УДК 539.3

В.М. ИЛЬМАН, канд. физ.-мат. наук (ДНУЖТ)
С.Ю. РАЗУМОВ (ДНУЖТ)

К КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ПРИ УСТАНОВИВШЕМСЯ КАЧЕНИИ

На прикладі плоскої контактної задачі для пружних тіл показано, що нерівномірна якість з однорідною зоною зчеплення і неоднорідною контактною зоною з моделлю Петрова-Фромма неможливі.

На примере плоской контактной задачи для упругих тел показано, что неравномерное качество с однородной зоной сцепления и неоднородной контактной зоной с моделью Петрова-Фромма невозможны.

With the help of example of plane contact problem for elastic bodies is demonstrated, that irregular rolling with homogeneous zone of adhesion and inhomogeneous contact zone with the help of Petrov-Fromm model is impossible.

В предлагаемой работе приводится решение одной задачи о контактном взаимодействии упругих тел в процессе качения исследовательской программы «Колесо – рельс», проводимой в Днепропетровском национальном университете железнодорожного транспорта под руководством академика Транспортной академии профессора А.А. Босова. Для подвижного состава железных дорог важной остается проблема взаимодействия колесных пар с рельсами. Впервые исследования о фрикционном качении тел вращения по упругому основанию выполнены О. Рейнольдсом [13], в результате которых установлено, что в области контакта присутствует проскальзывание и получена зависимость для коэффициента проскальзывания. В дальнейшем механизм равномерного качение тела через решение контактной задачи рассматривался многими авторами [11, 12, 4, 2].

Несмотря на то, что Ишлинским А.Ю. [6] указаны возможности равномерного качения с одной, двумя и тремя зонами контакта, Улитко А.Ф. [10] доказал возможность равномерного качения только при двухзонном контакте по схеме Петрова-Фромма: с одной зоной сцепления и одной зоной проскальзывания.

Известно, что равномерное качение тела вращение является не единственным установившимся движением [5]. Поэтому исследуем возможность качения цилиндра для одной зоны контакта и по схеме Петрова-Фромма при установившемся периодическом движении с буксованием.

Рассмотрим систему «цилиндр – основание». Пусть в неподвижной ортогональной системе координат (o, x, y) упругий цилиндр радиусом r и массой m, отнесенной к единице длины, катится по упругому горизонтальному основанию в направлении оси x со скоростью его оси $\dot{x}$ и угловой скоростью $\dot{\varphi}$. Предположим, что ось x совпадает с границей упругой полуплоскости, а ось y направлена во внешнюю сторону основания. Предположим также, что упругие свойства цилиндра и основания одинаковы и цилиндр вдавливается в основание постоянной силой Q, отнесенной к единице длины. Цилиндр катится под действием усредненных значений на периоде движения крутящего момента M и горизонтальной силы W, приложенной к его оси в сторону, противоположную движению. Тогда в качестве возмущающего равномерное плоское движение цилиндра в направлении оси x выберем усредненное уравнение, предложенное в работе [7]

$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2 = -Wx + rF, \qquad (1)$$

где усредненная сила F вызвана реакцией основания на заглубление цилиндра как жесткого целого.

Очевидно, качение в системе «цилиндр – основание» возможно по закону (1) при условии, что $rF > Wx$. В момент времени $t = t_1$, когда $rF = Wx$, происходит буксование цилиндра, то есть $\dot{x} = 0, \quad \dot{\varphi} = const$. Если скорости цилиндра мало отличаются от своих средних значений, то условие $\dot{\varphi} = const$ имеет место при выполнении соотношения неравномерного качения типа О. Рейнольдса [5]

$$\frac{r\dot{\varphi} - \dot{x}}{V} = \eta . \qquad (2)$$

Здесь V – средняя скорость оси цилиндра на периоде движения, а $\eta(t) > 0$ – коэффициент упругого скольжения. Решение уравнения (1)

