

В.Н. СТАРЧЕНКО, канд. техн. наук, доцент, ВУНУ (Украина)

В.Г. БУРЯК, канд. физ.-мат. наук, доцент, ВУНУ (Украина)

## ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ КОЛЕСА С РЕЛЬСОМ

Наведено результати теоретичного дослідження динамічної контактної задачі взаємодії колеса з рейкою, установлені закономірності зміни модуля комплексної амплітуди і кута зрушення фаз коливань від безрозмірної частоти і безрозмірної маси.

Приведены результаты теоретического исследования динамической контактной задачи взаимодействия колеса с рельсом, установлены закономерности изменения модуля комплексной амплитуды и угла сдвига фаз колебаний от безразмерной частоты и безразмерной массы.

Results of theoretical research of a dynamic contact problem of interaction of a wheel with a rail are resulted, laws of change of the module of complex amplitude and a corner of shift of phases of fluctuations from dimensionless frequency and dimensionless weight are established.

Движение рельсовых транспортных средств осуществляется на принципе сцепления. При этом внешней силой, изначально необходимой для возможности движения, является сила трения между колесами и рельсами, которая возникает как реакция последних на приложение к сцепным колесам движущего крутящего момента или на тормозные оси – тормозного момента в процессе торможения. Трение определяет величину сцепления, поскольку с учетом упругости колеса и рельса их взаимодействие происходит по некоторой контактной поверхности, содержащей зону сцепления, характеризующую коэффициентом статического трения, и зону скольжения, характеризующую коэффициентом динамического трения, а с увеличением скольжения и при переходе от псевдоскольжения к собственно скольжению, на всей контактной поверхности действует уже только динамическое трение, которое существенно ниже статического. Следовательно, трение (сцепление) определяет не только возможность движения, но и ограничивает реализуемые тяговые усилия и величину тормозных сил [1].

Из всего множества факторов, в подавляющем большинстве имеющих случайный характер, к основным и определяющим силы трения (сцепления) между колесом и рельсом следует отнести вертикальную нагрузку (нормальное давление), физико-механические свойства материалов, профили контактных поверхностей и скорости их взаимного перемещения.

В теории контактного взаимодействия при определении формы и размера области контакта, а также величины и распределения поверхностных нормальных и касательных напряже-

ний, используется статическая нормальная нагрузка [2, 3, 4]. Известна работа К. Джонсона [5] по экспериментальной проверке теории Миндлина [6] при однонаправленном и осциллирующем воздействии сдвигающего (тангенциального) усилия.

Известные асимптотические методы (метод больших и малых лямбда – МБЛ, ММЛ) [7], предложенные для решения статических контактных задач, оказываются достаточно эффективными и при решении интегральных уравнений динамических контактных задач, ядра которых не являются осциллирующими.

Однако использование их для решения динамических контактных задач часто оказывается недостаточным, поскольку современные машины и механизмы обладают высокой динамичностью и при их расчетах на прочность необходимо учитывать инерционные силы.

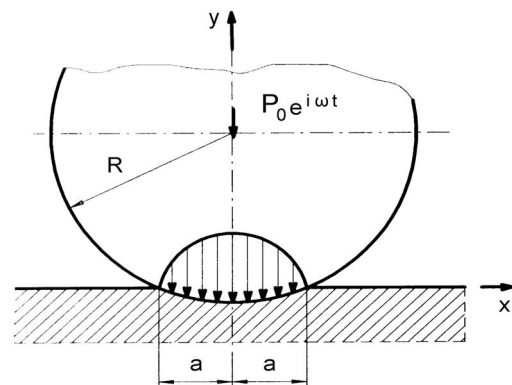


Рис. 1.

Целью предлагаемой работы является исследование вертикальных колебаний жесткого колеса взаимодействующего с упругим рельсом

под действием силы  $P = P_0 e^{i\omega t}$ , изменяющейся по гармоническому закону (рис.1).

Задача формулируется таким образом, что одна из компонент напряжения считается равной нулю на всей границе полуплоскости.

Приводятся три асимптотических метода исследования интегрального уравнения, к которому сводится эта задача для малых, средних и больших частот колебаний. Численное исследование задачи показывает, что с достаточной для практики степенью точности происходит смыкание приближенных решений, полученных для малых, средних и больших значений относительной частоты колебаний. Указанная задача для малых частот изучалась в работе [8].

