УДК 519.6

Ю. С. БАРАШ, А. А. БОСОВ (ДИИТ),
Г. Н. КИРПА (Министерство транспорта и связи Украины)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИНВЕСТИРОВАНИЯ

Запропоновані математична модель і метод оптимізації, що дозволяють встановлювати раціональну послідовність інвестування при введенні високошвидкісного руху поїздів в Україні.

Предложены математическая модель и метод оптимизации, позволяющие устанавливать рациональную последовательность инвестирования при введении высокоскоростного движения поездов в Украине.

A mathematical model and optimization method, allowing to establish rational sequence of investment at introduction of high-speed train services in Ukraine, have been proposed.

В методике, разработанной ООН по промышленному развитию (ЮНИДО) [1], предлагается несколько показателей, с помощью которых выполняется оценка и порядок проведения технико-экономического обоснования того или иного проекта.

Среди показателей остановимся на чистой текущей стоимости *NPV* (Net Present Value of Discounted Cash Flow). В некоторых источниках этот показатель называют «интегральный экономический эффект».

Пусть для реализации некоторого проекта необходимо проинвестировать мероприятия (объекты) $\Omega = \left\{\omega_i; i = \overline{1,n}\right\}$, относительно которых допускаем, что их реализация может быть выполнена в любой последовательности. Наша задача: найти такую последовательность $\pi = \left\{\omega_{i(1)}, \omega_{i(2)}, \ldots, \omega_{i(n)}\right\}$, на которой чистая текущая стоимость за любой отрезок времени будет максимальной. Если $u_i(t)$ – интенсивность инвестирования объекта ω_i на отрезке времени $[0; \tau_i]$, а $s_i(t)$ интенсивность чистой прибыли после момента τ_i, то с учетом дисконтирования показатель *NPV* на момент времени *T* будет равен

$$NPV(T,\pi) = -U(T,\pi) + S(T,\pi), \qquad (1)$$

где

$$\begin{cases} U(T,\pi) = \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{t_i}^{t_i+\tau_i} u_i(t) e^{-\alpha t} dt, \\ S(T,\pi) = \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{t_i+\tau_i}^{T} s_i(t) e^{-\alpha t} dt. \end{cases} \qquad (2)$$

Соотношения формулы (2) выписаны для $\pi = \left\{\omega_{i(1)}, \omega_{i(2)}, \ldots, \omega_{i(n)}\right\}$ и $T \geq \sum\limits_{i=1}^{\bar{n}} \tau_i, \alpha$ – показатель дисконта. Относительно функций $u_i(t)$ и $s_i(t)$ предполагаем, что они определены для любого $t \geq 0$ и вычисляются по формулам:

$$u_i(t) = \begin{Bmatrix} 0 & t < t_i \\ \varphi_i(t - t_i) & t_i \leq t \leq t_i + \tau_i \\ 0 & t > t_i + \tau_i \end{Bmatrix}$$

$$s_i(t) = \begin{Bmatrix} 0 & t < t_i + \tau_i \\ \psi_i(t - \tau_i) & t \geq t_i + \tau_i \end{Bmatrix}.$$

В этих формулах принято, что объект ω_i начинает финансироваться с момента времени t_i и финансирование прекращается после момента $t_i + \tau_i$ Относительно чистой прибыли от объекта ω_i предполагаем, что она начинает поступать только по завершении его реализации. С учетом этих предположений соотношениям (2) можно придать следующий вид:

$$U(T,\pi) = \sum_{i=1}^{n} e^{-\alpha t_i} \int\limits_{0}^{\tau_i} \varphi_i(x) e^{-\alpha x} dx;$$

$$S(T,\pi) = \sum_{i=1}^{n} e^{-\alpha t_i} \int\limits_{0}^{T-t_i-\tau_i} \psi_i(x) e^{-\alpha x} dx,$$

где

$$t_i = \sum_{\nu=1}^{i-1} \tau_\nu, \quad t = 0.$$

Пусть данная последовательность π доставляет показателю $NPV(T,\pi)$ максимальное значение. Тогда, если в последовательности π поменять местами любые два элемента, NPV уменьшится. Данный факт будем использовать для получения оптимальной последовательности.

Выпишем, какой вклад в NPV вносят два соседних элемента ω_i и ω_{i+1}

$$\Delta(\omega_i,\omega_{i+1}) = -e^{-\alpha t_i}\int_0^{\tau_i}\varphi_i(x)e^{-\alpha x}dx -$$

$$-e^{-\alpha t_{i+1}}\int_0^{\tau_{i+1}}\varphi_{i+1}(x)e^{-\alpha x}dx + \mathfrak{M} +$$

$$+e^{-\alpha t_{i+1}}\int_0^{T-t_i-\tau_i}\psi_i(x)e^{-\alpha x}dx +$$

$$+e^{-\alpha(t_{i+1}+\tau_{i+1})}\int_0^{T-t_{i+1}-\tau_{i+1}}\psi_{i+1}(x)e^{-\alpha x}dx .$$

Если поменять их местами, то получим

$$\Delta(\omega_{i+1},\omega_i) = -e^{-\alpha t_i}\int_0^{\tau_{i+1}}\varphi_{i+1}(x)e^{-\alpha x}dx -$$

$$-e^{-\alpha(t_i+\tau_{i+1})}\int_0^{\tau_i}\varphi_i(x)e^{-\alpha x}dx +$$

$$+e^{-\alpha(t_i+\tau_{i+1})}\int_0^{T-t_i-\tau_{i+1}}\psi_{i+1}(x)e^{-\alpha x}dx +$$

$$+e^{-\alpha(t_i+\tau_i+\tau_{i+1})}\int_0^{T-t_{i+1}-\tau_i-\tau_{i+1}}\psi_i(x),$$

при этом должно выполняться неравенство

$$\Delta(\omega_i,\omega_{i+1}) \geq \Delta(\omega_{i+1},\omega_i) . \qquad (3)$$

Рассмотрим случай, когда интенсивность инвестирования и прибыли постоянны, но зависят от ω_i. Соотношение (3) при $T \gg \Sigma\tau_i$ переходит в следующее:

$$\frac{\psi_i}{e^{\alpha\tau_i}-1}-\varphi_i \geq \frac{\psi_{i+1}}{e^{\alpha\tau_{i+1}}-1}-\varphi_{i+1} . \qquad (4)$$

Неравенство (4) необходимо рассматривать как правило (критерий) упорядочения инвестиций при создании объектов из перечня Ω.

Пример 1. Воспользуемся данными, приведенными в табл. 1.

Таблица 1

Исходные данные для числового примера

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
φ_i, млн у. е./год	2	5	7	3	8
ψ_i, млн у. е./год	20	15	17	21	30
τ_i, годы	7	5	4	9	2
R_i	8,766	8,429	13,678	4,349	77,749
порядок	3	4	2	5	1

Показатель R_i вычисляется по формуле

$$R_i = \frac{\psi_i}{e^{\alpha\tau_i}-1}-\varphi_i,$$

где показатель дисконта принят равным $\alpha = 0{,}15$.

Последняя строка табл. 1 представляет собой порядок реализации инвестиций, который равен $\pi = [\omega_5,\omega_3,\omega_1,\omega_2,\omega_4]$. Таким образом, первым инвестироваться должен объект ω_5, а время начала инвестирования $t_1 = 0$. так как время его создания равно $\tau_5 = 2$, то следующим будет инвестироваться объект ω_3 с временем начала инвестирования $t_2 = t_1 + \tau_5 = 2$. Для объекта ω_1 получим $t_3 = t_2 + \tau_1 = 6$, продолжая эту процедуру далее, получим $t_4 = t_3 + \tau_1 = 13$; $t_5 = t_4 + \tau_2 = 18$.

