

КОЛЕБАНИЯ КONTИНУАЛЬНЫХ БАЛОК С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ ОПОРАМИ

Результаты досліджень, які основані на застосуванні логічних моделей, використовуються для врахування проміжних опор нерозрізних багатопрогенових балок. Отримані матриці враховують будь-які можливі сполучення пружних закріплень як кінцевих, так і проміжних ділянок континуальних балок. При цьому виключаються додаткові рішення для частин стрижня в місцях розташування зосереджених мас, пружних опор або шарнірів.

Результаты исследований, основанных на применении логических моделей, использованы для учета промежуточных опор неразрезных многопролетных балок. Полученные матрицы учитывают любые возможные сочетания упругих закреплений как концевых, так и промежуточных участков континуальных балок. При этом исключаются дополнительные решения для частей стержня в местах расположения сосредоточенных масс, упругих опор или шарниров.

Results of investigations, based upon logical models application, are used for account of intermediate supports of continuous multispans beams. The matrices obtained take into account all possible combinations of elastic fastenings of both the end and intermediate sections of continuous beams. In this, any additional solutions for the bar parts placed in the whereabouts of localized masses, elastic supports or joints are excluded.

На сегодняшний день среди множества способов определения частот собственных колебаний неразрезных многопролетных балок можно выделить несколько основных направлений, выбрав в качестве критерия их точность, универсальность, затраты инженерного труда и машинного времени ЭВМ.

Исследования первого направления связаны с получением точного решения для колебаний стержневых систем с действительным отражением геометрических, жесткостных и массовых характеристик реальной конструкции.

Второе из них заключается в упрощении самой модели непрерывной конструкции путем замены ее системой упругих элементов с конечным числом степеней свободы и последующем точном решении.

Наконец, к третьему направлению относятся различные приближенные методы расчета систем с бесконечно большим числом степеней свободы.

Дискретные методы с одной стороны, позволяют рассматривать системы с большим числом степеней свободы, но не гарантируют точность описания деформаций каждого элемента. С другой стороны, континуальные модели более точно отображают физические свойства реальной конструкции, но чрезвычайно быстро усложняется их математическое описание при возрастании числа учитываемых элементов и связей.

Отмеченные направления особенно отчетливо проявились при расчетах однопролетных систем, где, главным образом, рассматриваются системы с сосредоточенными или же с распределенными параметрами [1]. При этом каждая из них может быть получена обычным предельным переходом.

Одновременный учет распределенных параметров с сосредоточенными массами, что во многом аналогично неразрезной балке на упругих опорах, существенно усложняет расчет и требует иных подходов к решению данной задачи. Часто такой расчет на основе классических методов строительной механики оказывается затруднительным и дорогостоящим, а иногда и вообще невыполним из-за большого числа узловых сопряжений и элементов конструкции. Если к тому же учесть, что в инженерной практике приходится иметь дело с неразрезными стержневыми системами из многократно повторяющихся регулярных включений в виде сосредоточенных масс, упругих опор или шарниров, то станет вполне понятным стремление к изысканию более простых расчетных схем и их решений.

В данной работе для оценки динамических характеристик неразрезных континуальных балок использована методика логического моделирования.

Следуя [2], уравнение частот для прямолинейной континуальной цепной системы с различными видами упругих закреплений (рис. 1) можно представить в виде:

$$V_1 \prod_{k=2}^{n-1} M_k V_n = 0, \quad (1)$$

где матрицы V_1 , M_k , V_n сформированы из элементов ассоциированных матриц каждого из n участков неразрезной балки.

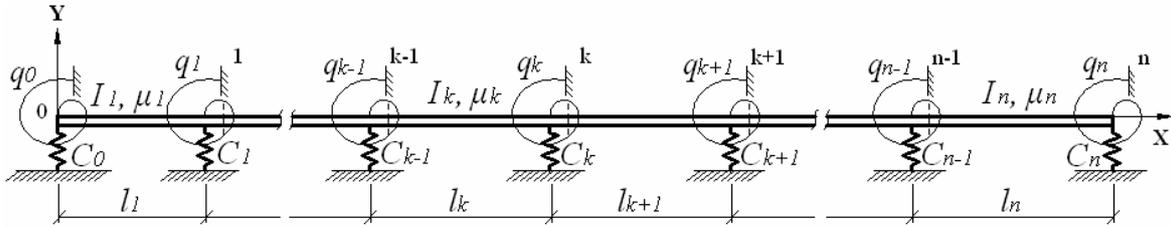


Рис. 1

Для участка балки с упругим относительно вертикальных перемещений опиранием на левом конце:

$$M_k = M + c_k M_{0101}^{(1)} + c_k M_{0011}^{(1)}, \quad (2)$$

где M – ассоциированная матрица обычного участка балки [2]; $M_{0101}^{(1)}$, $M_{0011}^{(2)}$ – матрицы, состоящие из первой и второй строк функций кодов 0101, 0011 и имеющие остальные нулевые строки.

Учитывая, что уравнение частот континуальной балки с упругими опорами можно получить путем последовательного «отсечения» упругих связей, то для участка балки с упругим относительно поворота сечения закреплением матрица M_k может быть получена из той же матрицы M прибавлением к элементам первой и пятой строк соответствующих элементов второй и шестой, умноженных на жесткость упругой связи q_k :

$$M_k = M + q_k M_{1010}^{(1)} + q_k M_{0011}^{(5)}. \quad (3)$$

Произвольный участок балки с обоими видами упругих закреплений на левом конце описывается матрицей

$$M_k = M + q_k \left(M_{1010}^{(1)} + M_{0011}^{(5)} \right) + c_k \left(M_{0101}^{(1)} + M_{0011}^{(2)} \right) + q_k c_k M_{0011}^{(1)}. \quad (4)$$

Матрицы M_k (2), (3), (4) имеют тот же порядок, что и матрица M , и дают возможность формального построения уравнений частот многопролетных балок в форме (1).

Для вектора V_n участка балки с упругими опорами на правом конце (см. рис. 1) независимо от вида граничных условий на левом конце можно записать:

$$V_n = V_{1100} + q_n V_{1010} + c_n V_{0101} + q_n c_n V_{0011}. \quad (5)$$

Использование ассоциированных матриц M_k , V_n позволяет строить уравнения частот для неразрезных континуальных балок с любыми вертикально-линейными и поворотными упругими опорами. Из этих же матриц можно получить все частные случаи возможных сочетаний граничных условий.

Предлагаемая форма упругих закреплений представляется более удобной, чем обычно используемая в методе прогонки, поскольку отпадает необходимость введения специальных матриц перехода (опор) с большим числом нулевых элементов.

В практике современного мостостроения все большее распространение получают конструкции в виде регулярных и квазирегулярных стержневых систем: неразрезные пролетные строения балочных мостов, мосты комбинированных систем, многопанельные рамы, фермы, балки проезжей части, виадуки, трубопроводы, монорельсовые дороги и другие. Кроме того, условия периодичности в неразрезных конструкциях позволяют упростить значительную часть инженерных расчетов.

Так, уравнение частот для неразрезных регулярных и квазирегулярных балок с вертикально-линейными промежуточными упругими опорами имеет вид

$$V_1 M_k^{n-2} V_n = 0. \quad (6)$$

Для удобства программирования и вычислений на ЭВМ представим матрицу M_k как сумму двух матриц

$$M_k = M + c_0 M_p,$$

где

$$M_p = M_{0101}^{(1)} + M_{0011}^{(2)}.$$

Матрицы M и M_p обладают примечательными свойствами при многократном их перемножении. Так, функции $A(n\lambda), \dots, H(n\lambda)$ при возведении матрицы M в n -ю степень преобразуются в такую же матрицу M с функциями элементов $A(n\lambda), \dots, H(n\lambda)$.

В свою очередь, матрицу M_p разделим на две матрицы M_{p1} и M_{p2} , где M_{p1} имеет тот же порядок что и матрица M и состоит из нулевых элементов и функций $A(\lambda), B(\lambda), G(\lambda)$, как и для неразрезной балки на жестких промежуточных опорах. Тогда $M_{p2}^n = 0$ и $M_{p2} M_{p1} = 0$.

Поэтому для матрицы M_p^n можно записать:

$$M_p^n = M_{p1}^{n-1} (M_{p1} + M_{p2}) = M_{p1}^{n-1} M_p, \quad (7)$$

где возведение в $(n-1)$ -ю степень матрицы M_{p1} соответствует [2] с использованием функций $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$.

