

## АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ И МОМЕНТОВ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ КОЛЕСНОЙ ПАРЫ СКОРОСТНОГО ЭКИПАЖА И РЕЛЬСА

Пропонується алгоритм визначення гіроскопічних сил і моментів, що виникають при взаємодії колісної пари швидкісного вагона та рейки. Алгоритм базується на використанні нелінійних диференціальних рівнянь просторового руху в формі Ейлера-Лагранжа та експериментальній інформації про кінематичні параметри руху колісної пари, яка формується за допомогою безплатформної інерціальної системи.

Предлагается алгоритм определения гироскопических сил и моментов, возникающих при взаимодействии колесной пары скоростного вагона и рельса. Алгоритм основан на применении нелинейных дифференциальных уравнений пространственного движения в форме Эйлера-Лагранжа и экспериментальной информации о кинематических параметрах движения колесной пары, формируемой бесплатформенной инерциальной системой.

The algorithm of an estimation of gyroscopic forces and moments arising at interaction of wheel pair of the high-speed car and a rail is offered. The algorithm is based on application of the nonlinear differential equations of spatial movement in the form Euler-Lagrange and experimental information about kinematics parameters of movement of wheel pair formed by nonplatform inertial system.

Согласно концепции организации скоростного и высокоскоростного движения пассажирских поездов на сети железных дорог Украины предусматривается поэтапное повышение скорости движения на существующих линиях до 160 км/ч с последующим сооружением специализированных высокоскоростных магистралей [1]. Увеличение скорости движения железнодорожных экипажей может привести к необходимости учета и корректной оценки гироскопических сил и моментов, нарастающих по квадратическому закону в зависимости от скорости вращения колесной пары и пропорционально её моменту инерции. Наряду с центробежными и гироскопическими силами и моментами существенное влияние на безопасность поступательного движения железнодорожного экипажа могут оказать и кориолисовы силы, обусловленные колебаниями вращающейся с высокой скоростью колесной пары относительно тележки, кривизной пути в плане и профиле [2]. Количественная оценка упомянутых инерционных сил и моментов в общем балансе силового взаимодействия колесной пары и рельса в зависимости от скорости поступательного движения представляет актуальную задачу.

Схема колесной пары железнодорожного экипажа представлена на рис. 1. Вводится система координат  $OY_1Y_2Y_3$ , связанная с буксовым узлом, полюс которой выбирается в точке,

где технически возможен монтаж инерциальной системы.

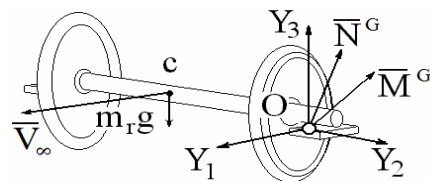


Рис. 1

Ось  $OY_1$  направлена горизонтально по ходу движения,  $OY_2$  – параллельно оси вращения колесной пары,  $OY_3$  – вертикально вверх, образуя правую ортогональную систему координат. Представляется целесообразным использовать бесплатформенную инерциальную систему [3], чувствительные элементы которой позволят измерить компоненты линейной  $V_{yri}$  и угловой  $\omega_{yri}$  ( $i=1, 2, 3$ ) скорости колесной пары в проекциях на выбранные связанные оси. Отметим, что в принятых обозначениях полагаются известными компоненты  $V_{y1}$  и  $\omega_{y2}$ :

$$V_{y1} = V_{\infty} \text{ и } \omega_{y2} = \omega_{\infty}.$$

Здесь  $V_{\infty}$  – заданная поступательная скорость железнодорожного экипажа,  $\omega_{\infty}$  – скорость вращения колесной пары, определяемая по формуле:

$$\omega_\infty = \frac{V_\infty}{r},$$

где  $r$  – радиус колеса.

Центр масс колесной пары задан в связанных осях координатами  $y_{cri}$  ( $i=1,2,3$ ). Масса колесной пары  $m_r$  и ее главные центральные моменты инерции  $I_{11}^{cr}$ ,  $I_{22}^{cr}$ ,  $I_{33}^{cr}$  полагаются заданными, причем  $I_{11}^{cr} = I_{33}^{cr}$ . Компоненты искомого гироскопических сил и моментов  $N_{yri}^G, M_{yri}^G$  ( $i=1,2,3$ ) будем находить в введенной связанной системе координат.