Пусть $0 < T < t_N + \tau_N$, тогда в предположении, что φ_i и ψ_i постоянны, получим

$$U(T,\pi) = \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n(T)-1}\varphi_i\left(e^{-\alpha t_i} - e^{-\alpha(t_i+\tau_i)}\right) +$$

$$+\varphi_{n(T)}\left(e^{-\alpha t_{n(T)}} - e^{-\alpha T}\right); \quad (5)$$

$$S(T,\pi) = \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n(T)-1}\psi_i\left(e^{-\alpha(t_i+\tau_i)} - e^{-\alpha T}\right), \quad (6)$$

где

$$n(T) = \max_{t_k \leq T}\{k\}.$$

Значение показателя NPV при данном T и порядке π будет равно

$$NPV(T,\pi) = -U(T,\pi) + S(T,\pi).$$

Заметим, что в приведенных формулах (5) и (6) нумерация объектов соответствует оптимальному порядку.

Как следует из рис. 1 и 2, отклонение от оптимального порядка приводит к существенным изменениям зависимости $NPV(T)$. При оптимальном порядке и $\alpha = 0{,}15$ срок окупаемости равен $T_{opt} \approx 2{,}5$ года, а при отклонении от оптимального порядка срок окупаемости составит $T_0 = 6{,}7$ лет.

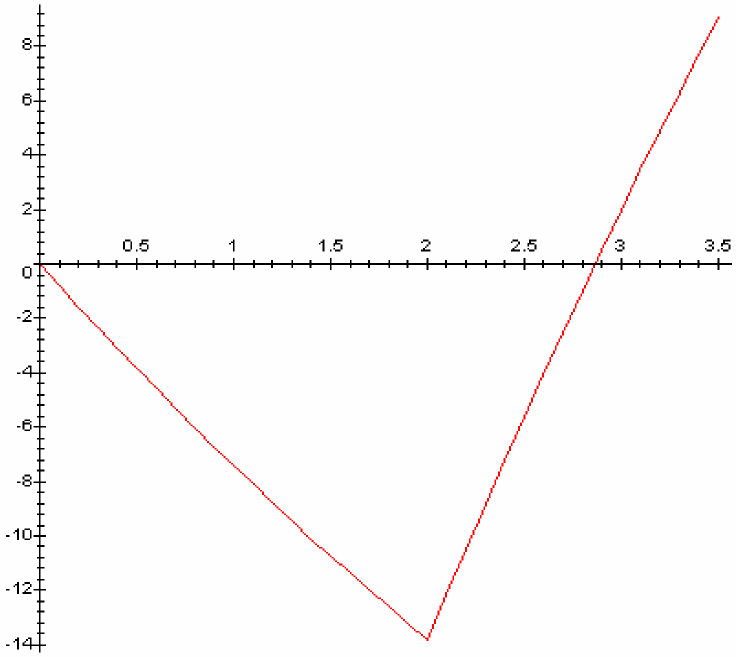

Рис. 1. Зависимость $NPV(T)$ при $\alpha = 0{,}15$ для оптимального порядка

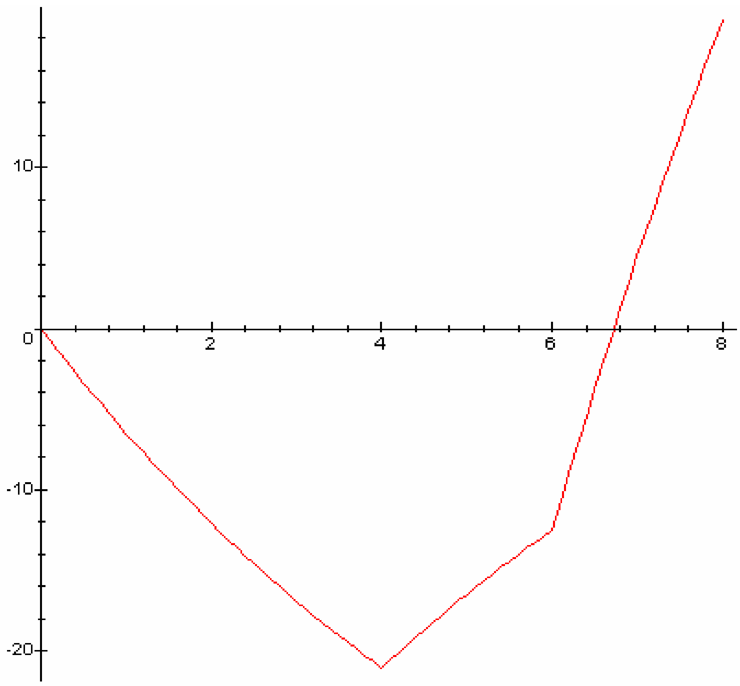

Рис. 2. $NPV(T)$ при $\alpha = 0{,}15$. В оптимальном порядке следования инвестиций (рис. 1) первые два объекта поменялись местами

Следующим фактом при отклонении от оптимального порядка является более глубокий минимум. В примере при оптимальном порядке максимальная необходимая сумма составит 12,8 млн у. е., а при отклонении от него необходима сумма 20,1 млн у. е., что, с точки зрения финансовой политики, весьма неблагоприятно.

Пример 2. В работе [2] рассмотрена задача формирования рационального перечня объектов инвестирования. Однако в этой работе предусматривалось, что инвестирование любого объекта включает две составляющие:

– мгновенное инвестирование в объеме a_i, b_i;

– постепенное (непрерывное) инвестирование интенсивности $\varphi_i(t)$ при $t \in [0, \tau_i]$, где τ_i – длительность непрерывного инвестирования.

Что касается прибыли от инвестирования в объект ω_i, то она может наступать и раньше, чем окончание создания этого объекта.

В данном примере выполним отмеченные обобщения и рассмотрим задачу определения рациональной последовательности инвестирования объектов из перечня $\Omega = \left\{\omega_i : i = \overline{1,n}\right\}$.

Оговоренные предположения относительно мгновенного инвестирования означают, что время начальных и заключительных операций значительно меньше времени непрерывного инвестирования.

На рис. 3 дана геометрическая интерпретация сделанных допущений.

Относительно величины ξ_i допускаем, что она неотрицательна. Если $\xi_i = \tau_i$, то получим первоначальную модель, а в случае $0 < \xi_i < \tau_i$ имеем вариант, когда отдача от вложений в объект ω_i начинается до его полного создания. Заметим, что вариант $\xi_i > \tau_i$ в данной модели не исключается и может быть интерпретирован как вариант с запаздыванием отдачи от инвестирования на величину $\xi_i - \tau_i$.