Для неразрезных балок на жестких опорах собственные значения λ могут быть получены в более простой форме аналогично [3] решением уравнений по методу деформаций с использованием конечных тригонометрических рядов:

$$F_2(\lambda) + F_1(\lambda) \cos \frac{\pi}{n} (i + \delta) = 0, \quad (8)$$

где i – номер формы колебаний порождающей системы; δ – коэффициент, зависящий от типа граничных условий ($\delta = 0$ для шарнирно опертых по концам балок; $\delta = -1$ для балок с за-

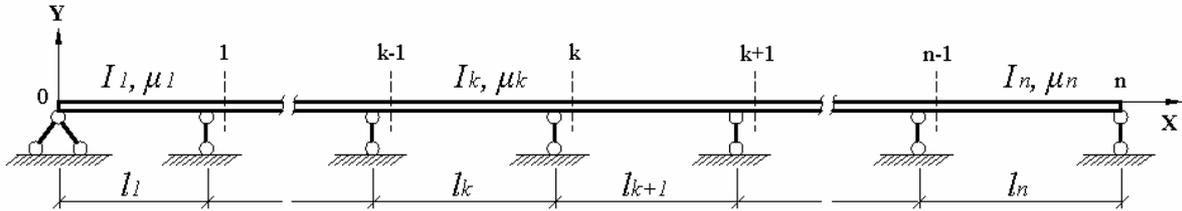


Рис. 2

щемленными концами; $\delta = -0,5$ для балок один конец которых оперт, другой – заделан); n – количество пролетов неразрезной балки. Полученные выше результаты для регулярных и квазирегулярных балок можно использовать для проведения простых приближенных расчетов спектра частот неразрезных балок с периодической или кратной регулярностью, а также нерегулярных многопролетных балок. Рассмотрим неразрезную балку (рис. 2) с различными жесткостями и массами в пролетах, имеющих различные длины l_k и произвольные граничные условия. Обозначим действительные линейные частоты первой зоны сгущения такой балки через $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$, а соответствующие частотные параметры неразрезной регулярной балки с таким же количеством пролетов и граничными условиями – $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Вспользуемся известной методикой проф. Е. С. Сорокина [4], который для определения первой (\bar{v}_1) и последней (\bar{v}_n) частот зоны сгущения условно разделял неразрезную систему на ряд однопролетных балок с шарнирным опиранием или защемлениями в местах расположения промежуточных опор. Таким образом, к каждой частоте \bar{v}_1 и \bar{v}_n относились группы соответствующих частот изолированных балок $v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1n}$ и $v_{n1}, v_{n2}, \dots, v_{nn}$, позволяющие использовать их для дальнейшей статистической обработки.

В данном случае нет необходимости выделения из основной системы совокупности изолированных однопролетных балок. Достаточно сразу воспользоваться определением соответствующих парциальных частот из безразмерных параметров λ_i регулярной балки с граничными условиями исходной системы. При этом появляется возможность аналогичного определения всего спектра частот неразрезной балки.

Предположим, что произвольной n -пролетной балке соответствует эквивалентная регулярная n -пролетная балка, имеющая частоты исходной системы $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$. Тогда такой или любой другой по жесткостным и массовым характеристикам регулярной балке с количеством проле-

тов n будет всегда соответствовать один и тот же спектр частотных параметров λ_i . По каждому конкретному значению λ_i можно определить n парциальных частот v_{ik} регулярных балок с характеристиками (EI_k, μ_k, l_k) каждого k -го пролета нерегулярной балки

$$v_{ik} = \frac{\lambda_i^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI_k}{\mu_k l_k}}; \quad i, k = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Следовательно, можно утверждать, что i -я частота многопролетной нерегулярной балки не меньше i -й частоты регулярной балки с характеристиками самого гибкого пролета исходной системы и не больше i -й частоты регулярной балки с параметрами наиболее жесткого пролета той же системы.

