

ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КВАЗИРЕГУЛЯРНОЙ ТРЕХПРОЛЕТНОЙ БАЛКИ

У роботі на прикладі трипрогінної нерегулярної балки досліджено вплив нерегулярностей лінійних, жорсткісних та масових параметрів на зміну власних частот. Доведено, що при окремих визначених параметрах нерегулярностей у практичних розрахунках можливо використовувати прості рішення для регулярних систем, отримані приблизні залежності, графіки та номограми.

В работе на примере трехпролетной нерегулярной балки исследовано влияние нерегулярностей линейных, жесткостных и массовых параметров на изменение собственных частот. Показано, что при определенных параметрах нерегулярности в практических расчетах можно использовать простые решения для регулярных систем, получены приблизительные зависимости, графики и номограммы.

The article, using the example of a three-flight irregular beam, studies the influence of irregularities of linear, stiffness- and mass-related parameters on the change of own frequencies. It has been shown that at certain parameters of irregularity it is possible to use in practical calculations simple solutions for regular schemes, the obtained approximated dependences, charts and nomograms.

Данная статья является логическим продолжением исследований, отраженных ранее в работах [1; 2], влияния незначительных нерегулярностей по длинам пролетов, массе и жесткости пролетов на частоту собственных колебаний.

В данном случае фундаментальные исследования с двухпролетных балок четырнадцати типов, в том числе и на упругих опорах, перенесены на трехпролетную балку на жестких опорах. Как отмечено в указанных выше работах, нерегулярность по весовым и жесткостным параметрам оказывает влияние на изменение собственных частот неразрезных балок на жестких и упругих опорах значительно меньше, чем нерегулярность по длинам пролетов.

Данное исследование выполнено для квази-регулярной балки путем сравнения решений для собственных частот с аналогичной регулярной балкой. При этом задачей исследований устанавливались предельные границы линейных (l), жесткостных (EI) и массовых (μ) значений параметров, при которых вычисления частот можно производить по значительно более простым решениям для регулярной балки. Нерегулярность задавалась в диапазоне влияния на частоту до 10...15 %, которую можно считать при расчетах допустимой.

Для исследования записано уравнение для нерегулярной трехпролетной балки (рис.1) и использовано полученное ранее решение для многопролетной регулярной [3].

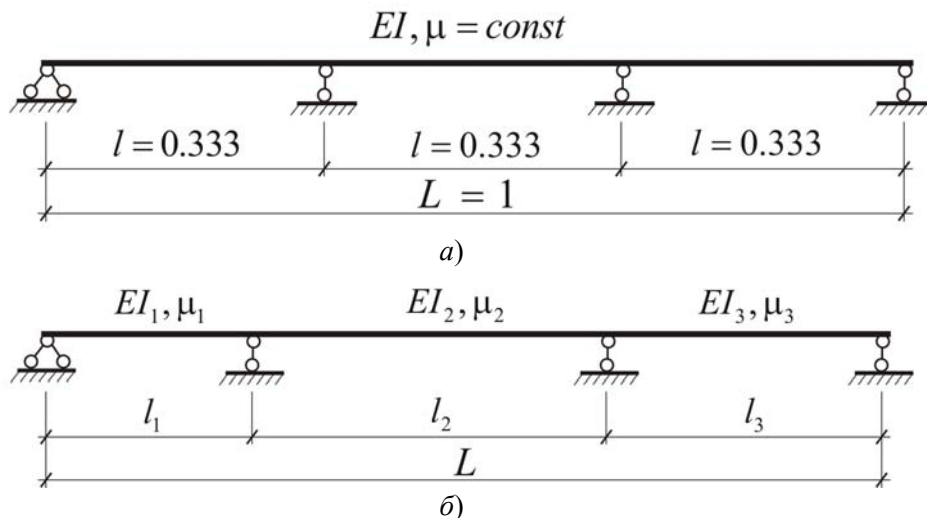


Рис. 1. Расчетная схема трехпролетной балки:
а – регулярная балка; б – нерегулярная балка

В связи с громоздкостью уравнения для нерегулярной балки была составлена программа для определения частотного параметра λ_i , который в данных исследованиях является основным. Данная программа позволяет исследовать изменение собственной частоты в зависимости от изменения любого из приведенных выше параметров в широком диапазоне и, таким образом, пригодна и для систем имеющих сильную нерегулярность.