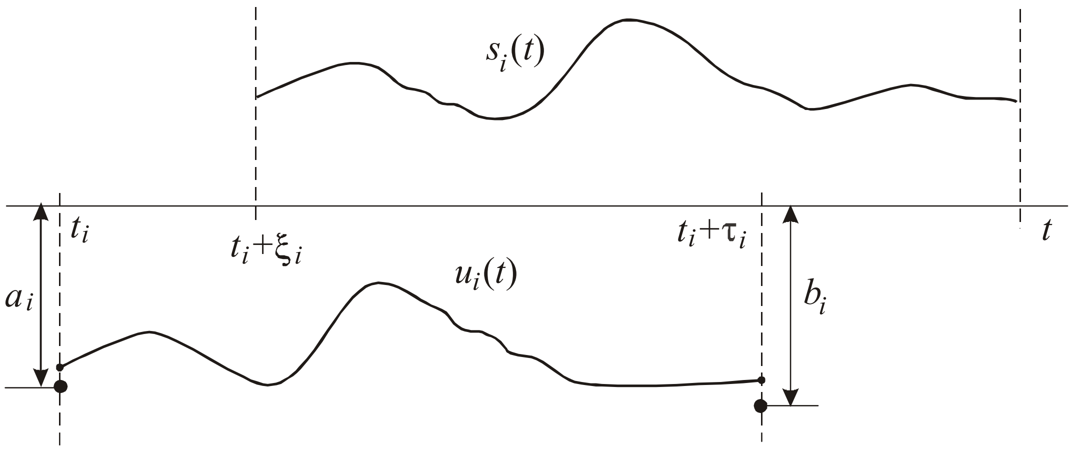

Рис. 3. Возможные варианты инвестирования

Выпишем составляющие $NPV(T)$:

$$U(t) = \sum_{i=1}^{n(t)-1} \left(a_i e^{-\alpha t_i} + \int_{t_i}^{t_i+\tau_i} u_i(x) e^{-\alpha x} dx + b_i e^{-\alpha(t_i+\tau_i)} \right) + a_{n(t)} e^{-\alpha t_{n(t)}} + \int_{t_{n(t)}}^{t} u_{n(t)}(x) e^{-\alpha x} dx;$$

$$S(t) = \sum_{i=1}^{n(T)-1} \int_{t_i+\xi_i}^{t} s_i(x) e^{-\alpha x} dx,$$

где

$$n(t) = \max_{t_k \le t} \{k\}.$$

В приведенных соотношениях, как и в (5), (6), допускается, что естественный порядок максимизирует $NPV(T)$. В дальнейшем полагаем

$$\Delta_u(\omega_i, \omega_{i+1}) = \Delta_u(\omega_i) + \Delta_u(\omega_{i+1}),$$

где

$$\Delta_u(\omega_i) = a_i \omega_{i+1} + \int_{t_i}^{t_i+\tau_i} u_i(x) e^{-\alpha x} dx + b_i e^{-\alpha(t_i+\tau_i)}$$

или

$$\Delta_u(\omega_i) = e^{-\alpha t_i} \left(a_i + \int_0^{\tau_i} \varphi_i(x) e^{-\alpha x} dx + b_i e^{-\alpha \tau_i} \right),$$

$$\Delta_u(\omega_{i+1}) = e^{-\alpha t_{i+1}}\left(a_{i+1} + \int_0^{\tau_i} \varphi_{i+1}(x) e^{-\alpha x} dx + \right.$$

$$\left. + b_{i+1} e^{-\alpha \tau_{i+1}} \right).$$

Изменив порядок следования, т. е. выполнив вначале ω_{i+1}, а затем ω_i, получим

$$\Delta_u(\omega_{i+1}, \omega_i) = \Delta'_u(\omega_{i+1}) + \Delta'_u(\omega_i),$$

или

$$\Delta'_u(\omega_{i+1}, \omega_i) = e^{-\alpha t_i}\left(a_{i+1} + \int_0^{\tau_{i+1}} \varphi_{i+1}(x) e^{-\alpha x} dx + \right.$$

$$\left. + b_{i+1} e^{-\alpha \tau_{i+1}} \right);$$

$$\Delta'_u(\omega_i) = e^{-\alpha(t_i + \tau_{i+1})}\left(a_i + \int_0^{\tau_i} \varphi_i(x) e^{-\alpha x} dx + b_i e^{-\alpha \tau_i} \right).$$

Выпишем соответствующие величины для прибыли

$$\Delta_s(\omega_i, \omega_{i+1}) = \Delta_s(\omega_i) + \Delta_s(\omega_{i+1})$$

или

$$\Delta_s(\omega_i) = \int_{t_i + \xi_i}^{t} s_i(x) e^{-\alpha x} dx,$$

$$\Delta_s(\omega_{i+1}) = \int_{t_{i+1}}^{t} s_{i+1}(x) e^{-\alpha x} dx$$

или

$$\Delta_s(\omega_i) = e^{-\alpha(t_i + \xi_{i+1})} \int_0^{t - t_i - \xi_i} \psi_i(x) e^{-\alpha x} dx,$$

$$\Delta_s(\omega_{i+1}) = e^{-\alpha(t_{i+1} + \tau_{i+1})} \int_0^{t - t_{i+1} - \xi_{i+1}} \psi_{i+1}(x) e^{-\alpha x} dx.$$

Поменяв порядок, получим

$$\Delta_s(\omega_{i+1}, \omega_i) = \Delta'_s(\omega_{i+1}) + \Delta'_s(\omega_i),$$

где

$$\Delta_s(\omega_{i+1}) = e^{-\alpha(t_i + \xi_{i+1})} \int_0^{t - t_i - \xi_{i+1}} \psi_{i+1}(x) e^{-\alpha x} dx;$$

$$\Delta'_s(\omega_i) = e^{-\alpha(t_i + \tau_{i+1} + \xi_i)} \int_0^{t - t_i - \tau_{i+1} - \xi_i} \psi_i(x) e^{-\alpha x} dx.$$

Необходимое условие оптимальности естественного порядка представляет собой

$$-\Delta_u(\omega_i, \omega_{i+1}) + \Delta_s(\omega_i, \omega_{i+1}) \geq -\Delta_u(\omega_{i+1}, \omega_i) +$$

$$+ \Delta_s(\omega_{i+1}, \omega_i). \quad (7)$$

Положим

$$\tilde{\varphi}_i = a_i + \int_0^{\tau_i} \varphi_i(x) e^{-\alpha x} dx + b_i e^{-\alpha \tau_i},$$

$$\tilde{\psi}_i(z) = \int_0^{z} \psi_i(x) e^{-\alpha x} dx.$$

Необходимому условию (7) придадим форму

$$-\left(e^{-\alpha t_i} \tilde{\varphi}_i + e^{-\alpha(t_i + \tau_i)} \tilde{\varphi}_{i+1} \right) + e^{-\alpha(t_i + \xi_i)} \tilde{\psi}_i(t - t_i - \xi_i) +$$

$$+ e^{-\alpha(t_i + \tau_i + \xi_{i+1})} \tilde{\psi}_{i+1}(t - t_i - \tau_i - \xi_{i+1}) \geq -\left(e^{-\alpha t_i} \tilde{\varphi}_{i+1} + \right.$$

$$\left. + e^{-\alpha(t_i + \tau_{i+1})} \tilde{\varphi}_i \right) + e^{-\alpha(t_i + \xi_{i+1})} \tilde{\psi}_{i+1}(t - t_i - \xi_{i+1}) +$$

$$+ e^{-\alpha(t_i + \tau_{i+1} + \xi_i)} \tilde{\psi}_i(t - t_i - \tau_{i+1} - \xi_i). \quad (8)$$