### 1. Постановка задачи

Использование принципа предельного поглощения [9] приводит задачу к решению следующего интегрального уравнения:

$$\int_{-1}^1 q_\varepsilon(\xi) K_\varepsilon[\chi(\xi - x)] d\xi = 2\pi\Delta\delta_\varepsilon(x), \quad (1)$$

$$|x| \leq 1, \quad \Delta = Ga^{-1},$$

$$\chi = \sigma a(\rho/G)^{1/2}, \quad q_\varepsilon = q_{1\varepsilon}(x) + iq_{2\varepsilon}(x),$$

$$\delta_\varepsilon(x) = \delta_{1\varepsilon}(x) + i\delta_{2\varepsilon}(x).$$

Здесь  $\sigma(x, t) = q_\varepsilon(x)e^{i\omega t}$  – неизвестная функция распределения нормальных контактных напряжений под колесом;  $\delta_\varepsilon(x)e^{i\omega t}$  – величина перемещения колеса, вызываемого приложенной нагрузкой, причем  $\delta_\varepsilon(x) = \delta_0(x)e^{-i\varphi}$ , где  $\varphi$  – угол сдвига фаз между колебаниями колеса и возмущающей нагрузки,  $\delta_0(x)$  – модуль комплексной амплитуды колебания колеса,  $\rho, G$  – плотность и модуль сдвига упругого рельса.

В дальнейшем под напряжениями, перемещениями и сдвигом фаз подразумеваются их амплитудные значения, истинные же значения получаются умножением на  $e^{i\omega t}$ .

Ядро  $k_\varepsilon(x)$  уравнения (1) имеет вид

$$k_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\varepsilon(u) e^{-i|x|u} du, \quad (2)$$

$$K_\varepsilon(u) = \frac{k_1}{4u^2 k_1 \sqrt{u^2 - (1 - i\varepsilon)} - k_2}, \quad (3)$$

где  $k_1 = \sqrt{u^2 - (1 - i\varepsilon)^2 b^2}$ ,

$$k_2 = \left[ 2u^2 - (1 - i\varepsilon) \right]^2,$$

$$b^2 = \frac{1}{2}(1 - 2\nu)/(1 - \nu),$$

$\varepsilon$  – коэффициент пропорциональности, характеризующий внутреннее трение,  $\nu$  – коэффициент Пуассона. Функция  $K_\varepsilon(u)$  – четная, имеющая на вещественной оси два полюса и две пары точек ветвления, симметрично расположенных относительно начала координат.

### 2. Метод малых частот

Для нахождения равномерного предела от функции  $\delta_\varepsilon(x)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  контур интегрирования в представлении (2) на основании [10] деформируем таким образом, чтобы при  $\varepsilon \rightarrow 0$  сдвигающиеся на вещественную ось полюсы и точки ветвления функции  $K_\varepsilon(u)$  не пересекали бы его. В таком случае уравнения (1) и (2) принимают вид

$$\int_{-1}^1 q(\xi) K[\chi(\xi - x)] d\xi = 2\pi\Delta\delta(x), \quad (4)$$

$$|x| \leq 1, \quad \Delta = Ga^{-1}.$$

$$k(x) = \int_{\Gamma} K(u) e^{-i|x|u} du, \quad (5)$$

$$q(\xi) = \lim q_\varepsilon(\xi), \quad k(x) = \lim k_\varepsilon(x),$$

$$\delta(x) = \lim \delta_\varepsilon(x), \quad K(u) = \lim K_\varepsilon(u), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Контур  $\Gamma$  в соотношении (5) совпадает с вещественной осью, отклоняясь от неё, лишь обходя все положительные особенности сверху, а отрицательные – снизу.

Представим интеграл в уравнении (5) в виде

$$\int_{\Gamma} K(u) e^{-i|x|u} du = \int_{\Gamma} \left[ K(u) - \frac{A_0}{u^2 - c_0^2} \right] e^{-i|x|u} du +$$

$$+ A_0 \int_{\Gamma} \frac{e^{-i|x|u} du}{u^2 - c_0^2}, \quad (6)$$

где  $A_0$  и  $c_0$  – постоянные.

