

АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИИ

Розглянута апроксимація перехідної функції рішенням диференціального рівняння другого порядку і визначена оцінка погрешності передавальної функції.

Рассмотрена аппроксимация переходной функции решением дифференциального уравнения второго порядка и определена оценка погрешности передаточной функции.

Approximation of transitive function by means of solution of second order differential equation has been examined and estimation of the error of transfer function has been determined.

Если функция дифференцируема по всем своим аргументам, то она может быть разложена в ряд Тейлора в окрестности произвольно выбранной точки.

При линеаризации уравнений элементов системы автоматического регулирования (САР) эта точка должна соответствовать установившемуся режиму [1]. В этом режиме $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$ и $y = y^0$ есть постоянные величины и $\dot{x}_1 = \dot{y} = \ddot{y} = 0$. Тогда после разложения функции φ в ряд получим

$$\begin{aligned} \varphi(0, 0, y^0, 0, x_1^0, x_2^0) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\ddot{y}}\right)^0 \Delta\ddot{y} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{y}}\right)^0 \times \\ \times \Delta\dot{y} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^0 \Delta y + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}_1}\right)^0 \Delta\dot{x}_1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^0 \Delta x_1 + \\ + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^0 \Delta x_2 + \Phi = 0, \quad (1) \end{aligned}$$

где отклонения переменных от установившихся значений

$$\Delta x_1 = x_1 - x_1^0, \quad \Delta\dot{x}_1 = \dot{x}_1, \quad \Delta x_2 = x_2 - x_2^0,$$

$$\Delta y = y - y^0, \quad \Delta\dot{y} = \dot{y}, \quad \Delta\ddot{y} = \ddot{y};$$

частные производные от функции φ при

$$x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad y = y^0, \quad \dot{x}_1 = \dot{y} = \ddot{y} = 0$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^0, \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}_1}\right)^0, \dots;$$

Φ – сумма членов, которые содержат различные произведения отклонений и отклонения во второй и более высоких степенях с коэффициентами в виде смешанных частных производных и част-

ных производных второго и высших порядков от функции φ по соответствующим аргументам.

В устойчивых системах автоматического регулирования отклонения переменных достаточно малы, поэтому сумма Φ в уравнении содержит лишь члены высшего порядка малости, и ею можно пренебречь. Кроме того, следует принять во внимание уравнение установившегося режима

$$\varphi(0, 0, y^0, 0, x_1^0, x_2^0) = 0.$$

В результате получим линеаризованное уравнение

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\ddot{y}}\right)^0 \Delta\ddot{y} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{y}}\right)^0 \Delta\dot{y} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^0 \Delta y + \\ + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}_1}\right)^0 \Delta\dot{x}_1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^0 \Delta x_2 = 0. \quad (2) \end{aligned}$$

Уравнение (2) – линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, но оно приближенное, так как отброшена сумма Φ и уравнение (2) содержит не переменные x_1 , x_2 и y , а их отклонения от установившегося режима. При $x_1^0 = x_2^0 = y^0 = 0$, линеаризованное уравнение становится уравнением для переменных x_1 , x_2 , y :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\ddot{y}}\right)^0 \ddot{y} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{y}}\right)^0 \dot{y} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^0 y + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}_1}\right)^0 \dot{x}_1 + \\ + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^0 x_1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^0 x_2 = 0. \quad (3) \end{aligned}$$

Уравнение (3) в операторной форме запишется так:

$$Qy = k_1 R_1 x_1 + k_2 x_2,$$

где

$$Q = a_0 p^2 + a_1 p + 1; R_1 = b p + 1;$$

$$a_0 = \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \ddot{y}}\right)^0}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^0}; a_1 = \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{y}}\right)^0}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^0};$$

$$k_1 = -\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^0}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^0}; b = \frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{x}_1}\right)^0}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^0}; k_2 = -\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^0}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^0}.$$

Как известно [2], динамические свойства объекта приближенно могут быть описаны передаточной функцией следующего вида:

$$W(p) = \frac{ke^{-p\tau}}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}, \quad (4)$$

где τ – время чистого запаздывания; k – коэффициент усиления объекта; T_1 и T_2 – постоянные времени.

