

А. В. ІЛЬМАН (АБ «Брокбізнесбанк»), В. М. ІЛЬМАН (ДІТ)

ФОРМАЛЬНО-СТРУКТУРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ СИСТЕМ

Для моделювання економічних систем запропоновано застосовувати модель систем формальної структури, яка наділена властивостями формальної системи, алгебри та структури (будови). Розглянуто приклад моделювання системи бухгалтерського обліку.

Для моделирования экономических систем предложено использовать модель систем формальной структуры, которая наделена свойствами формальной системы, алгебры и структуры (строения). Рассмотрен пример моделирования системы бухгалтерского учета.

For modelling economic systems, it has been proposed to use a model of formal structure systems, which has the property of formal system, algebra and structure (composition). An example of the modelling of a bookkeeping system has been considered.

Принцип дослідження економічних систем полягає в тому, щоб навести певний порядок і надати змістовності деякому набору фактів, з'ясувати їх вплив на поведінку системи і пов'язати все це в одне ціле [1]. Конкретно це дослідження може бути пов'язане з аналізом маркетингових заходів щодо виробництва та збуту продукції, дослідженням господарсько – фінансової діяльності підприємств, аналізом наповнення кредитного портфеля банківських установ і т. ін.

Існує велика кількість методів моделювання тих чи інших питань економічних систем [2]. Але серед них є зовсім небагато універсальних в певному розумінні підходів, за допомогою яких можливо описати будь яку економічну систему. До них відноситься системний підхід, який спирається на елементи теорії систем [3], теоретико-множинний підхід [4] та ін.

У наступних матеріалах статті, для наведення певного «порядку» в економічних системах, пропонується застосовувати універсальний формально-структурний підхід конструктивної математики, який спирається на теорію формальних систем та структур. Взагалі то теорія формальних систем [5] розвивалася як розділ математичної логіки, за допомогою якого вдалося уточнити і чітко визначити логіко-математичну мову будови логічної теорії. Але, як з'ясувалося у подальшому, аксіоматична теорія формальних систем дозволяє також: конструювати породжуючі системи такі, наприклад, як формальні породжуючі граматики, що застосовуються у системах програмування; визначити досить важливе для інтелектуальних систем поняття алгоритму та ін.

Застосування елементарних формалізмів на економічних системах дає можливість ввести конструктивні множини, завдати певні правила виводу елементів економічних конструкцій, тобто поставити у відповідність економічній системі формальну модель. Конструктивно такі системи можливо створити за такою схемою:

- 1) на об'єктах заданої економічної системи будується формальний алфавіт;
- 2) на заданому алфавіті будується вільна формальна мова економічної системи;
- 3) у цій мові виділяється послідовність конструкцій (формул), яка приймається за аксіомами (початок виводу тощо);
- 4) задаються формальні правила виводу, за допомогою яких виводяться конкретні конструкції (формули та ін.) заданої економічної системи.

Розглянемо тепер елементарні конструктивні об'єкти економічної системи S , за допомогою яких можливо будувати інші об'єкти цієї системи. Оскільки природа конструктивного об'єкту різна, тому будемо використовувати уніфіковану назву імені об'єкту – символ.

Визначення 1. Конструктивний об'єкт економічної системи – це є символ. Множину символів або елементів будемо називати алфавітом $A = \{a_1, a_2, \dots\}$. У подальшому будуть розглядатись алфавіти, які задовольняють умови:

- алфавіт складається з скінченної кількості символів, тобто він скінченний;
- порядок символів у множині несуттєвий;
- порожній символ o завжди належить алфавіту, хоча не завжди виділяється в переліку його символів;
- символи алфавіту різні, тобто однакові символи в алфавіті не допускаються;

– елементами множини можуть бути різні комбінації символів цього ж алфавіту.

Згідно з умовами об'єкти алфавітів можуть бути простими і сполученими. Прості об'єкти неподільні, тобто не можуть бути сполучені з символів даного алфавіту. Сполучені ж об'єкти складаються з більше як одного символів алфавіту. Сполучення $oa = a$ будемо відносити до простих елементів. Наприклад, алфавіт $A = \{o, a, b, ab, aab\}$ містить в собі три прості елементи (символи) o, a, b і два сполучених елементи ab, aab . Наведемо декілька важливих визначень.