В общем случае частота собственных колебаний балки определялась по известной формуле

$$\omega_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}, \quad (1)$$

где E – модуль упругости материала балки, кПа; μ – погонная масса балки, кг·с²/м²; I – момент инерции сечения, см⁴; ω_i – частота свободных колебаний i -й формы колебаний, Гц; l – пролет балки, м; λ_i – частотный параметр определяемый по уравнению (2).

Уравнение трехпролетной нерегулярной балки на жестких опорах, записанное в функциях Прагера [4] с помощью метода подробно изложенного в [5], имеет вид (2) и позволяет задать любую степень нерегулярности по длинам пролетов, погонной массе и жесткости, определить частотный параметр λ_i по формуле (2), и определить частоту по формуле (1):

$$\frac{\rho_{31}}{\varepsilon_{31}^3} \frac{\rho_{21}}{\varepsilon_{21}^3} B_1 B_2 B_3 - \frac{\rho_{31}}{\varepsilon_{31}^3} S_1 S_3 D_2 + \frac{\rho_{21}^2}{\varepsilon_{21}^6} B_1 B_3 S_2 + \frac{\rho_{21}}{\varepsilon_{21}^3} S_1 B_2 B_3 = 0, \quad (2)$$

где $B_1, B_2, B_3, S_1, S_2, S_3, D_2$ – функции Прагера, имеющие вид:

$$B(\lambda) = ch\lambda \sin \lambda - sh\lambda \cos \lambda,$$

$$S(\lambda) = 2sh\lambda \sin \lambda; \quad D(\lambda) = ch\lambda \cos \lambda - 1;$$

$\rho_{21}, \rho_{31}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{31}$ – коэффициенты нерегулярности, которые для систем регулярных равны 1; коэффициенты нерегулярности соответственно по массе и по жесткости 1-го и 2-го пролетов будут иметь вид

$$\rho_{21} = 4\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}, \quad \varepsilon_{21} = 4\sqrt{\frac{E_1 I_1}{E_2 I_2}}.$$

Для рассматриваемого случая, когда отсутствует нерегулярность между крайними симметричными пролетами

$$\rho_{31} = 4\sqrt{\frac{\mu_3}{\mu_1}} = 1, \quad \varepsilon_{31} = 4\sqrt{\frac{E_1 I_1}{E_3 I_3}} = 1.$$

В общем случае процент погрешности при определении частот нерегулярной балки по уравнениям для регулярной определялся по формуле, %

$$\frac{\omega_{р.б.} - \omega_{нр.б.}}{\omega_{р.б.}} 100, \quad (3)$$

где $\omega_{нр.б.} = \omega_l, \omega_\mu, \omega_{EI}, \omega_{EI/\mu}$ – частоты нерегулярной балки, имеющие нерегулярность соответственно по $l, \mu, EI, EI/\mu$.

При анализе были рассмотрены решения для четырех случаев, которые могут иметь место, а именно:

- $\mu, EI - \text{const}, l$ – переменная;
- $l, EI - \text{const}, \mu$ – переменная;
- $l, \mu - \text{const}, EI$ – переменная;
- $l - \text{const}, EI/\mu$ – переменная.

Используя формулу (3), запишем для указанных четырех случаев выражения для определения погрешности, которая возникает в том случае, если для нерегулярной системы использовать решения для регулярной системы (балки), которые имеют соответственно приведенный ниже вид. Все вычисления частотных коэффициентов ведутся для первого пролета балки. В случае необходимости по известной формуле – равенства круговых частот балки (1).