$x = \frac{rF}{W} - \frac{W}{2m}(t+C)^2$ зависит от постоянной величины C, которую определим из условия

$$V = \frac{1}{T}\int_0^T \dot{x}\,dt\,.$$

Теперь скорость оси цилиндра определяется выражением

$$\dot{x} = \frac{W}{m}\left(\frac{T}{2} + \frac{mV}{W} - t\right). \qquad (3)$$

Из выражений (2) и (3) следует, что моменту буксования соответствует

$$t_1 = \frac{T}{2} + \frac{mV}{W} \le T\,.$$

Предполагая, что радиус кривизны цилиндра в месте контакта с основанием намного больше области контакта, поэтому заменим цилиндр верхней полуплоскостью. И рассмотрим теперь физическую модель задачи о контакте двух упругих одинаковых полуплоскостей при условии, что область контакта перемещается по ним по закону (2), (3). При этом будем считать, что скорости движения полуплоскостей малы по сравнению со скоростями упругих возмущений в них, поэтому инерционными членами в уравнениях движения упругих тел пренебрегаем. Обозначим через σ и τ нормальные и касательные напряжения, а через v и u вертикальные и горизонтальные перемещения на границе y=0 упругих полуплоскостей.

Контактные задачи качения в дальнейшем будем рассматривать при полном сцеплении цилиндра с основанием и двух зонах: сцепления и проскальзывания на площадке контакта. На участке проскальзывания имеет место кулоновское трение по закону $\tau=\rho\sigma$, где ρ – коэффициент трения. Так как в зоне сцепления цилиндра с основанием скорости на поверхности цилиндра и граничных точек основания одинаковы, то с учетом выражения (2) имеем зависимость $\frac{d\overline{u}}{dt} = \frac{d}{dt}(u_2 - u_1) = -\eta V$.

Учитывая выражение (3) введем подвижную систему координат (O, ξ, ψ) так, чтобы уравнения профиля цилиндра имело вид $\psi = f(\xi)$. Поэтому очевидно, связь между старыми и новыми координатами представима в виде:

$$x = \xi - \chi(t),\; y = \psi,$$
$$\chi(t) = \frac{W}{2m}(t-t_1)^2 - \frac{W}{2m}t_1^2\,. \qquad (4)$$

Приняв теперь в силу малости площадки контакта l по сравнению с радиусом цилиндра $f(\xi) = \xi^2/2r$, поэтому граничные условия первой задачи на периоде движения T представим так:

$$\begin{aligned}
&\sigma(\xi,t) = 0, \quad \tau(\xi,t) = 0, && \xi \notin l;\\
&\frac{\partial}{\partial\xi}(v_1 + v_2) = -\frac{\xi}{r}, && \xi \in l;\\
&D\overline{u} = \left(-\dot{\chi}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\overline{u} = -\eta V, && \xi \in l.
\end{aligned} \qquad (5)$$

Для второй задачи граничные условия (5) дополнятся на передней части площадки контакта третьим условием из (5), а на задней части – условием проскальзывания $\tau = \rho\sigma$.

Из результатов работ [2, 9] следует, что скачок нормальных деформаций на участке контакта не зависит от касательных напряжений, а нормальные напряжения по второму условию (5) определяются из уравнения

$$\int_l \sigma(s,t)\frac{ds}{s-\xi} = -\frac{\vartheta}{2r}\xi, \qquad \xi \in l, \quad (6)$$

где $\vartheta = \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)}$, E и ν – упругие постоянные. Уравнение (6) в классе ограниченном на концах площадки l решениях [2] позволяет представить нормальные напряжения так же, как при гладком стационарном контакте с $l = [-a, a]$ [2, 9]:

$$\sigma = \frac{\vartheta}{2\pi r}\sqrt{a^2 - \xi^2}, \qquad \vartheta a^2 = 4rQ. \quad (7)$$

Касательные напряжения в зоне сцепления удовлетворяют уравнению [2, 9]

$$\int_{-a}^{a}\frac{\tau(s,t)}{s-\xi}ds = \vartheta\frac{\partial\overline{u}}{\partial\xi}, \quad \xi \in (-a,a)\,.$$