Учитывая, что

$$\int_{\Gamma} \left[ K(u) - \frac{A_0}{u^2 - c_0^2} \right] e^{-i|x|u} du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ K(u) - \frac{A_0}{u^2 - c_0^2} \right] e^{-i|x|u} du,$$

и вычисляя второй интеграл в (6) с помощью теории вычетов, получим для ядра (5) следующее выражение:

$$k(x) = 2 \int_0^{\infty} \left[ K(u) - \frac{A_0}{u^2 - c_0^2} \right] \cos(xu) du - \frac{\pi i A_0}{c_0} e^{-i|x|c_0}. \quad (7)$$

Здесь последнее слагаемое в правой части – половина вычета в полюсе Релея.

Применяя метод представления (7) в новой форме [8], получим асимптотические формулы, в которых

$$\begin{aligned} A_1 &= D - (B + \frac{3}{2}E - E \ln \frac{2}{\chi}) \chi^2 + (-\frac{7}{2}C + \\ &+ \frac{103}{24}F + \frac{7}{2}F \ln \frac{2}{\chi} - \frac{5BE}{12D} - \frac{5E^2}{12D} \ln \frac{2}{\chi}) \chi^4, \\ B_1 &= (2B + 3E - 2E \ln \frac{2}{\chi}) \chi^2 + (4C + \frac{7}{3}F - \\ &- 4F \ln \frac{2}{\chi} + \frac{4BE}{3D} + \frac{2E^2}{D} - \frac{4E^2}{3D} \ln \frac{2}{\chi}) \chi^4, \\ C_1 &= (4C + \frac{25}{3}F - 4F \ln \frac{2}{\chi} - \frac{2BE}{3D} - \frac{E^2}{D} + \\ &+ \frac{2E^2}{3D} \ln \frac{2}{\chi}) \chi^4, \\ A_2 &= -M \chi^2 - (\frac{7}{2}N + \frac{5ME}{12D}) \chi^4, \\ B_2 &= 2M \cdot \chi^2 + 4(N + \frac{ME}{3D}) \chi^4. \end{aligned} \quad (8)$$

Выражения для  $P_1, P_2, a_1, a_2, a_3$  остаются прежними, тогда после преобразований и расчетов, имеем

$$\begin{aligned} A &= -0.08081, & D &= 0.6999, & L &= 1.09954, \\ B &= -0.2442, & E &= -0.2575, & M &= -0.4045, \\ C &= 0.03228, & F &= 0.02190, & N &= 0.03435. \end{aligned} \quad (2.6)$$

### 3. Метод средних частот

Запишем уравнения (1.1) и (1.2) в форме

$$\int_{-1}^1 q_{\varepsilon}(\xi) k_{\varepsilon}[\chi(\xi - x)] d\xi = \pi \Delta \delta_{\varepsilon}(x), \quad (3.1)$$

$$(|x| \leq 1, \Delta = G/a),$$

$$k_{\varepsilon}(x) = \int_0^{\infty} [K_{1\varepsilon}(u) + K_{2\varepsilon}(u)] \cos(xu) du, \quad (3.2)$$

$$K_{1\varepsilon}(u) = 4u^2(u^2 - \lambda^2)^{1/2}(u^2 - \lambda^2 b^2) / s_{\varepsilon}(u);$$

$$K_{2\varepsilon}(u) = 4(u^2 - \lambda^2 b^2)^{1/2}(u^2 - \lambda^2/2)^2 / s_{\varepsilon}(u);$$

$$s_{\varepsilon}(u) = 16(1 - b^2)u^6 = 8\lambda^2(3b^2 - 3)u^4 + 8\lambda^4 u^2 - \lambda^6;$$

$$\lambda^2 = 1 - i\varepsilon.$$

Используя для (3.1) такую же схему, как и в работе [10], получим функциональное уравнение в виде

$$\begin{aligned} \Phi_n + (\alpha)[K_{1\varepsilon}(\alpha) + K_{2\varepsilon}(\alpha)] &= \\ &= \frac{n_0 \Delta n! i^{n+1}}{\sqrt{2\pi\alpha}^{n+1}} + E^-(\alpha), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$a_0 = 4(1 - b^2).$$