Для первого случая выразим через коэффициент k_l величину нерегулярности пролета балки

$$l_{р.б.}^2 = l_l^2 k_l^2.$$

Исходя из этого коэффициент нерегулярности равен

$$k_l = \frac{l_{р.б.}}{l_l}.$$

Так как для регулярной по длине балки (равнопролетной) можно записать

$$l_{р.б.} = \bar{l}_{р.б.} L,$$

где $\bar{l}_{р.б.}$ – относительная длина пролета, L – полная длина балки, следовательно,

$$k_l = \frac{\bar{l}_{р.б.}}{l_l} = \frac{0,3333}{\bar{l}_l}.$$

Значения относительной величины первого \bar{l}_l пролета приведены в табл. 1 (столбец 2).

$$\frac{\omega_{p.б.} - \omega_l}{\omega_{p.б.}} = \frac{\frac{\lambda_{p.б.}^2}{l_{p.б.}^2} \sqrt{EI} - \frac{\lambda_l^2}{l_l^2} \sqrt{EI}}{\frac{\lambda_{p.б.}^2}{l_{p.б.}^2} \sqrt{EI}} = 1 - \frac{\lambda_l^2 k_l^2}{\lambda_{p.б.}^2}, \quad (4)$$

Для следующих трех случаев формула определения погрешности относительно регулярной балки запишется следующим образом:

$$\frac{\omega_{p.б.} - \omega_{нр.б.}}{\omega_{p.б.}} = \frac{\frac{\lambda_{p.б.}^2}{l_{p.б.}^2} \sqrt{EI_{p.б.}} - \frac{\lambda_{нр.б.}^2}{l_{нр.б.}^2} \sqrt{EI_{нр.б.}}}{\frac{\lambda_{p.б.}^2}{l_{p.б.}^2} \sqrt{EI_{p.б.}}} = 1 - \frac{\lambda_{нр.б.}^2}{\lambda_{p.б.}^2}. \quad (5)$$

Как было указано выше частотный коэффициент λ определяется для первого пролета, в то время как отличие балки от регулярной состоит в том, что масса и жесткость центрального пролета отличается от крайних. В первом пролете (крайнем) данные параметры идентичны. Таким образом, для определения погрешности нерегулярной системы, при рассмотрении ее как регулярной, достаточно сравнить частотные параметры (выражение справедливо также для случая не равных по всем характеристикам пролетов).

В табл. 1 приведены результаты расчета первых трех частот для случая, когда $\mu, EI - \text{const}, l - \text{переменная}$. Ввиду того, что жесткостные и весовые характеристики пролетов одинаковы, коэффициенты ε и ρ в данном случае соответственно равны 1.

Таблица 1

№ типа	$\frac{l_1}{L}$	$\frac{l_2}{L}$	λ_l^2	$\lambda_{p.б.}^2$	$\left(1 - \frac{\lambda_l^2 k_l^2}{\lambda_{p.б.}^2}\right) 100, \%$
1	0,26	0,48	4,420676	9,869604	26,38
			10,57068	12,648041	-37,37
			12,78321	18,468761	-13,77
2	0,27	0,46	5,056369	9,869604	21,91
			11,09914	12,648041	-33,75
			13,09019	18,468761	-8,03
3	0,29	0,42	6,534927	9,869604	12,52
			11,79418	12,648041	-23,20
			13,87351	18,468761	0,75
4	0,31	0,38	8,184167	9,869604	4,12
			12,24444	12,648041	-11,93
			15,22259	18,468761	4,70
5	0,32	0,36	8,972086	9,869604	1,36
			12,648041	12,648041	-6,61
			18,468761	18,468761	4,11
6	0,333	0,333	9,869604	9,869604	0,00
			12,648041	12,648041	0,00
			18,468761	18,468761	0,00
7	0,35	0,3	10,69364	9,869604	1,72
			12,90426	12,648041	7,46
			22,53078	18,468761	-10,65
8	0,37	0,26	11,36154	9,869604	6,57
			13,20077	12,648041	15,29
			29,53708	18,468761	-29,80
9	0,39	0,22	11,85581	9,869604	12,25
			13,49846	12,648041	22,04
			36,99853	18,468761	-46,34

Анализируя график (рис. 2), можно отметить границы диапазона нерегулярности по длинам пролетов, в пределах которого допустимо определять частоты колебаний нерегулярной балки по уравнениям для регулярной. Для рассмотренного случая эти границы по длине пролета определены для первых двух частот (которые обычно учитываются при рас-

четах) как -10 и $+8$ %. Погрешность по частоте при этом не будет превышать 10 %.