Подействуем оператором D на это уравнение; тогда, учитывая третье граничное условие (5) и свойства сингулярного интеграла [3]

$$D\int_{-a}^{a}\frac{\tau(s,t)}{s-\xi}ds = \int_{-a}^{a}\frac{D\tau(s,t)}{s-\xi}ds +$$

$$+\dot{\chi}\left(\frac{\tau(a,t)}{a-\xi}+\frac{\tau(-a,t)}{a+\xi}\right),$$

а также то, что $\tau(\pm a,t)=0$ получим сингулярное интегральное уравнение относительно функции $D\tau(\xi,t)$:

$$\int_{-a}^{a}\frac{D\tau(s,t)}{s-\xi}ds=0\,,\quad \xi\in(-a,a)\,. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) в классе неограниченных решений [3] с точность до произвольной функции $c(t)$ представимо в виде:

$$\left(-\dot{\chi}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial t}\right)\tau(\xi,t)=-\frac{c(t)}{\sqrt{a^2-\xi^2}}\,. \quad (9)$$

В свою очередь, соотношение (9) определяет интегральную поверхность $B\subset R^3$, которая покрывается следующим семейством характеристик:

$$\frac{d\xi}{dp}=-\dot{\chi},\quad \frac{dt}{dp}=1,\quad \frac{d\tau}{dp}=-\frac{c}{\sqrt{a^2-\xi^2}}\,.$$

Это семейство допускает решение, выраженное через начальные значения величин t, ξ и τ:

$$t-t_0=p,\quad \xi-\xi_0=-\chi_p,$$

$$\tau-\tau_0=-\int_0^p\frac{c(s)ds}{\sqrt{\left|a^2-(\xi+\chi_p-\chi_s)^2\right|}}\,, \quad (10)$$

где $\chi_j=\dfrac{W}{2m}j^2,\quad j=p,s\,.$

Очевидно, в момент буксования интегральная поверхность B пересекает параметрическую кривую:

$$t_0=t_1,\ \xi_0=k,$$

$$\tau_0=\alpha\sqrt{\left|a^2-k^2\right|},\ \alpha=\frac{\rho\vartheta}{2\pi r}\,; \quad (11)$$

поэтому, исключив параметр k из формул (10), получим выражение для касательных напряжений в зоне сцепления

$$\tau(\xi,t)=\alpha\sqrt{\left|a^2-(\xi+\chi_p)^2\right|}-$$
$$-\int_0^p\frac{c(s)\,ds}{\sqrt{\left|a^2-(\xi+\chi_p-\chi_s)^2\right|}}\,, \quad (12)$$

$$p=t-t_1\,.$$

Определим теперь неизвестную функцию c. Для этого воспользуемся условием ограниченности касательных напряжений, то есть $\tau(\pm a,t)=0,\ \forall t\le T$. Тогда из выражения (12), например, при значении $\xi=a$ получим интегральное уравнение относительно функции c

$$\int_0^p\frac{c(s)/\alpha\,ds}{\sqrt{\left|a^2-(a+\chi_p-\chi_s)^2\right|}}=$$
$$=\sqrt{\left|a^2-(a+\chi_p)^2\right|}\,. \quad (13)$$

Уравнение (13) сводится к полному уравнению Абеля с регулярной частью

$$\int_0^{я}\frac{\bar{c}(s)\,ds}{\sqrt{z-s}}+\int_0^{z}\frac{\bar{c}(s)}{\sqrt{z-s}}\times$$
$$\times\left(\frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{(z+s)(2+z^2-s^2)}}-1\right)ds=$$
$$=2z\sqrt{z(2+z^2)}\,,$$

в котором

$$z=\omega p,\quad \bar{c}=c/\alpha a^2\omega,\quad \omega=\sqrt{\frac{W}{2ma}}\,.$$

Так как решение этого уравнения единственное [3], то решение уравнения (13) или эквивалентного ему уравнения вида

$$\int_1^{1+z^2}\frac{\bar{c}(s)\,ds}{\sqrt{s^2-1}}=\sqrt{(1+z^2)^2-1}$$

есть функция $\bar{c}(z)=z$.

Подставим теперь значение для найденной функции c в формулу (12) и после вычисления интеграла получим, что касательные напряжения $\tau(\xi)=\alpha\sqrt{a^2-\xi^2}$ соответствуют скольжению цилиндра по упругому основанию. То есть полное сцепление (однородный контакт) в области контакта при установившемся качении с буксованием невозможен.