Переходную функцию объекта аппроксимируем решением линейного дифференциального уравнения второго порядка (3)

$$h(t) = h(\infty) \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right); \quad (5)$$

$$h(t) = h(\infty) \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t-\tau}{T_2}} \right);$$

$t \geq \tau$.

Время чистого запаздывания τ и коэффициент усиления k определяются обычными приемами по переходной функции, следовательно, для решения поставленной задачи необходимо определить постоянные времени T_1 и T_2 .

Наиболее распространенными способами определения коэффициентов дифференциального уравнения второго порядка являются следующие: определение постоянных времени T_1 и T_2 с помощью графических построений; определение постоянных времени T_1 и T_2 интерполяционными методами; определение постоянных времени T_1 и T_2 с использованием асимптоты переходной функции.

При аппроксимации экспериментальной переходной временной кривой, изображенной на рисунке, постоянные времени T_1 и T_2 определим с помощью асимптоты переходной функции.

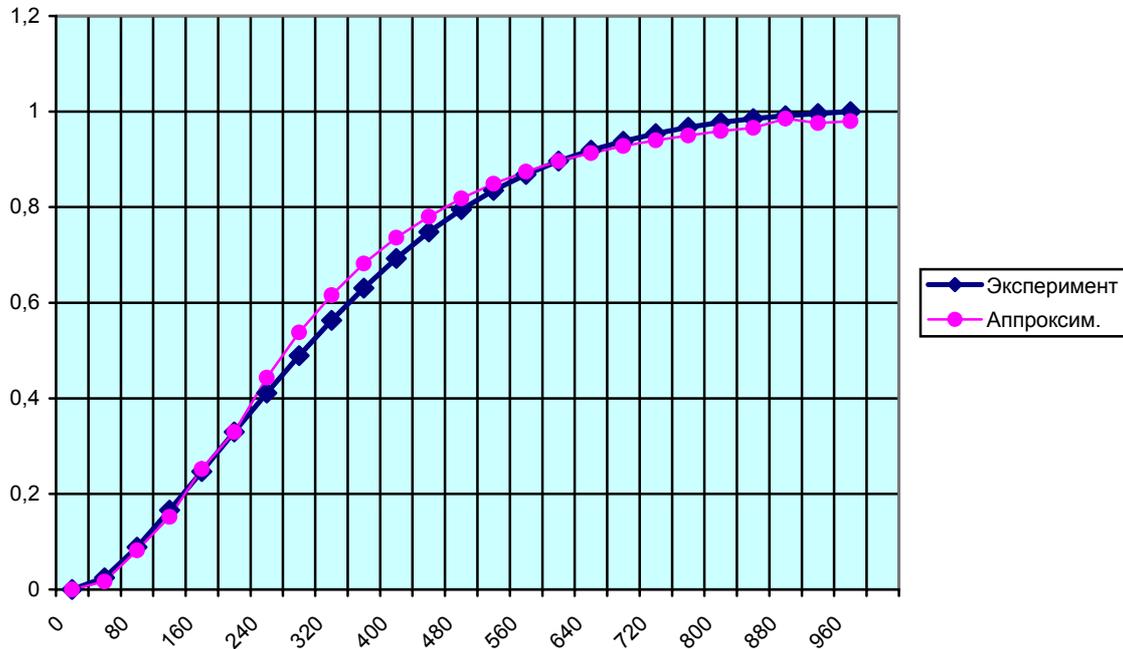


Рис. Аппроксимация экспериментальной переходной временной кривой решением дифференциального уравнения второго порядка

Сущность данного метода заключается в аппроксимации переходной функции данной кривой, две точки которой могут быть легко

определены при определенных величинах времени t . Третье уравнение может быть получено из условия, что интеграл функции

$$\frac{1}{h(T_y)} [h(T_y) - h(t)]$$

равен сумме постоянных времени T_1 и T_2 и τ_d [3].