В табл. 2 приведены аналогичные данные расчета регулярной балки по длине пролетов, но которая имеет нерегулярность по жесткости крайних пролетов и центрального (жесткости крайних пролетов одинаковы, т. е. $EI_1 = EI_3$).

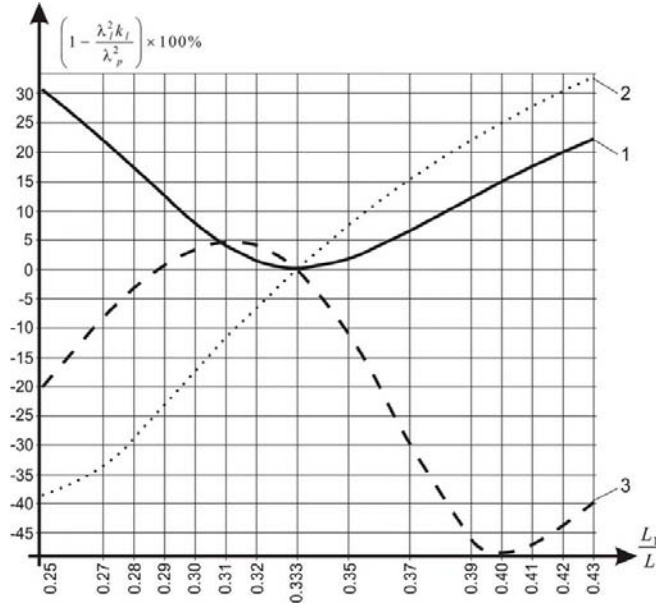


Рис. 2. График изменения частоты собственных колебаний в зависимости от соотношения пролетов:
1 – первая форма колебаний; 2 – вторая форма колебаний; 3 – третья форма колебаний

Таблица 2

№ типа	$\frac{EI_1}{EI_2} \& \frac{\mu_2}{\mu_1}$	$\lambda_{нр.б.,EI}^2$	$\lambda_{нр.б.,\mu}^2$	$\lambda_{р.б.}^2$	$\left(1 - \frac{\lambda_{нр.б.,EI}^2}{\lambda_{р.б.}^2}\right) 100, \%$	$\left(1 - \frac{\lambda_{нр.б.,\mu}^2}{\lambda_{р.б.}^2}\right) 100, \%$
1	0,25	12,5354	11,02285	9,8696	-27,01%	-11,69
		14,3541	12,7200	12,6480	-13,49%	-0,57
		25,3404	30,7185	18,4687	-37,21%	-66,33
2	0,50	11,1379	10,6675	9,8696	-12,85	-8,08
		13,6097	12,6967	12,6480	-7,60	-0,38
		21,4957	23,6970	18,4687	-16,39	-28,31
3	0,75	10,3657	10,2777	9,8696	-5,03	-4,13
		13,0639	12,6727	12,6480	-3,29	-0,20
		19,6847	20,3574	18,4687	-6,58	-10,23
4	1,00	9,8696	9,869604	9,8696	0,00	0,00
		12,6480	12,64804	12,6480	0,00	0,00
		18,4687	18,46876	18,4687	0,00	0,00
5	1,25	9,5155	9,4608	9,86960	3,59	4,14
		12,3209	12,6226	12,6480	2,59	0,20
		17,5404	17,2888	18,4687	5,03	6,39
6	1,50	9,2432	9,0656	9,8696	6,35	8,15
		12,0571	12,5965	12,6480	4,67	0,41
		17,7886	16,5030	18,4687	9,10	10,64
7	1,75	9,0221	8,6932	9,8696	8,59	11,92
		11,8399	12,5695	12,6480	6,39	0,62
		16,1596	15,9540	18,4687	12,50	13,62
8	2,00	8,8350	8,3477	9,8696	10,48	15,42
		11,6578	12,5418	12,6480	7,83	0,84
		15,6226	15,5550	18,4687	15,41	15,78

Анализируя график 3 и данные табл. 2, можно сделать вывод о том, что изменение жесткости и погонных масс пролетов значительно менее влияет на изменение частот, чем изменения длин пролетов. Та же погрешность по первым двум частотам (10 % в данном случае) достигается при нерегулярности по погонной массе пролетов +55...-55 %, а при нерегулярности по жесткости 55 и -30 %.