Рассмотрим теперь вторую задачу – с неоднородным контактом, для которой нормальные напряжения определяются по формуле (7). Тогда касательные напряжения в силу граничных условий в зоне проскальзывания $(-a,b)$ определяются как $\tau(\xi)=\alpha\sqrt{a^2-\xi^2}$, а в зоне сцепления (b,a) согласно формуле (8) – из уравнения

$$\int_b^a \frac{D\tau(s,t)}{s-\xi}ds=-\int_{-a}^b \frac{D\tau(s,t)}{s-\xi}ds= \\ =-\alpha\dot{\chi}\int_{-a}^b \frac{s}{\sqrt{a^2-s^2}}\frac{ds}{s-\xi},\qquad \xi\in(b,a) \tag{14}$$

Обращая сингулярный интеграл на промежутке (b,a) [3], получим:

$$D\tau(\xi,t)=\frac{1}{\sqrt{(a-\xi)(\xi-b)}}\times \\ \times\left(\frac{\alpha\dot{\chi}}{\pi^2}\int_b^a \frac{\sqrt{(a-s)(s-b)}}{s-\xi}ds\times \right. \\ \left. \times\int_{-a}^b \frac{\varsigma}{\sqrt{a^2-\varsigma^2}}\frac{d\varsigma}{\varsigma-s}-c_0(t)\right) \tag{15}$$

Повторный интеграл в выражении (15) удается вычислить, если изменить порядок интегрирования. Так как внутренний интеграл не особенный, то в результате получим

$$I=\int_{-a}^b \frac{\varsigma}{\sqrt{a^2-\varsigma^2}}\frac{d\varsigma}{\varsigma-\xi}\int_b^a \sqrt{(a-s)(s-b)}\times \\ \times\left(\frac{1}{s-\xi}-\frac{1}{s-\varsigma}\right)ds.$$

Каждый из внутренних интегралов легко вычисляется по методике Мусхелишвили [9], поэтому

$$I=\pi\int_{-a}^b \frac{\varsigma}{\sqrt{a^2-\varsigma^2}}\left(1+\frac{\sqrt{|\varsigma-b||\varsigma-a|}}{\varsigma-\xi}\right)d\varsigma .$$

И снова используя ту же методику, окончательно найдем, что интеграл

$$I=-\pi\sqrt{a^2-b^2}+\pi^2\left(\frac{a+b}{2}-\xi+\xi\sqrt{\frac{|\xi-b|}{\xi+a}}\right)$$

Подставив теперь значение интеграла I в формулу (15), получим уравнение относительно касательных напряжений на участке сцепления

$$\left(-\dot{\chi}\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial t}\right)\tau(\xi,t)= \\ =-\alpha\left(\frac{\dot{\chi}\xi+c_1(t)}{\sqrt{(a-\xi)(\xi-b)}}-\frac{\dot{\chi}\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}}\right) \tag{16}$$

где $c_1=c_0/\alpha+\dot{\chi}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\pi}-\frac{a+b}{2}\right)$.

Применим к уравнению (16) такую же схему поиска решения, как и к уравнению (9). В результате найдем распределение касательных напряжений в зоне сцепления:

$$\tau(\xi,t)=\alpha\sqrt{\left|a^2-(\xi+\chi_p)^2\right|}- \\ -\alpha\int_0^p\left(\frac{\dot{\chi}_s\bar{\xi}+c_1(s)}{\sqrt{|(\bar{\xi}-b(s))(a-\bar{\xi})|}}-\frac{\dot{\chi}_s\bar{\xi}}{\sqrt{\left|a^2-\bar{\xi}^2\right|}}\right)ds,$$

где $\bar{\xi}=\xi+\chi_p-\chi_s$.