Неравенство (8) можно упростить, если умножить на положительную величину $e^{\alpha t_i}$ и устремить $t \to \infty$ и предположить, что существуют интегралы

$$\tilde{\psi}_i = \int_0^{\infty} \psi_i(x) e^{-\alpha x} dx.$$

При таких допущениях имеем

$$-\left(\tilde{\varphi}_i + e^{-\alpha \tau_i} \tilde{\varphi}_{i+1} \right) + e^{-\alpha \xi_i} \tilde{\psi}_i + e^{-\alpha(\tau_i + \xi_{i+1})} \tilde{\psi}_{i+1} \geq$$

$$\geq -\left(\tilde{\varphi}_{i+1} + e^{-\alpha \tau_{i+1}} \tilde{\varphi}_i \right) + e^{-\alpha \xi_{i+1}} \tilde{\psi}_{i+1} + e^{-\alpha(\tau_{i+1} + \xi_i)} \tilde{\psi}_i$$

или

$$-\tilde{\varphi}_i + e^{-\alpha \xi_i} \tilde{\psi}_i + e^{-\alpha \tau_{i+1}} \tilde{\varphi}_i - e^{-\alpha(\tau_i + \xi_{i+1})} \tilde{\psi}_i \geq$$

$$\geq -\tilde{\varphi}_{i+1} + e^{-\alpha \tau_i} \tilde{\varphi}_{i+1} + e^{-\alpha \xi_{i+1}} \tilde{\psi}_{i+1} - e^{-\alpha(\tau_i + \xi_{i+1})} \tilde{\psi}_{i+1}.$$

Окончательно имеем

$$\tilde{R}_i \geq \tilde{R}_{i+1}, \quad (9)$$

где

$$\tilde{R}_i = \frac{e^{-\alpha \tau_i} \tilde{\psi}_i - \tilde{\varphi}_i}{1 - e^{-\alpha \tau_i}}.$$

Пример 3. В данном примере рассмотрим ситуацию, когда интенсивность инвестирования постоянна, а интенсивность прибыли монотонно возрастает и стремится к некоторой постоянной.

В качестве модели для инвестирования прибыли возьмем

$$\psi_i(t)=\begin{cases}0, & t\le\xi_i;\\ A_i\left(1-e^{-\beta_i(t-\xi_i)}\right), & t\ge\xi_i.\end{cases}$$

В этом случае

$$\tilde{\psi}_i(t)=A_i\int_{\xi_i}^{\infty}\left(1-e^{-\beta_i(t-\xi_i)}\right)e^{-\alpha t}dt=\frac{A_i\beta_i e^{-\alpha\xi_i}}{\alpha(\alpha+\beta_i)};$$

$$\tilde{\varphi}_i(t)=a_i+\frac{\varphi_i}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha\tau_i}\right)+b_i e^{-\alpha\tau_i},$$

а показатель $\tilde{R}_i$ будет равным

$$\tilde{R}_i=\frac{e^{-2\alpha\xi_i}A_i\beta_i-\left(a_i+\frac{\varphi_i}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha\tau_i}\right)+b_i e^{-\alpha\tau_i}\right)}{1-e^{-\alpha\tau_i}}. \quad (10)$$

Используя показатель (10) и правило (9), получаем возможность построения такого порядка инвестирования, при котором показатель *NPV* будет максимальным.

Заметим, что правило (9) позволяет реализовать минимальное время окупаемости *PBP* (Pay-Back Period) и минимизировать максимальный денежный отток (Cash Outflow). Очевидно, что Cash Outflow позволяет определить необходимые размеры финансирования.

Пример 4. Остановимся на ситуации, когда интенсивности инвестирования и прибыли постоянны, но имеют неопределенный характер, т. е. можно указать только оценки снизу и сверху.

В качестве математической модели для данной ситуации будут использованы случайные величины, распределенные по равномерному закону. Показатель, с помощью которого будем упорядочивать объекты в данном примере, будет равным

$$R_i=\frac{\psi_i}{e^{-\alpha\tau_i}-1}-\varphi_i.$$

Неопределенные величины ψ_i и φ_i моделируем случайными величинами, распределенными по равномерному закону, т. е. $\psi_i\in\left[\underline{\psi}_i,\overline{\psi}_i\right]$; $\varphi_i\in\left[\underline{\varphi}_i,\overline{\varphi}_i\right]$.

Считаем, что ψ_i и φ_i – независимые случайные величины. Показатель R_i тоже будет моделироваться случайной величиной, закон распределения вероятностей для которой определяем по формуле

$$F_i(x)=P\{R_i<x\}=\iint_{Q(x)} f_\psi(x_1)f_\varphi(x_2)dx_1dx_2,$$

где область интегрирования Q представляет собой

$$Q(x)=\left\{(x_1,x_2):x_1\in\left[\underline{\psi}_i,\overline{\psi}_i\right],x_1\in\left[\underline{\varphi}_i,\overline{\varphi}_i\right];R_i<x\right\},$$

где $f_\psi(x_1)$, $f\varphi(x_2)$ – плотности распределения для ψ_i и φ_i соответственно.

Установим пределы изменения R_i

$$\underline{R}_i=\frac{\underline{\psi}_i}{e^{\alpha\tau_i}-1}-\overline{\varphi}_i;\quad \overline{R}_i=\frac{\overline{\psi}_i}{e^{\alpha\tau_i}-1}-\underline{\varphi}_i,$$

тогда порядок инвестирования определяется из условия, что вероятность

$$\gamma=P\{R_1\ge R_2\ge\ldots\ge R_n\}\to\max.$$

Данную вероятность, используя $F_i(x)$, вычисляем по формуле

$$\gamma=\int\limits_{\substack{\underline{R}_i\le x_i\le\overline{R}_i\\ i=\overline{1,n}\\ x_1\ge x_2\ge\ldots\ge x_n}}\ldots\int dF_1(x_1)dF_2(x_2)\ldots dF_n(x_n).$$

Приведенные формулы выписаны для естественного порядка, чтобы не загромождать идею постановки задачи. В общем случае порядок π можно задать в виде

$$\pi=\left[i(1),i(2),\ldots,i(n)\right],$$

где $i(j)$ – номер места, которое занимает ω_i в данном порядке, тогда

$$\gamma(\pi)=\int\limits_{\substack{\underline{R}_{i(j)}\le x_{i(j)}\le\overline{R}_{i(j)}\\ j=\overline{1,n}\\ x_{i(1)}\ge x_{i(2)}\ge\ldots\ge x_{i(n)}}}\ldots\int\prod_{j=1}^{n}dF_{i(j)}\left[x_{i(j)}\right]dF_2(x_2)$$

и необходимо найти такой порядок π^*, чтобы

$$\gamma\left(\pi^*\right)\ge\gamma(\pi),$$

где π – любой другой порядок.

Вопрос о существовании π^* не вызывает сомнения, так как всех порядков конечное число ($n!$).

Далее рассмотрим две ситуации, которые позволяют построить оценки $NPV(t)$ снизу и сверху.

Взяв в качестве $\varphi_i = \overline{\varphi}_i$; $\psi_i = \underline{\psi}_i$; $i = \overline{1,n}$ и построив соответствующий порядок $\underline{\pi}$, получим следующее отношение:

$$NPV(t,\underline{\pi}) \le NPV(t,\pi),$$

справедливое для любого другого порядка π, отличного от $\underline{\pi}$.

Положив $\varphi_i = \underline{\varphi}_i$; $\psi_i = \overline{\psi}_i$; $i = \overline{1,n}$ и найдя порядок, получим

$$NPV(t,\underline{\pi}) \le NPV(t,\pi) \le NPV(t,\overline{\pi}),$$

что позволяет иметь оптимистическую и пессимистическую оценки для *NPV* в условиях неопределенности. Для численного расчета возьмем исходные данные из табл. 1, а значения φ_i и ψ_i проварьируем согласно табл. 2.

