	63,5
Ω	56,6	71,3

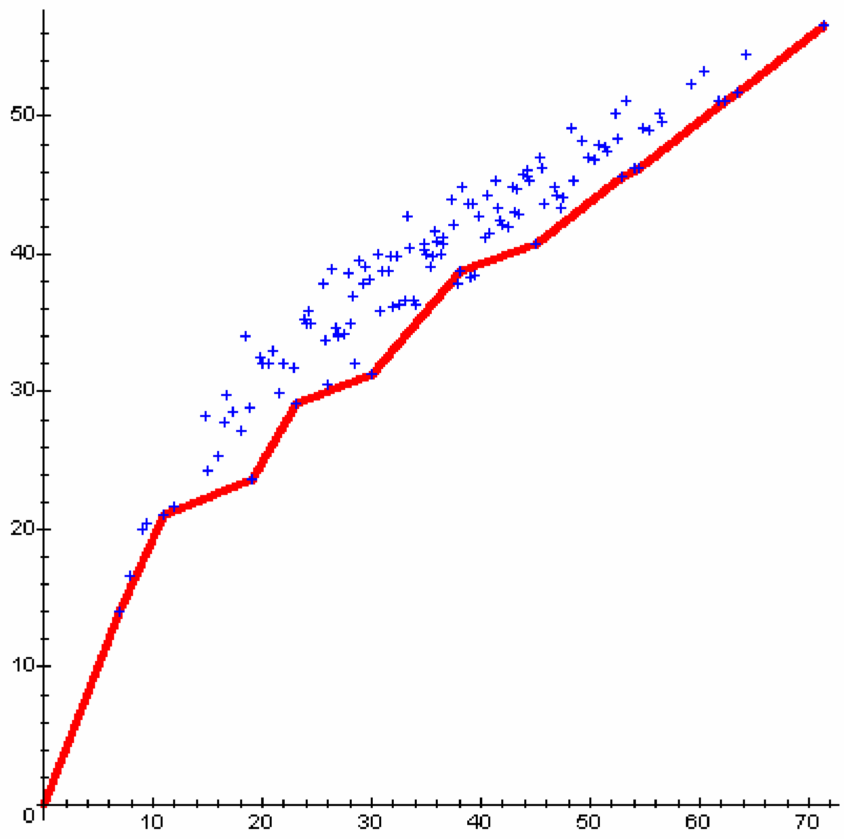

Рис. 1. Геометрическое представление множества E_L:
+ означают всевозможные варианты, сплошная линия получена по изложенной методике

Как следует из рис. 1, полученное по изложенной методике решение достаточно хорошо описывает точное решение. Оно не содержит только три точки точного решения.

Выводы

Метод неопределенных множителей Лагранжа в задачах векторной оптимизации позволяет находить выпуклую комбинацию несравнимых вариантов в пространстве функционалов.

Если реконструкция средств транспорта может быть описана технолого-экономической картой, то затраты средств оцениваются снизу и сверху аддитивными функциями множеств.

Решение, избегающее непосредственного перебора, строится как объединение несравнимых вариантов трех решений задач векторной оптимизации с использованием оценок снизу и сверху для затрат и производной от функции множества.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука. 1980. – 518 с.
2. Босов А. А. Производная функции множества // Проблемы математического моделирования: Тезисы конференции. – Днепродзержинск: 2004, – С. 6–7.
3. Босов А. А. Моделювання технологій ремонту технічних об’єктів / А. А. Босов, Б. Е. Боднарь, Е. Б. Боднарь // Вісник національного університету. – К.: КНУ, 2002. – Вип. 6. – С. 10–14.
4. Курган М. Б. Наукові основи перебудови існуючих залізниць України для впровадження швидкісного руху поїздів. Автореф. дис. … д-ра техн. наук. – Д.: 2004. – 33 с.
5. Халмош П. Теория меры. – М.: И*Л, 1953. – 291 с.

Поступила в редколлегию 10.11.2004 г.