Так как интеграл

$$\int_0^p \frac{\dot{\chi}_s\bar{\xi}}{\sqrt{\left|a^2-\bar{\xi}^2\right|}}ds=\sqrt{a^2-\xi^2}-\sqrt{\left|a^2-(\xi+\chi_p)^2\right|},$$

то окончательно на участке сцепления (b,a) имеем

$$\tau(\xi,t)=\alpha\sqrt{a^2-\xi^2}- \\ -\alpha\int_0^p \frac{\dot{\chi}_s\bar{\xi}+c_1(s)}{\sqrt{|(\bar{\xi}-b(s))(a-\bar{\xi})|}}ds. \tag{17}$$

Полученное решение качественно верно отражает поведение касательных напряжений на площадке контакта, которые в момент буксования $(p=0)$ распределены по закону кулоновского скольжения. Найдем теперь на площадке контакта точку раздела зон сцепления и проскальзывания.

Из условия непрерывности касательных напряжений на площадке контакта следует, что $\tau(b-0,t)=\tau(b+0,t)$ и, кроме того, имеет место условие $\tau(a,t)=0$. Эти условия и позволяют найти две неизвестные в формуле (17).

$$\int_0^p \frac{\dot{\chi}_s \bar{b} + c_1(s)}{\sqrt{\left|(\bar{b} - b(s))(a - \bar{b})\right|}} ds = 0,$$
$$\int_0^p \frac{\dot{\chi}_s \bar{a} + c_1(s)}{\sqrt{\left|(\bar{a} - b(s))(a - \bar{a})\right|}} ds = 0. \qquad (18)$$

Нетрудно заметить, что уравнения (18) имеют только решения $c_1 = \dot{\chi}_p \chi_p$, $b = a$. Поэтому и в этой задаче качение не возможно. Таким образом, рассмотренные постановки задач не корректны для установившегося качения в целом.

Можно лишь считать, что рассмотренные постановки задач являются локальными, то есть предшествуют моменту буксования, перед тем как зона сцепления в области контакта исчезает [2, 5]. В частности, при равномерном качении цилиндра $b = const \quad (c_1 = 0)$ для любых значений $p \neq 0$ имеем из выражения (17) известный результат [2] распределения касательных напряжений в зоне сцепления (b, a) $\tau(\xi) = \alpha\left(\sqrt{a^2 - \xi^2} - \sqrt{(a-\xi)(\xi - b)}\right)$.

В реальности качение тел происходит по более сложным контактным законам, на что указывают экспериментальные [8] и теоретические [1] исследования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Босов А.А., Ильман В.М. О динамике качения цилиндрического катка по деформируемому основанию // Транспорт: Збірник наук. праць. – 2002. – Вип. 12. – Д. – С. 30-36.
2. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Физматгиз, 1963. – 640 с.
4. Глаголев Н.И. Сопротивление перекатыванию цилиндрических тел // Прикл. матемaтематика и механика. – 1945. – Т. 9, вып. –4. С. 318 – 333.
5. Ильман В.М., Мусияка В.Г. О контактной задаче при установившемся качении // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 1999. – Т. 5. – Д. – С. 94-100.
6. Ишлинский Ю.А. Прикладные задачи механики. Кн.2. – М., 1986. – 362 с.
7. Марюта А.Н. Теория моделирования колебаний рабочих органов механизмов и ее приложения. Днепропетровск: ДГУ, 1991. – 146 с.
8. Марков Д.П. Взаимосвязь коэффициента трения с проскальзыванием в условиях взаимодействия колеса с рельсом // Вестник ВНИИЖТ. – 2003. – №3. – С. 31-33.
9. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
10. Улитко А.Ф. О задаче Рейнольдса перекатывания жесткого цилиндра по упругому несжимаемому основанию // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 1999. – Т. 5. – Д. – С.182-192.
11. Carter F.W. On the action of a locomotive driving wheel. // Proc Royal Soc. – 1926. – Ser. A., vol. 112, N 760. – London. – P. 151-157.
12. Fromm H. Berechnung des Schlupfes beim Rollen deformierbarer Scheiben. // Ztschr. angew. Math. und Mech. – 1927. – Bd. 7, H. 1. – S. 27-58.
13. Reynolds O. On rolling-friction. // Rhil. Trans. Roy. Soc. – 1876. – Vol. 166, pt. 1. – London. – P. 155-174.