Визначення 2. Розміром алфавіту A зветься кількість його простих елементів (символів) і позначається як $\dim A$. Так для алфавіту $A = \{o, a, b, ab, aab\}$ його розмір $\dim A = 2$, так як приймаємо, що $\dim \{o\} = \dim \emptyset = 0$.

Визначення 3. Алфавіт зветься базисним або стандартним, якщо він складається тільки з символів, тобто усі його елементи прості. Наприклад, двійковий алфавіт $B = \{a, b\}$ – стандартний. Якщо $A \subseteq B$, тоді кажуть, що алфавіт A є підалфавітом алфавіту B і в разі $A \subset B$ кажуть, що алфавіт A є власним підалфавітом алфавіту B .

Визначення 4. Алфавіти A і B зуть рівними ($A = B$), якщо виконуються включення $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$. На заданому алфавіті можливо побудувати нові конструктивні об'єкти. Нехай задано деякий алфавіт A .

Визначення 5. Словами (ланцюжками) над алфавітом A будемо називати конструктивні об'єкти побудовані за допомогою індуктивного процесу:

- слово $\varepsilon = o$ є порожнім;
- якщо конструктивний об'єкт l – слово над алфавітом A , тоді конструктивний об'єкт $l\alpha$, $\alpha \in A$ є також словом побудованим над алфавітом A .

З визначення 5 маємо, що $l\varepsilon = \varepsilon l = l$, тобто порожнє слово є одиницею на множині слів; якщо l слово над алфавітом A , тоді за індуктивним процесом $ll\dots l = l^i$ також слово над алфавітом A . Очевидно, $l^0 = \varepsilon$. Над алфавітом $A = \{o, a, b, ab, aab\}$ можливо отримати нескінченну сукупність слів $\{\varepsilon, a, b, aa, bb, ab, \dots\}$. Множину слів побудованих над алфавітом A будемо позначати через $\mathbb{F}(A)$. Таку множину слів зуть вільною мовою.

Нехай l слово над алфавітом A , тобто $l = a_1 a_2 \dots a_k \in \mathbb{F}(A)$ і $a_i \in A$, тоді

Визначення 6. Довжиною слова l над алфавітом A є кількість символів, з яких складається це слово і позначають $|l| = k$.

Прийmemo довжину порожнього слова ε за $|\varepsilon| = 0$. Зрозуміло, що будь-яке не порожнє слово має довжину $k \geq 1$. Якщо l_1 і l_2 слова множини $\mathbb{F}(A)$, тоді для довжини слів мають виконуватися властивості

$$|l_1 l_2| = |l_1| + |l_2| \quad \text{і} \quad |l_1^i| = i |l_1|.$$

Визначення 7. Два слова $l = b_1 b_2 \dots b_m \in \mathbb{F}(B)$ і $q = a_1 a_2 \dots a_n \in \mathbb{F}(A)$ однакові $l = q$, якщо $|l| = |q|$ або $n = m$ і $a_i = b_i$, для всіх значень $1 \leq i \leq n$.

Нехай задано алфавіт A економічної системи \mathbb{S} , над яким побудована формальна вільна мова $\mathbb{F}(A)$. Далі припустимо, що Λ деяка множина аксіом економічної системи і P задана сукупність правил виводу з аксіом Λ , тоді формальну систему над алфавітом A визначимо як [5].

Визначення 8. Формальною системою \mathbb{S}_A над алфавітом A назвемо упорядковану четвірку $\mathbb{S}_A = \langle A, \mathbb{F}(A), \Lambda, P \rangle$.