Рассмотрим систему функциональных уравнений, приведенную ниже (3.4)

$$\begin{aligned} \Phi_{np}^{1+}(\alpha) K_{1\varepsilon}(\alpha) &= \frac{a_0 \Delta n! i^{n+1}}{2\sqrt{2\pi\alpha}^{n+1}} + \frac{1}{2} E_p^{1-}(\alpha) - \\ &- \Phi_{n,p-1}^{1+}(\alpha) K_{2\varepsilon}(\alpha) + \frac{1}{2} E_{p-1}^{2-}(\alpha), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{np}^{2+}(\alpha) K_{2\varepsilon}(\alpha) &= \frac{a_0 \Delta n! i^{n+1}}{2\sqrt{2\pi\alpha}^{n+1}} + \frac{1}{2} E_p^{2-}(\alpha) - \\ &- \Phi_{n,p-1}^{2+}(\alpha) K_{1\varepsilon}(\alpha) + \frac{1}{2} E_{p-1}^{1-}(\alpha). \end{aligned}$$

Система (3.4) эквивалентна уравнению (3.3) и решается методом последовательных приближений, так для нулевого приближения получаем зависимости

$$\Phi_{n0}^{j+}(\alpha) K_{j\varepsilon}(\alpha) = \frac{a_0 \Delta n! i^{n+1}}{2\sqrt{2\pi\alpha}^{n+1}} + \frac{1}{2} E_0^{j-}(\alpha),$$

$$j = 1, 2$$

$$K_{1\varepsilon}(u) = \frac{\sqrt{u^2 - B_{\varepsilon}^2}(u^2 - z_{1\varepsilon}^2)(u^2 - z_{2\varepsilon}^2)}{(u^2 - z_{3\varepsilon}^2)(u^2 - z_{1\varepsilon}^2)(u^2 - z_{2\varepsilon}^2)},$$

$$z_{2\varepsilon} = i\gamma$$

$$K_{2\varepsilon}(u) = \frac{\sqrt{u^2 - D_{\varepsilon}^2}(u^2 - E_{\varepsilon}^2)^2}{(u^2 - z_{3\varepsilon}^2)(u^2 - z_{1\varepsilon}^2)(u^2 - z_{2\varepsilon}^2)},$$

$$E_{\varepsilon} = \lambda / \sqrt{2},$$

$$\text{где } B_{\varepsilon} = \lambda, \quad z_{1\varepsilon} = D_{\varepsilon} = \lambda b;$$

$z_{1\varepsilon}, z_{2\varepsilon}, z_{3\varepsilon}$  - корни функции  $s_{\varepsilon}(u)$ , лежащие в верхней полуплоскости.

Выполнив преобразования для уравнений (3.4), с учетом точной факторизации для  $K_{1\varepsilon}(u)$  и  $K_{2\varepsilon}(u)$ , имеем решение в виде

$$\varphi_{n0}^j(y) = \Delta \left[ c_{1,n}^j \varphi_{* \varepsilon}^j(y) + \sum \frac{c_{k,n}^j}{(k-2)!} k4 \right], \quad (3.5)$$

$$k4 = \int_0^y (y-u)^{k-2} \varphi_{* \varepsilon}^j(u) du.$$

$$c_{n+1,n}^1 = n! / \sqrt{A_{1\varepsilon}}, \quad c_{n+1,n}^2 = n! / \sqrt{A_{2\varepsilon}},$$

$$\varphi_{* \varepsilon}^1(y) = -iA_{1\varepsilon}^{-1/2} \operatorname{erf} \sqrt{-iB_\varepsilon y} + (\pi y)^{-1/2} e^{iB_\varepsilon y} + r_{1\varepsilon} e^{iz_{1\varepsilon} y} \operatorname{erf} \sqrt{i(z_{1\varepsilon} - B_\varepsilon)y} - r_{2\varepsilon} e^{iz_{2\varepsilon} y} \cdot \operatorname{erf} \sqrt{i(z_{2\varepsilon} - B_\varepsilon)y},$$

$$\varphi_{* \varepsilon}^2(y) = -iA_{2\varepsilon}^{-1/2} \operatorname{erf} \sqrt{-iD_\varepsilon y} + r_{3\varepsilon} e^{iD_\varepsilon y} + r_{4\varepsilon} e^{iE_\varepsilon y} \operatorname{erf} \sqrt{i(E_\varepsilon - D_\varepsilon)y},$$