Передачная функция (4), преобразуемая к виду

$$W(p) = \frac{ke^{-p\tau_d}}{[T_1T_2p^2 + (T_1 + T_2)p + 1]},$$

при больших значениях p близка к функции

$$W(p) = \frac{ke^{-p\tau_d}}{(\sqrt{T_1T_2}p + 1)^2}.$$

Так как большим значениям p в изображении соответствуют малые значения t оригинала, то начальный участок функции (5) близок к функции

$$h(t) \approx h(T_y) \cdot \left[1 - \frac{\sqrt{T_1T_2} + t - \tau_d}{\sqrt{T_1T_2}} e^{-\frac{t - \tau_d}{\sqrt{T_1T_2}}} \right]. \quad (6)$$

Для определения неизвестных T_1 , T_2 и τ_d воспользуемся соотношением (6). При

$$t = t_1 = \sqrt{T_1T_2} + \tau_d,$$

$$t = t_2 = 0,5\sqrt{T_1T_2} + \tau_d$$

функция $h(t)$ принимает значения:

$$h(t_1) = h(T_y)(1 - 2e^{-1}) = 0,26h(T_y);$$

$$h(t_2) = h(T_y)(1 - 3e^{-1}) = 0,09h(T_y).$$

Для нахождения величин t_1 и t_2 необходимо провести горизонтальные прямые на расстояниях $0,26h(T_y)$ и $0,09h(T_y)$ от оси абсцисс и из точек пересечения их с $h(t)$ опустить перпендикуляры на ось времени.

Графическим методом определяем корни уравнений

$$h(t_1) = 0,26 \cdot 1 = 0,26,$$

$$h(t_2) = 0,09 \cdot 1 = 0,09.$$

В частности, получаем: $t_1 = 180$ с, $t_2 = 100$ с.

Определив величины t_1 и t_2 , вычислим время дополнительного запаздывания $\tau_d = 2t_2 - t_1$, а также получим уравнение

$$\sqrt{T_1T_2} = 2(t_1 - t_2).$$

Воспользуемся формулой трапеций

$$S = \frac{1}{h(T_y)} \int_0^{T_y} [h(T_y) - h(t)] dt = T_1 + T_2 + \tau_d.$$

Определим время дополнительного запаздывания:

$$\tau_d = 2 \cdot 100 - 180 = 20 \text{ с.}$$

По формуле трапеций определяем $S = 26$ с.

Получаем два уравнения:

$$\sqrt{T_1T_2} = 2(t_1 - t_2) = 2(180 - 100) = 160$$

$$c = 2,67 \text{ мин,}$$

$$T_1 + T_2 = S - \tau_d = 26 - 20 = 6.$$

После решения системы уравнений получим, что $T_1 = 4,368$ мин, $T_2 = 1,632$ мин. Следовательно, передачная функция объекта имеет следующий вид:

$$W(p) = \frac{e^{-20p}}{(4,368p + 1)(5,144p + 1)}.$$

После определения T_1 и T_2 необходимо произвести оценку погрешности путем вычисления выражения (2) при разных значениях t и сравнить их с ординатами экспериментальной переходной функции:

$$\delta_g = \frac{h(t_g) - h_3(t_g)}{h_3(T_y)} 100\%.$$

Было выполнено сравнение ординат экспериментальной переходной функции с результатами, полученными с помощью вычислений.

После выполненных расчетов и оценки погрешности передачной функции, значения которой находятся в допустимых пределах, аппроксимацию динамических свойств данного объекта передачной функцией можно считать допустимой. Расчеты выполнялись с помощью математического пакета Mathcad и табличного редактора Excel.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Макаров И. М. Линейные автоматические системы / И. М. Макаров, Б. М. Менский. – М.: Машиностроение, 1982.
2. Розенвассер Е. Н. Операторные методы и колебательные процессы / Е. Н. Розенвассер, С. К. Воловодов. – М.: Наука, 1985.
3. Балакирев В. С. Экспериментальное определение динамических характеристик промышленных объектов управления / В. С. Балакирев, Е. Г. Дудников, А. М. Цирлин. – М.: Энергия, 1967.

Поступила в редколлегию 05.07.2005.