Аксіоми формальної системи можуть бути безпосередньо слова з сукупності $\mathbb{F}(A)$, які визначаються за певними правилами. Для розпізнання аксіом будемо позначати їх грецькою буквою σ або $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ та іншими додатними символами. Форма запису правил P може бути будь-якою, наприклад, типу синтаксичних діаграм або діаграм Бекаса-Наура як в програмуванні, або канонічними системами Поста. Але ми будемо користуватися більш компактною формою заміщень (імплікацій) $x \rightarrow y$, яка читається «якщо x , тоді y » або так « y виводиться з x », або « x заміщується y ». Завжди будемо вважати, що множина правил виводу P є скінченною, тобто складається зі скінченної кількості правил.

Визначення 9. Ланцюжок зветься виведеним з аксіом Λ формальної системи \mathbb{S}_A , якщо існує послідовність правил (виводів), у тому числі однакових, за якою він виводиться при застосуванні цих правил.

Так, наприклад, вивід ланцюжка $x = a_1 a_2 a_3$ з аксіоми σ за допомогою правил:

$$p_1 : \sigma \rightarrow a_1, \quad p_2 : a_1 \rightarrow a_1 a_2, \\ p_3 : a_2 \rightarrow a_2 a_3;$$

можливо записати у вигляді послідовності виводів

$$\sigma \xrightarrow{p_1} a_1 \xrightarrow{p_2} a_1 a_2 \xrightarrow{p_3} a_1 a_2 a_3.$$

Послідовність виводів ланцюжка визначає його формальну структуру, тобто його будову. Повна сукупність виведених ланцюжків у формальній системі \mathbb{S}_A зветься формальною мовою \mathbb{L} . Зрозуміло, що $\mathbb{L} \subset \mathbb{F}(A)$.

Нехай, наприклад, необхідно утворити формальну систему \mathbb{S}_A над сукупністю об'єктів $A = \{a, b, c\}$ деякої економічної системи \mathbb{S} з аксіомами Λ :

$$1) \sigma = a, 2) \sigma = b, 3) \sigma = c$$

та правилами виводу P :

$$1) \sigma \rightarrow a\sigma a, 2) \sigma \rightarrow b\sigma b.$$

Тоді, як нескладно бачити, що множина $\mathbb{F}(A)$ складається з будь-яких ланцюжків побудованих за допомогою визначення 5 над заданими об'єктами алфавіту A . Об'єктами ж мови \mathbb{L} , створеними за цією системою \mathbb{S}_A будуть симетричні ланцюжки, наприклад, ланцюжок $aabcbbaa$, який отримаємо в результаті послідовності виводів

$$\begin{aligned} \sigma &\xrightarrow{1} a\sigma a \xrightarrow{1} aa\sigma aa \xrightarrow{2} \\ &aab\sigma baa \xrightarrow{3} aabcbbaa \end{aligned}$$

за допомогою подвійного застосування першого правила потім другого правила та третьої аксіоми формальної системи.

Створена, за визначенням 8, формальна система явно не відтворює процесів морфологічних перетворень за тими чи іншими діями в економічній системі. Врахувати цей недолік можливо за допомогою введення над формальною системою відповідної алгебри.

З діями над об'єктами економічної системи зв'яжемо певні операції позначені знаками-символами. При чому з кожною операцією пов'яжемо, з визначеною для неї, кількістю місць. Наприклад, арифметична операція додавання – двохмісдинна $(+^2)$.

Визначення 10. Сигнатурою – Σ називають множину знаків-символів операцій з визначеними їх місциностями. Тоді алгеброю Ξ над множиною $\mathbb{F}(A)$ зуть упорядковану пару, яка складається з цієї множини та сигнатури, тобто $\Xi = \langle \mathbb{F}(A), \Sigma \rangle$.