Указанный результат логичен по той причине, что в первом случае, при исследовании нерегулярности по длине, сама длина входит в формулу во второй степени, в то время как жесткость и масса стоят под знаком радикала.

Проведенное исследование дает нам основание обоснованно использовать простые решения, графики и приближенные формулы для определения собственных частот трехпролетной нерегулярной балки с минимальной погрешностью (рис. 3, 4).

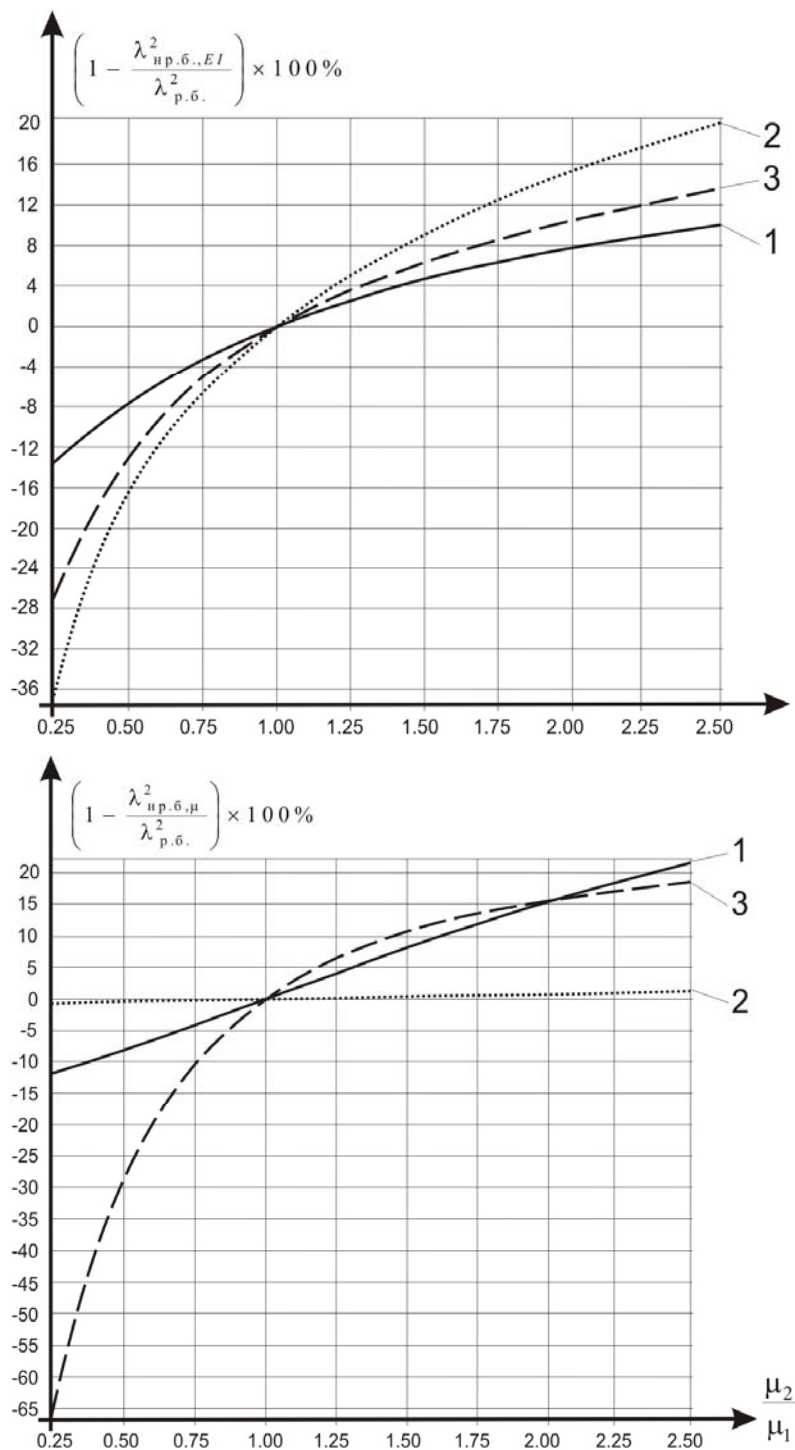


Рис. 3. График изменения частоты собственных колебаний в зависимости от соотношения жесткостей (слева) и погонных масс (справа) пролетов: 1 – первая форма колебаний; 2 – вторая форма колебаний; 3 – третья форма колебаний