$$r_{j\varepsilon} = i \frac{(z_{j\varepsilon} - z'_{1\varepsilon})(z_{j\varepsilon} - z'_{2\varepsilon})(z_{j\varepsilon} - z'_{3\varepsilon})}{z_{j\varepsilon}(z_{1\varepsilon} - z_{2\varepsilon})\sqrt{B_\varepsilon + iz_{j\varepsilon}}}, \quad j = 1, 2$$

$$r_{3\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\pi y}} \left[ 1 - i \frac{A_{4\varepsilon}}{(E_\varepsilon - D_\varepsilon)} y \left( 1 - \frac{z'_{3\varepsilon}}{E_\varepsilon} \right) \right],$$

$$r_{4\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{i(E_\varepsilon - D_\varepsilon)}} \left\{ A_{3\varepsilon} \left( 1 - \frac{z'_{3\varepsilon}}{E_\varepsilon} \right) + A_{4\varepsilon} \cdot k5 \right\},$$

$$k5 = \left[ y \left( 1 - \frac{z'_{3\varepsilon}}{E_\varepsilon} \right) + \frac{z'_{3\varepsilon}(3E_\varepsilon - 2D_\varepsilon) - E_\varepsilon^2}{2iE_\varepsilon^2(E_\varepsilon - D_\varepsilon)} \right].$$

$$A_{1\varepsilon} = -\frac{iB_\varepsilon z_{1\varepsilon}^2 z_{2\varepsilon}^2}{z_{1\varepsilon}^2 z_{2\varepsilon}^2 z_{3\varepsilon}^2}, \quad A_{2\varepsilon} = -\frac{iD_\varepsilon E_\varepsilon^4}{z_{1\varepsilon}^2 z_{2\varepsilon}^2 z_{3\varepsilon}^2},$$

$$A_{3\varepsilon} = i(2E_\varepsilon - z'_{1\varepsilon} - z'_{2\varepsilon}),$$

$$A_{4\varepsilon} = -(E_\varepsilon - z'_{1\varepsilon})(E_\varepsilon - z'_{2\varepsilon}).$$

Здесь  $\operatorname{erf} x$  – интеграл вероятности.

Общее решение уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_{j\varepsilon}(\xi) k_{j\varepsilon}[\chi(\xi - x)] d\xi = \pi \Delta \delta_\varepsilon(x), \quad |x| < \infty,$$

$$k_{j\varepsilon}(x) = \int_0^\infty K_{j\varepsilon}(u) \cos(xu) du, \quad j = 1, 2$$

может быть получено в виде

$$v_{j\varepsilon}(x) = \chi \Delta a_0 \left[ \frac{\delta_\varepsilon(x)}{A_{j\varepsilon}} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{\chi^{2m}} k6 \right],$$

$$k6 = B_{jm} \delta^{2m}(x).$$

Приближенное решение уравнения (1.1) строится в форме

$$q(x) = \lim_{\varepsilon, \gamma \rightarrow 0} \sum_{j=1}^2 \varphi_{n0}^j[\chi(1+x)] \varphi_{n0}^j[\chi(1-x)] / v_{j\varepsilon}(x), \quad j = 1, 2. \quad (3.6)$$

Заметим, что с учетом факторизации

$$K_{j\varepsilon}(\alpha) = K_{j\varepsilon}^+(\alpha) K_{j\varepsilon}^-(\alpha) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \lambda \rightarrow -1.$$

Построение следующих приближений системы (3.4) сопряжено с трудностями вычисления интегралов вида

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \left\{ \frac{a_0 \Delta n! i^{n+1}}{2\sqrt{2\pi} \zeta^{n+1}} [K_{1\varepsilon}^-(\zeta)] - \Phi_{n,p-1}^{1+}(\zeta) K_{2\varepsilon}(\zeta) [K_{1\varepsilon}^-(\zeta)]^{-1} \right\} \frac{d\zeta}{\zeta - a}.$$

Однако, как будет показано ниже, с хорошей для практики степенью точности оказывается достаточным нахождение только  $\Phi_{n0}^{1+}$ .