Матрица инерции колесной пары  $\bar{I}_{yr}$ , отнесенная к её массе, приводится к рассматриваемым связанным осям по следующему алгоритму, построенному на основе кватернионных матриц [4]:

$$2\bar{I}_{yr} = 2A \times^t A \times \bar{I}_{or} \times A^t \times^t A^t + (Y_{cr} + {}^t Y_{or}^t) \times (Y_{or}^t + {}^t Y_{cr}^t) + Y_{or} (Y_{cr}^t + {}^t Y_{cr}^t)$$

где  $\bar{I}_{or}$  – приведенная к массе  $m_r$  матрица инерции колесной пары относительно системы осей, определяемых полюсом с координатами  $y_{ori}$  ( $i=1, 2, 3$ ) и ориентированных относительно введенных связанных осей с помощью параметров Родрига-Гамильтона  $a_j$  ( $j=0, 1, 2, 3$ );  $A, {}^t A, A^t, {}^t A^t, Y_{or}, {}^t Y_{or}, Y_{or}^t, {}^t Y_{or}^t, Y_{cr}, {}^t Y_{cr}, Y_{cr}^t, {}^t Y_{cr}^t$  – кватернионные матрицы, составленные соответственно по параметрам Родрига-Гамильтона  $a_j$  ( $j=0, 1, 2, 3$ ), координатам полюса  $y_{ori}$  ( $i=1, 2, 3$ ), координатам центра масс колесной пары  $y_{cri}$  ( $i=1, 2, 3$ ) в связанных осях или в развернутой записи:

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}, Y_{or} = \begin{pmatrix} 0 & y_{or1} & y_{or2} & y_{or3} \\ -y_{or1} & 0 & -y_{or3} & y_{or2} \\ -y_{or2} & y_{or3} & 0 & -y_{or1} \\ -y_{or3} & -y_{or2} & y_{or1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$Y_{cr} = \begin{pmatrix} 0 & y_{cr1} & y_{cr2} & y_{cr3} \\ -y_{cr1} & 0 & -y_{cr3} & y_{cr2} \\ -y_{cr2} & y_{cr3} & 0 & -y_{cr1} \\ -y_{cr3} & -y_{cr2} & y_{cr1} & 0 \end{pmatrix}.$$

В частности, при совмещении полюса и центра масс колесной пары, то есть  $y_{ori} = y_{cri}$ . Получим соответственно

$$Y_{cr} = Y_{or}, Y_{cr}^t = Y_{or}^t, {}^t Y_{cr} = {}^t Y_{or}, {}^t Y_{cr}^t = {}^t Y_{or}^t$$

и, учитывая, что  $Y_c + {}^t Y_c^t = 0$ , найдем

$$2\bar{I}_{yr} = 2A \times^t A \times \bar{I}_{cr} \times A^t \times^t A^t + Y_{cr} (Y_{cr}^t + {}^t Y_{cr}^t),$$

где  $\bar{I}_{cr}$  – матрица инерции, составленная по главным центральным моментам инерции, отнесенным к массе  $m_r$

$$\bar{I}_{cr} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{I}_{11}^{cr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{I}_{22}^{cr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{I}_{33}^{cr} \end{pmatrix}.$$

В случае, когда главные центральные оси инерции соответственно параллельны введенным связанным осям, имеем

$$A = E_o, {}^t A = E_o, A^t = E_o, {}^t A^t = E_o,$$

где  $E_o$  – единичная (4×4)-матрица, приведенная формула упрощается и принимает вид

$$2\bar{I}_{yr} = 2\bar{I}_{cr} + Y_{cr} (Y_{cr}^t + {}^t Y_{cr}^t)$$

или в развернутой записи

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{I}_{11}^{yr} - \bar{I}_{12}^{yr} - \bar{I}_{13}^{yr} \\ 0 - \bar{I}_{21}^{yr} & \bar{I}_{22}^{yr} - \bar{I}_{23}^{yr} \\ 0 - \bar{I}_{31}^{yr} - \bar{I}_{32}^{yr} & \bar{I}_{33}^{cr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{I}_{11}^{cr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{I}_{22}^{cr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{I}_{33}^{cr} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_{cr3}^2 + y_{cr2}^2 & -y_{cr2} y_{cr1} & -y_{cr3} y_{cr1} \\ 0 & -y_{cr1} y_{cr2} & y_{cr3}^2 + y_{cr1}^2 & -y_{cr3} y_{cr2} \\ 0 & -y_{cr1} y_{cr3} & -y_{cr2} y_{cr3} & y_{cr2}^2 + y_{cr1}^2 \end{pmatrix}.$$