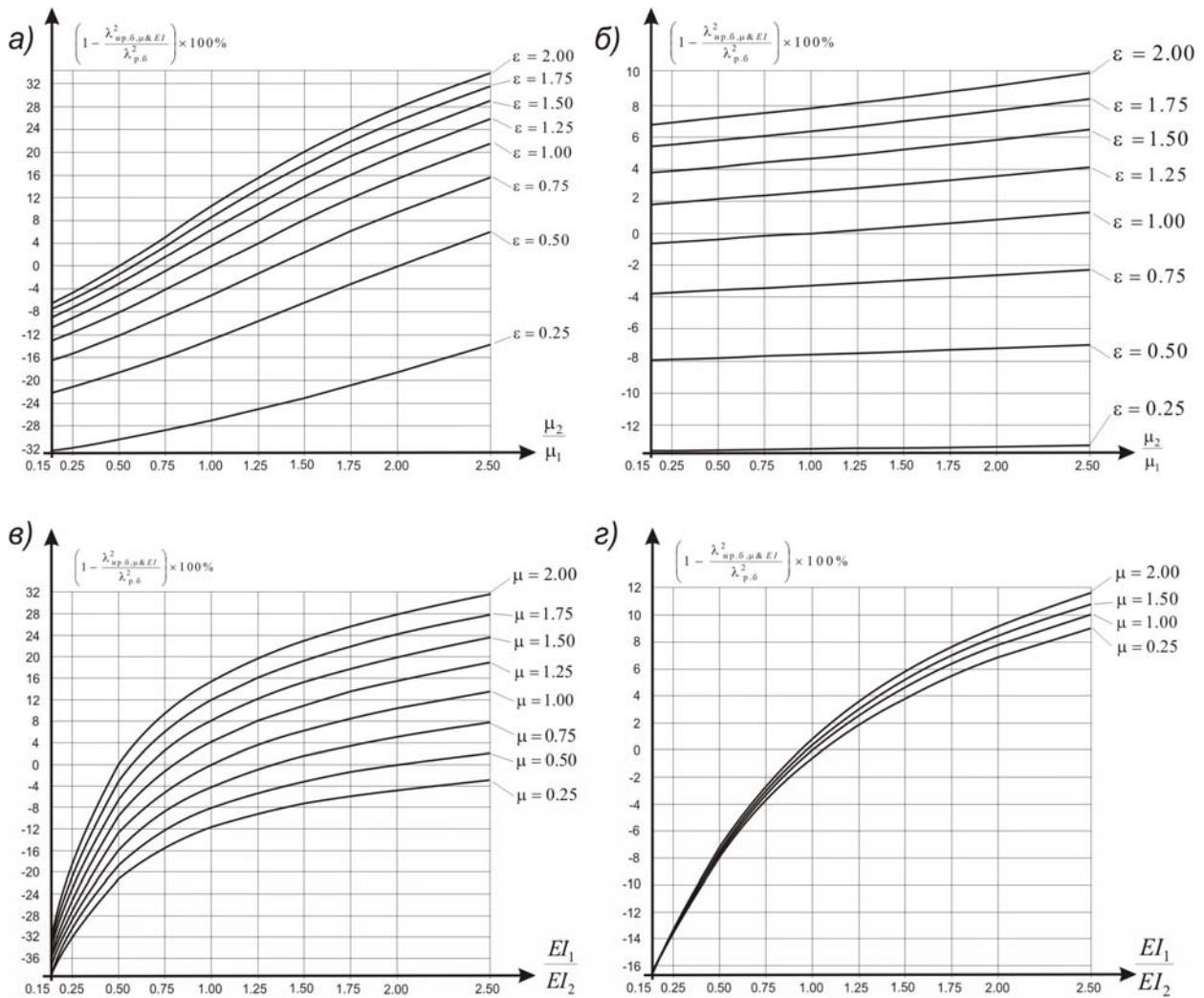


Рис. 4. График изменения частоты собственных колебаний в зависимости от соотношения жесткости и погонных масс пролетов:

- а) по первой форме от соотношения погонных масс; б) по второй форме от соотношения погонных масс; в) по первой форме от соотношения жесткости; з) по второй форме от соотношения жесткости

Соотношения длин пролетов реальных неразрезных металлических пролетных строений (ферм 110×132×110, 132×154×132 и др.) мостов находятся в пределах 0,20...0,32, что позволяет определять собственные колебания пролетных строений как для равнопролетной балки с допустимой для практических расчетов погрешностью. Апробация указанного подхода была проведена на многопролетной неразрезной конструкции, имеющей сильную нерегулярность, и по которой имеется эксперимент и выполнен расчет частот методом конечных элементов [6].

Ранее проведенные исследования [3] собственных частот многопролетных неразрезных балок (количество пролетов не ограничено) предлагают взамен сложного уравнения (2) пользоваться полученным простым решениями (6) для форм колебаний ($i = 1, 2, 3, \dots, n$)

$$\frac{sh\lambda_i (\cos \lambda_i - \cos \beta_i)}{\sin \lambda_i (ch\lambda_i - \cos \beta_i)} = 1, \quad \beta_i = \frac{\pi i}{n} \quad (6)$$

(для трехпролетной балки $\beta_i = \frac{\pi i}{3}$ $i = 1, 2, 3$) или графиком (рис. 5), построенным на основании решения уравнения (6), и наконец приближенными формулами, полученными на основании точного решения.

Для первых трех частот приближенные формулы [3] имеют вид

$$v_3 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}} \left(1 + \frac{5}{6} \right) \quad (7)$$

$$v_2 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}} \left[1 + \frac{5}{4} \left(1 - \frac{2}{3} \right) - \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{6,6} \right]$$

$$v_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}} \left[1 + \frac{5}{4} \left(1 - \frac{3}{3} \right) - \frac{\sin \pi}{6,6} \right].$$

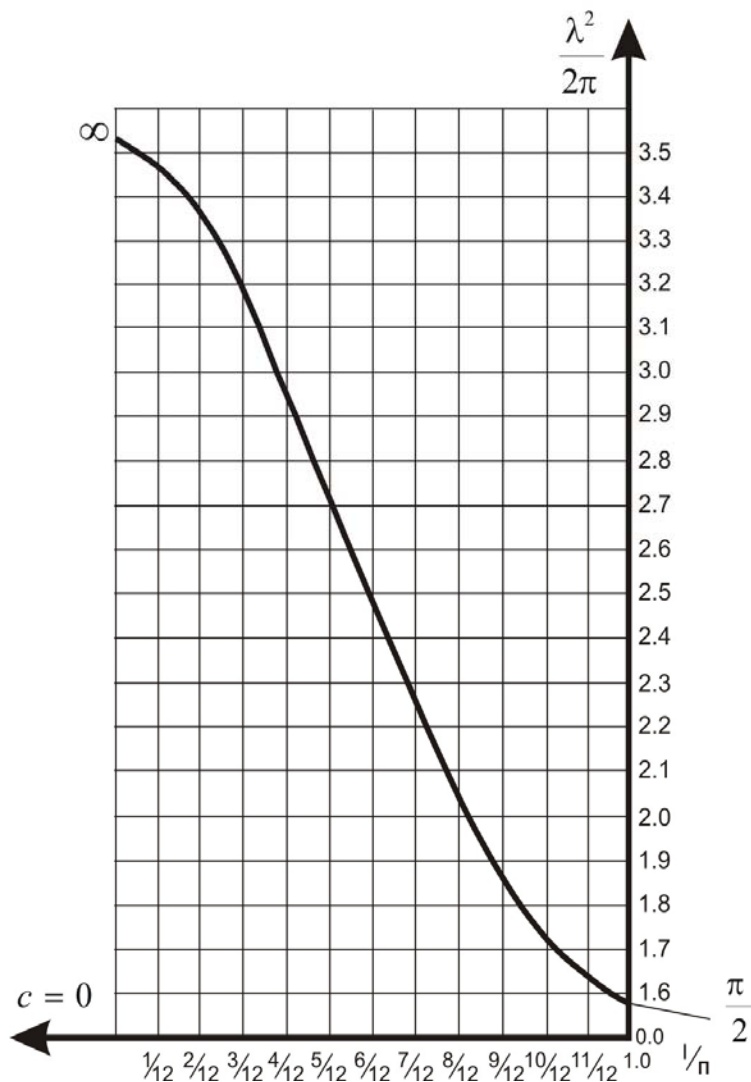


Рис. 5. График для определения частот собственных колебаний регулярной многопролетной балки на жестких опорах