Построив указанным выше образом приближенные решения  $q_0(x)$  и  $q_1(x)$  уравнения (1.1) для средних  $\chi$  в форме (3.6), соответственно, для случаев  $\delta(x) = \delta, \delta(x) = \theta x$ , можно получить силу и момент по формулам

$$P = \int_{-1}^1 \delta(x) q_0(x) dx = P_1 + iP_2, \quad (3.7)$$

$$M = \int_{-1}^1 \delta(x) q_1(x) dx = M_1 + iM_2.$$

#### 4. Метод больших частот

Запишем ядро (2.2) интегрального уравнения (2.1) в другой форме

$$k(x) = \int_{\Gamma} K(u) e^{-i\chi|x|u} du. \quad (4.1)$$

Можно показать, что для  $\chi \gg 1$  ядро  $k(x)$  представимо в форме

$$k(x) \approx -2\pi i \left[ b_1 \delta^0(x) / \chi + b_2 e^{-ic_0 \chi |x|} \right], \quad (4.2)$$

$$b_1 = i \lim_{u \rightarrow 0} K(u), \quad b_2 = \lim_{u \rightarrow c_0} (u - c_0) K(u).$$

Здесь  $\delta^0(x)$  - дельта функция,  $c_0$  - положительный полюс функции  $K(u)$ , лежащий на вещественной оси;  $b_1 = b$ .

Подставив (4.2) в уравнение (2.1) получим

$$q(x) + \frac{b_2 \chi}{b_1} \int_{-1}^1 e^{-ic_0 \chi |\xi - x|} q(\xi) d\xi = b_3 \delta(x), \quad (4.3)$$

$$b_3 = i\chi \Delta / b_1.$$

Применяя для решения уравнения (4.3) символический метод, получим дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$q''(x) - \lambda_1^2 q(x) = b_3 [\delta''(x) + c_0 \chi^2 \delta(x)], \quad (4.4)$$

$$\lambda_1 = \chi [c_0 (2ib_2 / b_1 - c_0)]^{1/2}.$$

Аппроксимируя функцию  $\delta(x)$  полиномом, найдем решение уравнения (4.4) в виде

$$q(x) = q_0^*(x) + q_1^*(x),$$

$$q_0^*(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{-\lambda_1 x}, \quad (4.5)$$

где  $q_1^*(x)$  - частное решение неоднородного уравнения (4.4). Произвольные постоянные в решении (4.5) определим, подставляя его в (4.3) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $e^{\lambda_1 x}$  и  $e^{-\lambda_1 x}$ .

### 5. Численное решение задачи

Пусть  $\delta(x) = \delta = \text{const}$ , ( $\delta = \delta_1 + i\delta_2$ ). Тогда по формуле (3.6) и первой формуле (3.7) запишем