Применяя нелинейные дифференциальные уравнения пространственного движения в форме Эйлера-Лагранжа [5], получим компактную блочно-матричную формулу для определения инерционных сил и моментов, обусловленных гироскопическими, кориолисовыми, центробежными составляющими, возникающих при взаимодействии вращающейся с высокой скоростью колесной пары и учете кручения и кривизны пути в плане и профиле:

$$-\frac{1}{m_r} \left\| \frac{M_{yr}^G}{N_{yr}^G} \right\| =$$

$$= \left\| \frac{\frac{1}{2}({}^t\Omega_{yr} + \Omega_{yr})}{0} \right\| \left\| \frac{\frac{1}{2}({}^tV_{yr} + V_{yr})}{\frac{1}{2}({}^t\Omega_{yr} + \Omega_{yr})} \right\| \times$$

$$\times \left\| \frac{\bar{I}_{yr}}{\frac{1}{2}({}^tY_{cr} + Y_{cr})} \right\| \left\| \frac{E_0}{\omega_{yr}} \right\| \left\| \frac{\omega_{yr}}{V_{0yr}} \right\|.$$

Здесь блочные матрицы формируются из рассмотренных ранее матриц  $\bar{I}_{yr}$ ,  $Y_{cr}$ ,  $E_0$  и вводимых кватернионов  $\Omega_{yr}$ ,  $V_{yr}$ , составленных по компонентам вектора угловой  $\omega_{yt}$  и линейной  $V_{oyt}$  ( $i=1, 2, 3$ ) скорости полюса колесной пары в проекциях на выбранную связанную систему координат. Указанные компоненты угловой и линейной скорости колесной пары приняты в качестве квазискоростей [5] и непосредственно измеряются бесплатформенной инерциальной системой [3], чувствительные элементы которой размещены на буксовом узле и определяют ориентацию связанной системы координат. Квазискорости измеряются непрерывно в процессе движения колесной пары по реальному рельсу с учетом локальных неровностей, плана и профиля пути. В качестве чувствительных элементов бесплатформенной инерциальной системы используются высокоточные акселерометры, действие которых основано на различных физических и конструктивных принципах, использующих инерцию и способных обнаруживать угловую и линейную скорость. [6].

Таким образом, предложен алгоритм оценки динамического взаимодействия колесной пары и рельса, обусловленного центробежными, кориолисовыми и гироскопическими силами и моментами, возникающими при высокоскоростном

движении железнодорожного экипажа по реальному пути с учетом кручения и кривизны в плане и профиле, локальных неровностей. Алгоритм получен на основе нелинейных дифференциальных уравнений пространственного движения в форме Эйлера-Лагранжа и экспериментальной информации о квазискоростях, измеряемых с помощью бесплатформенной инерциальной системы. Алгоритм представлен кватернионными матрицами и хорошо адаптирован к вычислительному эксперименту по оценке безопасной скорости движения.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кірка Г.М., Дьомін Ю.В. Пасажирським перевезенням – швидкість і комфорт // Залізничний транспорт України. 2004. – № 4. С. 4-7.
2. Мямлин С.В. Моделирование динамики рельсовых экипажей. – Д.: Новая идеология, 2002. – 240 с.
3. Эдвардс А.Ж. Бесплатформенные инерциальные навигационные системы // Вопросы ракетной техники.–1973.–№ 5.–С.47–70.
4. Лысенко Л.Н., Кравец В.В. Симметризованный подход к представлению тензора инерции составных асимметричных объектов ракетно-космической техники. // Вестник МГТУ. Сер. Машиностроение.–1996.–№ 1.–С.36–45.
5. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961, – 824 с.
6. Бетви Т.С., Голдберг Е.А., Ирвин Г.А. Сравнение различных вариантов блока инерциальных чувствительных элементов для космического транспортного корабля. // Вопросы ракетной техники.–1971.–№10.–С. 60-78.