В табл. 2 приведены значения $\underline{R}_i$ и $\overline{R}_i$ для пессимистического и оптимистического вариантов в соответствии с заданными процентами вариации. В двух последних строчках даны последовательности $\underline{\pi}$ и $\overline{\pi}$. Для этих последовательностей вычислены $NPV(t,\underline{\pi})$ и $NPV(t,\overline{\pi})$, которые и представлены на рис. 4.

Таблица 2

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
φ_i, млн у. е./год	2,000	5,000	7,000	3,000	8,000
ψ_i, млн у. е./год	20,000	15,000	17,000	21,000	30,000
τ_i, годы	7,000	5,000	4,000	9,000	2,000
±Δ %	10,000	5,000	20,000	15,000	30,000
$\underline{R}_i$	7,490	7,507	8,143	2,797	49,624
$\overline{R}_i$	10,043	9,350	19,214	5,907	105,874
$\underline{\pi}$	4,000	3,000	2,000	5,000	1,000
$\overline{\pi}$	3,000	4,000	2,000	5,000	1,000

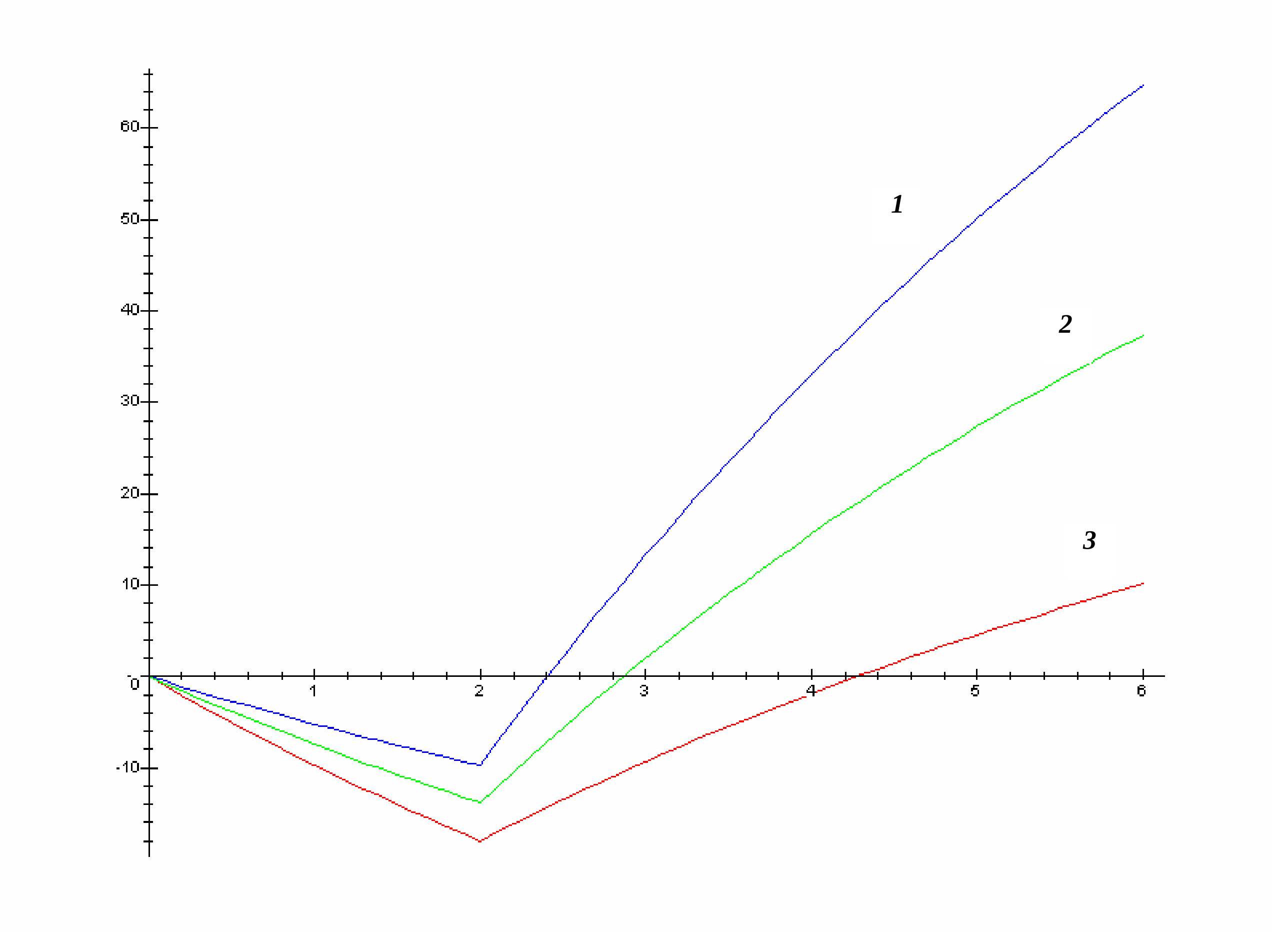

Рис. 4. Графики прогнозов:
1 – оптимистический прогноз; *2* – ожидаемый прогноз; *3* – пессимистический прогноз

Приведенные значения NPV выполнены при $\alpha = 0{,}15$ или $E \approx 16{,}2$ % годовых. Если ожидаемое время оборота в данном примере равно 2,8 года, то с вероятностью единица реальное значение принадлежит интервалу $[2{,}4; 4{,}3]$ года, а последовательности инвестирования

$$\underline{\pi} = [\omega_5, \omega_3, \omega_1, \omega_2, \omega_4];$$

$$\overline{\pi} = [\omega_5, \omega_3, \omega_2, \omega_1, \omega_4].$$

Пример 5. Данный пример является обобщением примера 4 в том плане, что сроки инвестирования $\tau_i, i = \overline{1,n}$ также четко неопределенны и заданы в виде интервалов $[\underline{\tau}_i, \overline{\tau}_i]$, где $\underline{\tau}_i$ минимально возможный, а $\overline{\tau}_i$ – максимально возможный срок инвестирования.

В этом примере также введем пессимистическую ситуацию, когда $\varphi = \overline{\varphi}_i$, $\psi_i = \underline{\psi}_i$, $\tau_i = \overline{\tau}_i$, $i = \overline{1,n}$ и оптимистическую $\varphi = \underline{\varphi}_i$, $\psi_i = \overline{\psi}_i$, $\tau_i = \underline{\tau}_i$, $i = \overline{1,n}$. Каждой из этих ситуаций будут соответствовать свои последовательности инвестирования, которые определяем, используя показатели

$$\underline{R}_i = \frac{\underline{\psi}_i}{e^{\alpha\overline{\tau}_i} - 1} - \overline{\varphi}_i; \quad i = \overline{1,n}$$

и

$$\overline{R}_i = \frac{\overline{\psi}_i}{e^{\alpha\underline{\tau}_i} - 1} - \underline{\varphi}_i; \quad i = \overline{1,n}$$

для формирования рациональных последовательностей соответственно пессимистической и оптимистической.

Для численных расчетов воспользуемся данными табл. 2 и сформируем исходную информацию пессимистического толка (табл. 3).

Для определения оптимистического порядка составим табл. 4 аналогично табл. 3.