$$q_0(x) = b_0 [iQ(x)Q(-x) + S(x)S(-x)], \quad (5.1)$$

$$Q(x) = [l_1 + l_2(1+x)] \text{erf} \sqrt{i\chi(1+x)} + d_1 [l_3 +$$

$$+ l_4(1+x)] \cdot [\chi(1+x)]^{-1/2} e^{-i\chi(1+x)} +$$

$$+ l_5 e^{-i\chi b(1+x)} \text{erf} \sqrt{i\chi(1-b)(1+x)},$$

$$S(x) = [l_3 + d_2(1+x)] [\chi(1+x)]^{-1/2} e^{-i\chi b(1+x)} +$$

$$+ d_3 \text{erf} \sqrt{i\chi b(1+x)} + [d_4 + d_5(1+x)] \cdot$$

$$\cdot e^{-i\chi h_1(1+x)} \text{erf} \sqrt{i\chi(b-h_1)(1+x)},$$

$$P = P_1 + iP_2 = -\Delta \delta(1-b^2)(J_1 + J_2). \quad (5.2)$$

Здесь принято

$$J_1 = (1-c_0)^2 (1+in_1)^2 e^{-2\chi i} - im_1 n_2 [1 +$$

$$+ im_2 b^{-1} + m_1(\chi - in_3)] e^{-2\chi bi} + 4/3 ic_0^2 m_2^2 \chi^3 +$$

$$+ 4c_0 m_2 n_4 \chi^2 + \{4m_2 c_0 [2 - c_0 + i(m_1 n_5 -$$

$$- m_2 n_6)] + 2ic_0^2 (1 - im_1 b^{-1})^2 \} \chi + m_2 (1 - c_0^2) \cdot$$

$$\cdot (m_2 - 2i) + c_0 (2 - c_0) + 2m_1 (m_2 n_7 + in_8 +$$

$$+ m_1 n_9);$$

$$J_2 = (b - c_0)^2 s_1^2 e^{-2\chi bi} + 2i(h_1 - b)^{-1} \{4/3 s_2 \cdot$$

$$\cdot m_4^2 \chi^3 + 4m_4 (m_3 s_2 + m_4 h_1 h_2) \chi^2 + 2[s_2 s_3 +$$

$$+ m_4 (2m_3 h_2 h_1^{-1} + m_4 h_3)] \chi + 2m_3 s_2 + s_3 h_2 \cdot$$

$$\cdot h_1^{-1} + m_4 (2m_3 h_3 + im_4 s_4) \} e^{-i\chi/h_1} + 2ic_0^2 h_4 \cdot$$

$$\cdot b^{-1} \chi - ic_0 [s_5 h_4 - 4bc_0 (m_3 - is_3 h_1^{-1} - 6m_3 \cdot$$

$$\cdot m_4 + 4im_4^2 h_1^{-1})] b^{-2};$$

$$b_0 = -0.7143\chi, \quad l_1 = 0.7976 - 0.2133i,$$

$$l_2 = -0.5527i\chi, \quad l_3 = 0.5642, l_4 = 0.3118i\chi,$$

$$l_5 = 0.03252 + 0.1576i, d_1 = 0.7071(1-i);$$

$$d_2 = (-0.1282 + 0.3874i)\chi,$$

$$d_3 = -0.5714(1+i), d_4 = 0.5243 + 0.2223i,$$

$$d_5 = (0.1350 + 0.2685i)\chi, \quad b = 0.5345,$$

$$c_0 = z_3 = 1.0783, \quad h_1 = 0.7071;$$

$$z_1 = 0.5211 + 0.05321i, z_2 = -0.5211 +$$

$$0.05321i, m_2 = ib^{-1} z_1' z_2', m_1 = -ib^{-1} (z_1' + b) \cdot$$

$$\cdot (z_2' + b), m_3 = -i(z_1' + z_2' + h_1^{-1}), m_4 = -(z_1' +$$

$$+ h_1)(z_2' + h_1), h_2 = -0.1315i, h_3 = -15.115,$$

$$h_4 = (1 - im_3 h_1^{-1} - 2m_4)^2, n_1 = m_1 (1 - b)^{-1} + m_2,$$

$$n_2 = 4.4466, n_3 = -2.6352,$$

$$n_4 = c_0 (i + m_1 b^{-1}) + m_2 (1 - 1/2c_0),$$

$$n_5 = -1.9849, n_6 = 0.002842, n_7 = -4.1474,$$

$$n_8 = 2.2104, n_9 = 5.8752, s_2 = 0.1378,$$

$$s_1 = b^{-1} [1 - im_3 (h_1 - b)^{-1} - m_4 (h_1 - b)^{-2}],$$

$$s_3 = m_3^2 + 2m_4, s_4 = 96.4547,$$

$$s_5 = -0.009224.$$

При расчетах было принято  $v = 0.3$ .

Используя формулы (4.4), (4.5) и (3.7), для случая  $\delta(x) = \delta = \text{const}$ , получим

$$q_0(x) = H \left[ R^{-1} \text{ch}(\lambda_1 x) + T \right], \quad (5.3)$$

$$P = 2H \cdot \left[ (R\lambda_1)^{-1} \text{sh}\lambda_1 + T \right],$$

$$H = -\frac{4c_0\chi^2 b_2 \Delta \delta}{b(2b_2 + ic_0b)}, \quad T = \frac{b}{4\chi b_2},$$

$$R = (ic_0\chi + \lambda_1)e^{\lambda_1} + (ic_0\chi - \lambda_1)e^{-\lambda_1}.$$

Здесь  $\lambda_1$  находится по второй формуле (4.4), а  $b_2 = 0.1661$ .