Для определения частот многопролетной регулярной балки отрезок 0–1 разбивается на количество частей равное количеству пролетов балки n (в данном случае разбивка выполнена для двенадцатипролетной балки). Восстанавливая перпендикуляры до пересечения с кривой, получаем

n значений частотного параметра $\frac{\lambda_i^2}{2\pi}$.

Для определения точности предлагаемых формул и сравнения с приближенными методами вычисления частот, рассмотрим трех-

пролетную регулярную балку длиной 15 м. Поперечное сечение балки – 80 мм, момент инерции сечения $I = 201,062 \text{ см}^4$, модуль упругости для стали $20\,600 \text{ кН/см}^2$, погонная масса $0,3946 \text{ кН/м}$.

Результаты вычислений частот колебаний по трем формам приведены в табл. 4. В зависимости от способа определения частотного параметра: по формуле (2) и (6) – точный метод, выступает в роли эталонного, по графику – номограмме и по приближенным формулам (7).

Таблица 4

Варианты расчета Формы	По формуле (2)		По формуле (6)		График-номограмма		По формуле (7)	
	Частота, Гц	Погрешность, %	Частота, Гц	Погрешность, %	Частота, Гц	Погрешность, %	Частота, Гц	Погрешность, %
1	40,44632	0,00	40,44632	0,00	40,444863	+0,02	40,44632	0,00
2	51,83263	0,00	51,83263	0,00	52,269818	-0,83	51,99204	+0,31
3	75,68641	0,00	75,68641	0,00	75,442205	+0,32	74,15164	+0,32

Все рассмотренные методы обеспечивают достаточную точность вычислений. Следует отметить полное совпадение значений частот при вычислении по формулам (2) и (6). Формула (6) позволяет определить частоты колебаний балки не только для случая трехпролетной балки. В то же время при нерегулярности трехпролетной балки по длине пролетов, массе, жесткости больше указанных выше пределов целесообразней производить расчеты по формуле (2).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гуржий К. В. Исследование влияния незначительных нерегулярностей на изменение собственных частот неразрезных балок на жестких опорах / К. В. Гуржий, К. И. Солдатов // Вопросы статистической и динамической работы мостов: Межвуз. сб. науч. тр. / ДИИТ, – Д., 1993, С. 63–74.
2. Гуржий К. В. Особенности динамики систем близких к регулярным применительно к двухпролетным неразрезным балкам с промежуточной упругой опорой // Вопросы динамики мос-

тов и теории колебаний: Межвуз. сб. науч. тр. / ДИИТ, – Д., 1994. – С. 70–83.

3. Солдатов К. И. Частные случаи задачи о собственных колебаниях регулярных упруго опертых балок, // Исследования статистики, динамики и грузоподъемности мостов: Межвуз. сб. науч. тр. / ДИИТ, – Д., 1971. – Вып. 127. – С. 72–79.
4. Ананьев И. В. Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем. – М., 1946. – 224 с.
5. Эйхе Г. Н. Анализ структуры уравнения частот и форм колебаний прямолинейных цепных стержневых систем и свободные колебания радиально-вантовых мостов: Дисс. канд. техн. наук. – 183 с.
6. Солдатов К. И. Дослідження динаміки нерегулярних по довжинах прольотів мостових конструкцій / К. И. Солдатов, Г. С. Железняк, К. В. Гуржий. – Д., 2004. – С. 221–226.
7. Солдатов К. И. О жесткости опор реальных мостовых конструкций / К. И. Солдатов, Г. С. Железняк, К. В. Гуржий. – Д., 2004. С. 154–160.

Поступила в редколлегию 25.03.2005.