Таблица 3

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$\overline{\varphi}_i$, млн у. е./год	2,000	5,000	7,000	3,000	8,000
$\underline{\psi}_i$, млн у. е./год	18,000	14,250	13,600	16,800	21,000
$\overline{\tau}_i$, годы	7,700	5,250	4,800	10,350	2,600
$\underline{R}_i$	6,080	6,646	4,498	1,062	10,197
Порядок	3,000	2,000	4,000	5,000	1,000

Таблица 4

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$\overline{\varphi}_i$, млн у. е./год	1,800	4,750	9,600	2,550	5,600
$\overline{\psi}_i$, млн у. е./год	22,000	15,750	20,400	24,150	39,000
$\underline{\tau}_i$, годы	6,300	4,750	3,200	7,680	1,400
$\overline{R}_i$	12,188	10,408	27,513	8,681	161,296
Порядок	4,000	3,000	2,000	5,000	1,000

Зависимость NPV для пессимистического и оптимистического вариантов представлена на рис. 5.

Если сравнить графики на рис. 4 и 5, то можно отметить, что время окупаемости в последнем случае имеет больший интервал разброса, чем на рис. 4. Этот факт вполне ожидаем, так как неопределенных параметров на рис. 5 больше, чем на рис. 4.

В качестве объектов инвестирования принимаем определенные направления ω_i.

Положим:

ω_1 : Киев – Полтава – Харьков;

ω_2 : Киев – Полтава – Днепропетровск;

ω_3 : Киев – Полтава – Днепропетровск – Донецк;

ω_4 : Киев – Полтава – Днепропетровск – Запорожье;

ω_5 : Киев – Полтава – Днепропетровск – Запорожье – Мелитополь – Симферополь;

ω_6 : Харьков – Полтава – Днепропетровск – Кривой Рог – Николаев – Одесса;

ω_7 : Киев – Белая Церковь – Николаев – Одесса;

ω_8 : Киев – Белая Церковь – Николаев – Херсон – Симферополь;

ω_9 : Киев – Белая Церковь – Винница – Хмельницкий – Тернополь.

Любой из перечисленных объектов (направлений) может быть взят в качестве первого объекта инвестирования, но после его реализации параметры инвестирования будут другими для остальных объектов.

В дальнейшем будем исходить из следующих допущений:

– время создания того или иного ω_i пропорционально его длине;

– прибыль от создания ω_i пропорциональна пассажиропотоку и длине направления ω_i.

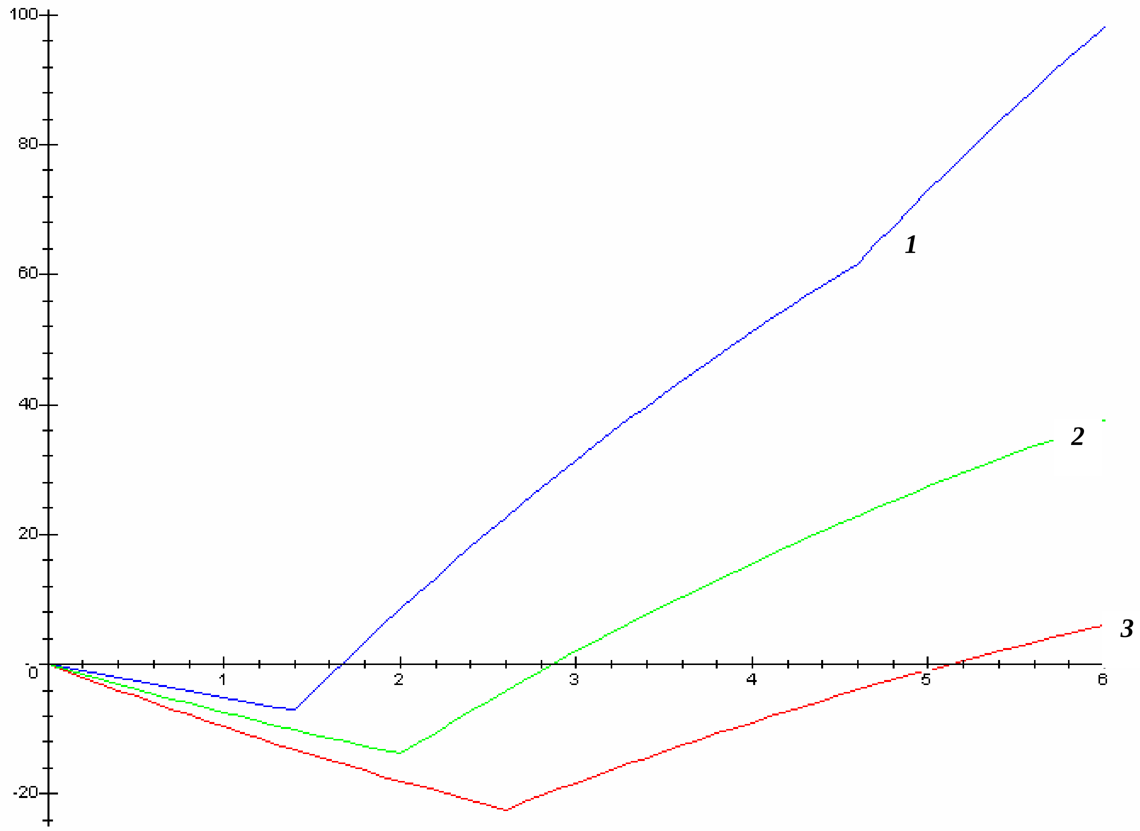

Рис. 5. Зависимость *NPV*:
1 – оптимистический вариант; *2* – ожидаемый вариант; *3* – пессимистический вариант

В силу сделанных допущений для каждого ω_i показатель

$$R_i = \frac{aP_i l_i}{e^{\alpha l_i/\upsilon}} - bl_i',$$

где принято $\varphi_i = bl_i'$;

$$\psi_i = aP_i l_i; \quad \tau_i = \frac{l_i'}{\upsilon},$$

где l_i – длина направления ω_i (км); P_i – пассажиропоток направления (млн пасс/год); υ – скорость строительства (км/год); a, b – коэффициенты пропорциональности; l_i' – длина пути, которую надо построить с учетом предшествующих реализаций.

При сделанных допущениях и выбранных направлениях исходная информация о параметрах инвестирования представлена в табл. 5. Из этой таблицы следует, что R_1 максимально, следовательно, в первую очередь должно быть построено направление ω_1: Киев – Полтава – Харьков. С учетом этого сформируем табл. 6.

Таблица 5

ω_i	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}	ω_{11}
l_i	440	440	660	520	871	680	525	705	530	920	691
P_i	2,561	1,435	2,001	1,767	8,573	1,502	3,977	4,069	2,047	1,900	2,069
τ_i	2,2	2,2	3,3	2,6	4,4	3,4	2,6	3,5	2,7	4,6	3,5
R_i	–7111	–7578	–10853	–8713	–11965	–11360	–7926	–10797	–8755	–15538	–11319

Таблица 6

ω_i	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}	ω_{11}
l_i	440	660	520	871	680	525	705	530	920	691
l_i'	130	350	210	561	550	525	705	530	610	561
τ_i	0,7	1,8	1,1	2,8	2,8	2,6	3,5	2,7	3,1	2,8
P_i	1,435	2,001	1,767	8,573	1,502	3,977	4,069	2,047	1,900	2,069
R_i	–3892	–6144	–4334	–5384	–9393	–7926	–10797	–8755	–10237	–9302

Из этой таблицы следует, что следующим должен быть построен элемент Полтава – Днепропетровск и тем самым будет создано направление ω_2 : Киев – Полтава – Днепропетровск.