Результаты вычислений  $P_1^* = P_1/\Delta$ ,  $P_2^* = P_2/\Delta$  по асимптотическим формулам (2.5), (5.2) и второй формуле (5.3) для малых, средних и больших  $\chi$  приведены в таблице 1,

$$(P_1^* = -\alpha\delta_1 - \beta\delta_2, \quad P_2^* = \beta\delta_1 - \alpha\delta_2).$$

Таблица 1.

$\eta$	по (2.5)		по (5.2)		по (5.3)	
	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
0.25	1.37	0.962	1.65	0.436	0.0194	0.812
0.50	1.55	1.44	1.98	1.01	0.120	1.45
0.75	1.66	1.74	2.37	1.78	0.324	1.99
1.00	1.52	1.77	2.72	2.80	0.636	2.49
1.25	0.964	1.48	2.91	4.05	1.06	2.99
1.50	0.329	1.17	2.82	5.43	1.56	3.54
1.75	-0.086	0.972	2.40	6.79	2.12	4.18
2.0	-0.317	0.864	1.66	7.95	2.67	4.91
2.25	-0.444	0.800	0.707	8.67	3.17	5.72

На Рис. 2 показаны зависимости  $\delta_0^*$  и  $\varphi$  от безразмерной частоты  $\chi$  при разных значениях безразмерной массы  $M^*$ . Величина модуля комплексной амплитуды  $\delta_0^*$  уменьшается, а угол сдвига фаз  $\varphi$  увеличивается с ростом  $\chi$  и  $M^*$ , что вполне соответствует физическому смыслу задачи.

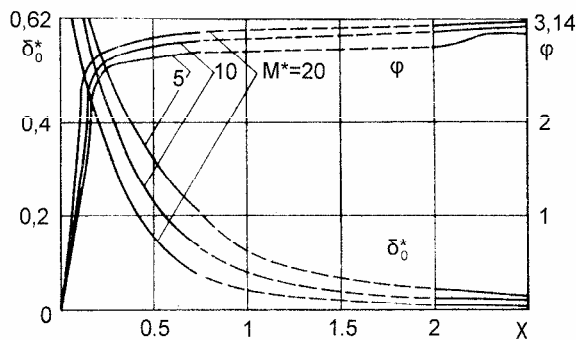


Рис. 2.

## ВЫВОДЫ:

1. Приведен вывод интегрального уравнения с учетом принципа предельного поглощения и изучены свойства ядра этого уравнения.

2. Асимптотические методы достаточно эффективны при решении интегральных уравнений динамических контактных задач, ядра которых являются осциллирующими.

3. При решении методом средних частот применена точная факторизация функции ядра интегрального уравнения и построено эффективное решение до численного анализа.

5. Проведенные исследования показали, что с достаточной для практики степенью точности происходит смыкание приближенных решений для малых и средних частот в диапазоне  $0.5 \leq \chi \leq 1$ , для средних и больших частот в диапазоне  $1.5 \leq \chi \leq 2.25$ . Это позволяет исследовать все основные характеристики задачи при любых значениях параметра  $\chi$ .

6. Приведенные математические методы могут быть рекомендованы для уточненных расчетов в транспортном и общем машиностроении.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Старченко В.Н. К вопросу о трении и сцеплении при взаимодействии колеса с рельсом. // Вісн. Східноукр. нац. ун-ту. -2003. - №9(67). - С. 129-135.
2. Johnson K. L. Contact mechanics. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
3. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. - М.: Наука, 1980.
4. Kalker J. J. Transient phenomena in two elastic cylinders rolling over each other with dry friction. - Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 1970, 37, p. 677.
5. Johnson K. L. Surface Interaction between Elastically Loaded Bodies under Tangential Forces. Proc. Roy. Soc., Ser. A, vol. 230, 1955, p. 531.
6. Mindlin R. D. Compliance of Elastic Bodies in Contact. J. Appl. Mech., vol. 16, №3, 1949, p. 259-268.
7. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. -М.: Наука, 1974.
8. Буряк В.Г. Динамическая контактная задача для упругой полуплоскости. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 6.
9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1966.
10. Бабешко В.А. Об условиях излучения для упругого слоя. Докл. АН СССР, 1973, т. 213, № 3.