Поэтому весь спектр частот неразрезной балки с произвольными граничными условиями можно оценить по аналогичным [4] формулам:

$$\bar{v}_i = \sqrt[4]{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_{ik}^4}; \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (10)$$

$$\frac{1}{\bar{v}_n} = \sqrt[4]{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{v_{nk}^4}}. \quad (11)$$

Таким образом, для того, чтобы получить значения частот любой зоны сгущения многопролетной нерегулярной балки, необходимо:

– определить частотные параметры λ_i соответствующей зоны сгущения неразрезной регулярной балки с таким же количеством пролетов и видом граничных условий;

– вычислить по формуле (9) значения парциальных частот регулярных балок с характеристиками каждого пролета основной системы;

– по формулам (10), (11) определить требуемые величины частот \bar{v}_i для $i = 1, 2, \dots, n$.

Точность полученных результатов будет особенно высокой для неразрезных балок с периодической или кратной регулярностью и достаточно большим количеством повторяющихся пролетов. Для нерегулярных балок область практического применения формул (10), (11) следует ограничить условиями [4], чтобы наименьшие и наибольшие величины параметров отдельных стержней неразрезной балки отличались между собой не более чем в 4 раза – для значений жесткостей, а также их масс; не более чем на 30 % – для соответствующих длин пролетов и не более чем в 2 раза – в пределах каждой группы парциальных частот регулярных балок при каком-то конкретном значении i .

Рассмотрим пример определения спектра частот 5-пролетной балки, имеющей следующие исходные данные:

$$\mu_1 = 0,52 \text{ кНм}^{-2}\text{с}^{-2}, \quad \mu_2 = 0,24 \text{ кНм}^{-2}\text{с}^{-2},$$

$$\mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 0,37 \text{ кНм}^{-2}\text{с}^{-2};$$

$$l_1 = l_5 = 2,25 \text{ м}, \quad l_2 = l_3 = 2,42 \text{ м}, \quad l_4 = 2,7 \text{ м};$$

$$EI_1 = EI_2 = 2,9 \cdot 10^3 \text{ кНм}^2,$$

$$EI_3 = EI_5 = 4,1 \cdot 10^3 \text{ кНм}^2,$$

$$EI_4 = 6,8 \cdot 10^3 \text{ кНм}^2.$$

По уравнению (8) определяем частотные параметры регулярной балки с шарнирно опертыми концами:

$$\lambda_1 = 4,55, \quad \lambda_2 = 4,15, \quad \lambda_3 = 3,70,$$

$$\lambda_4 = 3,31, \quad \lambda_5 = 3,14.$$

Результаты вычислений по формулам (9)–(11) приведем в табл. 1, а значения \bar{v}_i по уравнению (1) и процент полученных расхождений, табл. 2.

Таблица 1

Частота v_{ik} , Гц					
$i \backslash k$	1	2	3	4	5
1	48,62	61,88	59,24	61,32	68,54
2	40,45	51,47	49,28	51,01	57,01
3	32,15	40,92	39,17	40,55	45,32
4	25,73	32,75	31,35	32,45	36,27
5	23,16	29,47	28,21	29,20	32,64

Таблица 2

i	v_i (1)	v_i (10), (11)	Ошибка, %
1	59,99	60,89	1,5
2	51,29	50,66	1,2
3	40,89	40,27	1,5
4	31,29	32,23	3,0
5	26,24	27,58	5,1

Как видим, даже для неразрезной балки с произвольными характеристиками каждого из пролетов получены довольно близкие значения собственных частот колебаний первой зоны сгущения. Однако в практических задачах гораздо чаще встречаются системы балок с различными формами регулярности, что способствует повышению точности расчетов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Каспшик Станислав, Данг-Тинь. Собственные колебания некоторой консервативной системы с распределенными и сосредоточенными параметрами // *Zag. drgán. nielin.* 1979. 19. pp. 263–272.
2. Распопов А. С. Применение логических моделей к расчету колебаний неразрезных мостовых конструкций // 6th International Conference «Modern Building Materials, Structures and Techniques» (19–21 May 1999, Vilnius, Lithuania) // *Proceedings.* – Vol. III. – Vilnius: Technika, 1999, pp. 223–228.
3. Kolousek V. Dynamics in Engineering Structures. Prague: Czech. Acad. Sci., 1973. 580 p.
4. Сорокин Е. С. Динамический расчет несущих конструкций зданий. – М.: Госстройиздат, 1956. – 340 с.

Поступила в редколлегию 23.05.2005.