Продолжая аналогичным образом, получаем следующую последовательность:

ω_4 : Киев – Полтава – Днепропетровск – Запорожье;

ω_5 : Киев – Полтава – Днепропетровск – Запорожье – Мелитополь – Симферополь;

ω_{11} : Харьков – Днепропетровск – Запорожье – Мелитополь – Симферополь.

ω_3 : Киев – Полтава – Днепропетровск – Донецк;

ω_{10} : Киев – Полтава – Днепропетровск – Донецк – Луганск – Мариуполь;

ω_6 : Харьков – Полтава – Днепропетровск – Кривой Рог – Николаев – Одесса;

ω_7 : Киев – Белая Церковь – Николаев – Одесса;

ω_8 : Киев – Белая Церковь – Николаев – Херсон – Симферополь;

ω_9 : Киев – Белая Церковь – Винница – Хмельницкий – Тернополь – Львов.

Таким образом, рациональная последовательность создания сети линий высокоскоростного движения пассажирских поездов в Украине представляет собой

$$\pi_{\text{opt}} = [\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_{11}, \omega_3, \omega_{10}, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9].$$

Заметим, что после создания ω_5, автоматически будет создан и ω_{11}. Тогда в последовательности π ω_{11} не требует инвестирования.

При скорости строительства 200 км пути в год на создание сети потребуется 15,23 года, а при $\alpha = 0{,}1$ возврат вложений будет через 15 лет (рис. 6). При меньшей скорости строительства экономические показатели существенно ухудшаются (рис. 7, 8).

В математической модели инвестирования зависимых объектов объект ω_i представляет собой набор E_i некоторых элементов $e_k \in \Omega$.

Так, например, направление

ω_1 : Киев – Полтава – Харьков состоит из двух элементов $E_1 = \{e_1, e_2\}$ и т. д. (рис. 6), а направление;

ω_2 : Киев – Полтава – Днепропетровск представляет собой $E_2 = \{e_1, e_3\}$ и т. д.

В общем случае будем записывать $\omega_i = E_i \subseteq \Omega$. Тогда, если ω_i инвестируется раньше, чем ω_j, то из ω_j должны быть исключены элементы, общие для ω_i и ω_j. Когда приходит очередь инвестирования объекта ω_j, то множество

$$\tilde{E}_j = E_j \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{j-1} E_k \right)$$

представляет собой набор элементов, которые необходимо инвестировать и объем инвестирования ω_j в данном случае представляет собой

$$\tilde{u}_j = \sum_{e \in \tilde{E}_j} u(e).$$

В нашем случае данное соотношение принимает вид

$$\tilde{u}_j = b \sum_{e \in \tilde{E}_j} l(e), \tag{11}$$

где $l(e)$ – длина элемента e.

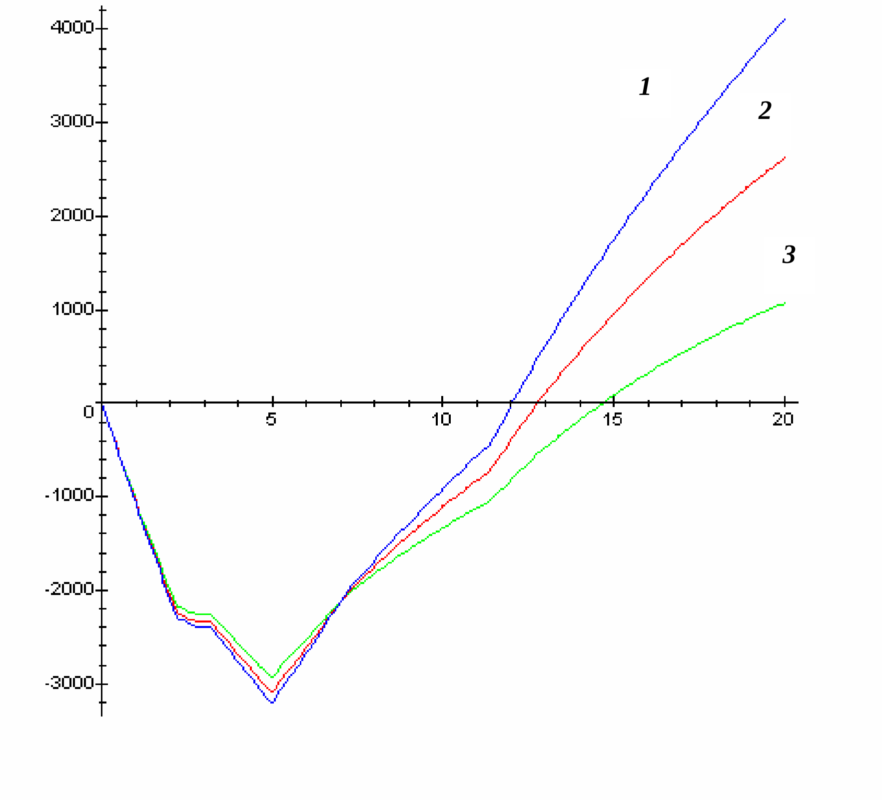

Рис. 6. $NPV(t)$ при скорости строительства $V = 200$ км/год:
1 – $\alpha = 0,07$; *2* – $\alpha = 0,05$; *3* – $\alpha = 0,1$

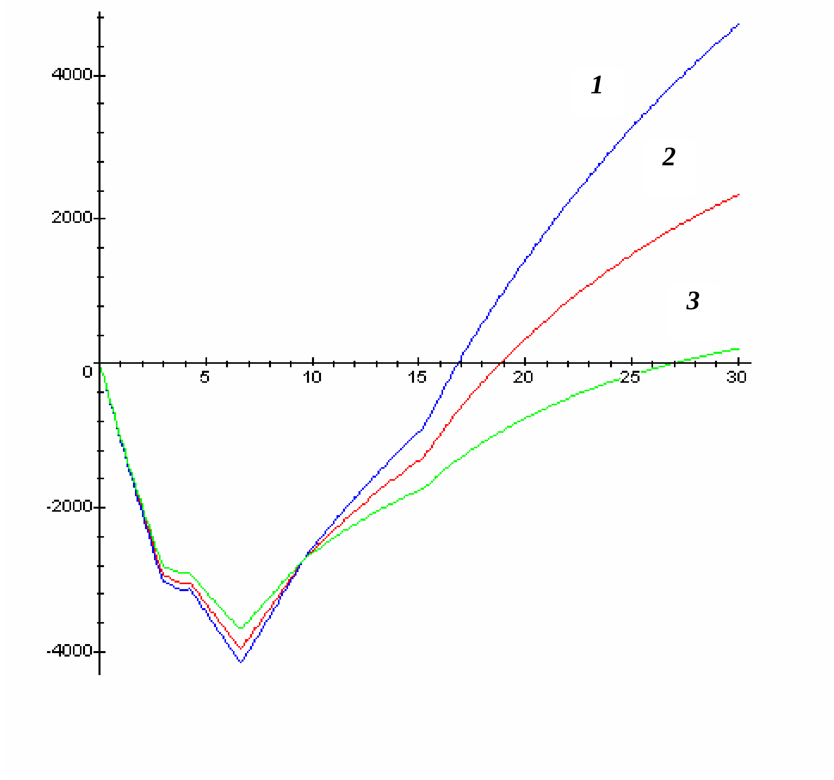

Рис. 7. $NPV(t)$ при скорости строительства $V = 150$ км/год:
1 – $\alpha = 0,07$; *2* – $\alpha = 0,05$; *3* – $\alpha = 0,1$

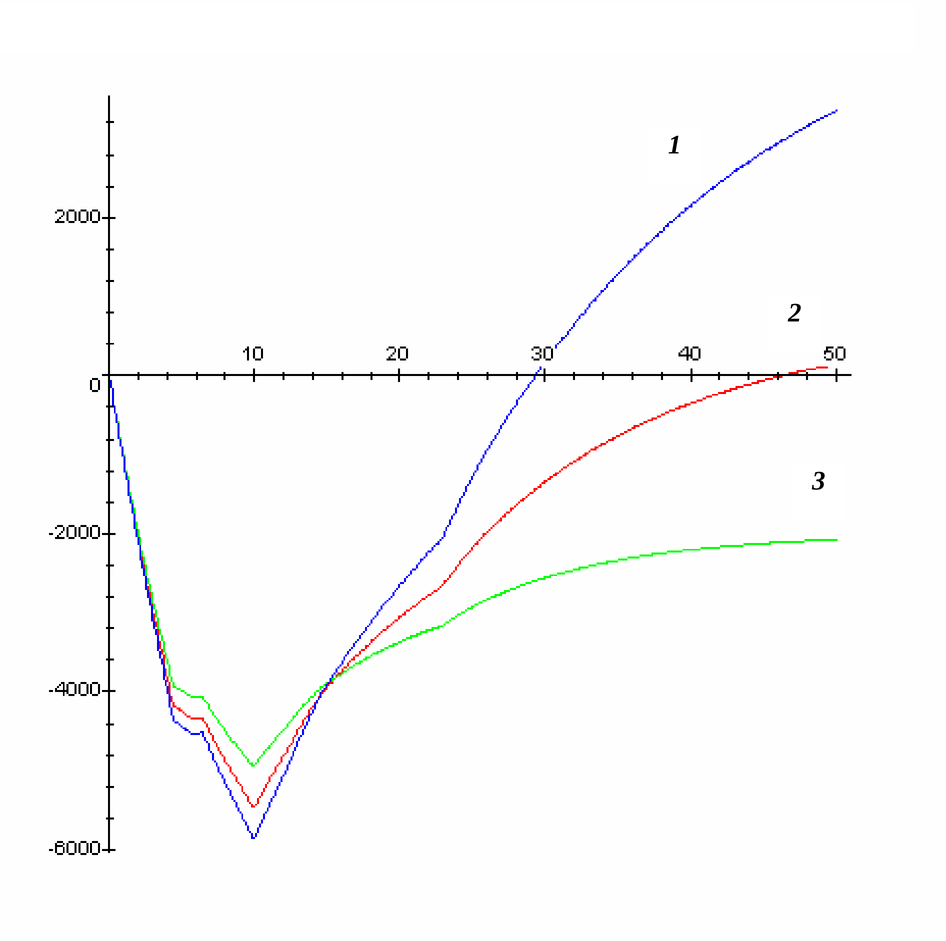

Рис. 8. $NPV(t)$ при скорости строительства $V = 100$ км/год:
1 – $\alpha = 0{,}07$; *2* – $\alpha = 0{,}05$; *3* – $\alpha = 0{,}1$

Естественно, изменится и время инвестирования направления ω_j и оно будет определяться по формуле

$$\tilde{\tau}_j = \sum_{e \in \tilde{E}_j} \tau(e). \quad (12)$$

Тогда показатель R_j будет рассчитываться следующим образом:

$$R_j = \frac{aP_j l_j}{e^{\alpha \tau_j} - 1} - \tilde{\varphi}_j,$$

где

$$l_j = \sum_{E_j} l(e).$$

И если естественный порядок инвестирования оптимальный, то должно выполняться соотношение

$$R_j \ge R_k, \ k = \overline{j+1, n},$$

где R_k рассчитаны с учетом реализованных направлений от 1 до $j-1$.

Алгоритм определения рациональной последовательности инвестирования имеет следующие основные элементы:

1. Формируем объекты инвестирования $\omega_i = E_i$, $i = \overline{1, m}$ из элементов множества $E = \left\{e_i, \ i = \overline{1, n}\right\}$.
2. Полагаем $I_н = [1, 2, ..., m]$; $I = \varnothing$; $E' = \varnothing$.
3. Если $I_н \setminus I = \varnothing$, то переходим к п. 7.
4. Пересчитываем τ_i и φ_i, $i \in I_н \setminus I$.
5. Определяем такой номер i_*, что $R_{i_*} \ge R_i$, $i \in I_н \setminus I$.
6. Номер i_* посылаем в I и переходим к п. 3.
7. Выдача списка I как оптимальной последовательности инвестирования.

Остановимся более детально на п. 4, в котором время инвестирования τ_i и интенсивность инвестирования зависят от объектов, предшествующих объекту ω_i.

Обозначим через

$$\tau_i = \tau_i(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i);$$

$$\varphi_i = \varphi_i(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_i)$$

зависимости τ_i и φ_i от предшествующих объектов в оптимальной последовательности.

В явном виде данные зависимости применительно к рассматриваемой сети линий железных дорог высокоскоростного движения пассажирских поездов описываются соотношениями (11) и (12). Однако в общем случае эти зависимости могут быть и другими, что требует определенного программного обеспечения для расчета τ_i и φ_i.

Если этот пункт пополнить пересчетом интенсивностей прибыли ψ_i, то данный алгоритм будет обладать определенной общностью и применим к широкому кругу инвестиционных задач.

Отметим только, что показатель R_i должен рассчитываться по формуле

$$\tilde{R}_i = \frac{e^{-\alpha\xi_i}\tilde{\psi}_i - \tilde{\varphi}_i}{1 - e^{-\alpha\xi_i}}, \qquad (13)$$

где $\tilde{\varphi}_i, \tilde{\psi}_i, \xi_i$ – параметры объекта ω_i, зависящие от предшествующих объектов. Экономический смысл данных параметров: $\tilde{\varphi}_i$ – суммарный дисконтированный объем инвестирования ω_i, $\tilde{\psi}_i$ – суммарная дисконтированная прибыль от ω_i, ξ_i – время, через которое начнет поступать прибыль от ω_i, отсчитываемое от начала его инвестирования.

Выводы

Предложена методика определения рациональной последовательности инвестирования с учетом дисконтирования.

Методика апробирована на тестовом примере и выполнен расчет рациональной последовательности создания сети линий железных дорог высокоскоростного движения пассажирских поездов в Украине.

При кредитных ставках 5…10 % годовых и росте пассажиропотока в четыре раза по сравнению с 2002 годом, при затратах 3 млн евро на строительство одного километра пути при цене перевозки 0,0625 евро/пасс·км и эксплуатационных расходах 0,03 евро/пасс·км, при скорости строительства пути 200 км/год срок окупаемости будет находиться в интервале 12…15 лет.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. UNIDO Manual for the Preparation of Industrial Feasibility Studies. Vienna, UNIDO, ID/206, 1986.
2. Босов А. А. Математическая постановка задачи о рациональном инветировании / А. А. Босов, А. А. Сидоренко // Математичне модулювання в інженерних та економічних задачах транспорту: Зб. наук. пр. – Д.: Січ, 1999. – С. 5–13.
3. Босов А. А. Формирование вариантов рациональной сети линий высокоскоростного движения поездов в Украине / А. А. Босов, Г. Н. Кирпа. – Д. Изд-во Днепропетр. нац. ун-та ж.-д. трансп., 2004. – 144 с.

Поступила в редколлегию 27.07.2004.