Взагалі то, алгебра як математична дисципліна вивчає алгебраїчні операції за значеннями результату операцій. Наприклад, в рамках алгебр зв'язуються їх групові властивості, уні-

версальність та ін. Тому алгебра не визначає «порядок-будову» в економічних системах за цими операціями за виключення випадку, коли множина $\mathbb{F}(A)$ упорядкована. Тобто, якщо між елементами множини $\mathbb{F}(A)$ можливо, наприклад, ввести відношення (\leq) і сигнатуру задати у вигляді $\Sigma = (\min^k, \max^m)$, тоді алгебра Ξ задає упорядковану структуру – решітку $C = \langle \mathbb{F}(A), \Sigma \rangle$. Але взагалі множина $\mathbb{F}(A)$ не є упорядкованою, тому для моделювання економічних систем запропоновано використовувати новий математичний об'єкт «система формальної структури», який наділений властивостями формальної системи, структури (будови) та алгебри. Конструктивно така система формальної структури може бути побудована як гібрид формальної системи, алгебри та структури, тобто за трохелементною схемою:

- на об'єктах заданої економічної системи будувється формальний алфавіт A ;
- на відношеннях, діях над об'єктами економічної системи будувється конструктивна множина місцинних операцій (і операція виводу) – сигнатура Σ ;
- задаються формальні правила виводу конструкцій економічної системи, правила застосування операцій сигнатури, властивості правил і аксіоми виводу конструкцій та застосування операцій – аксіоматика U .

У подальшому систему формальної структури будемо позначати як упорядковану трійку

$$\Phi = \langle A, \Sigma, U \rangle. \quad (1)$$

Зрозуміло, що за допомогою введеної системи формальної структури Φ можливо записати модель для будь-якої предметної області. Зокрема, для упорядкованої множини A і сигнатури в одній з альтернативних форм

$$\Sigma = \{\min^2, \max^2\} \mid \{\cap^2, \cup^2\} \mid \{\wedge^2, \vee^2\}$$

і відповідної аксіоматики для вибраної форми структура Φ співпадає з решіткою [6].

Визначена система формальної структури (1) дозволяє виводити ланцюжки конструкцій економічної системи, за послідовностями яких вдається відтворювати ланцюги виводів, котрі задають структури цих конструкцій. Множина виведених в системі формальних структур Φ ланцюжків утворює формальну економічну мову \mathbb{L} . Якщо ланцюжок $l_m \in \mathbb{L}$, тоді структура цього ланцюжка $\Phi(l_m)$ задається ланцюгом виводу

$$\begin{aligned} l_0 &\xrightarrow{p_1} l_1 \xrightarrow{p_2} \dots \xrightarrow{p_i} \\ &l_i \xrightarrow{p_j} \dots \xrightarrow{p_m} l_m. \quad (2) \end{aligned}$$

Оскільки імплікаційні правила виводу задають бінарні відношення на упорядкованих парах (l_i, l_j) , тоді ланцюгові виводу (2) можливо поставити у взаємнооднозначну відповідність орієнтований граф виводу ланцюжка l_m . Графічне зображення структури будь-якого ланцюжка мови економічної системи дозволяє застосувати арсенал методів досліджень теорії графів [7] для аналізу економічних систем.

Наведемо тепер деякі алгебро-множинні властивості систем формальних структур (1). Розглянемо дві формальні структури Φ_1 і Φ_2 з множини систем формальних структур, нехай ці структури утворюють мови \mathbb{L}_1 і \mathbb{L}_2 , тоді

Визначення 11. Системи формальних структур Φ_1 і Φ_2 конструктивно-еквівалентні, якщо їх формальні економічні мови однакові, тобто $\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_2$.

Нескладно перевірити, що введене за визначенням 11 відношення задає відношення еквівалентності, тому за цим відношенням економічну множину систем формальної структури можливо розбити на класи еквівалентності.

Слід зауважити, що введена формальна структура (1), яка діє над вільною мовою побудованою на алфавіті та сигнатурі $\mathbb{F}(A \cup \Sigma)$ – скрізь визначена відносно операцій сигнатури Σ , тому таку структуру Φ назвемо вільною системою формальної структури сигнатури Σ і вона є універсальною відносно операцій сигнатури Σ . Крім того, оскільки має місце включення $\mathbb{L} \subset \mathbb{F}(A \cup \Sigma)$, тоді формальна економічна мова \mathbb{L} є переліченою. У подальшому будемо розглядати тільки вільні системи формальних структур.

Визначення 12. Структури Φ_1 і Φ_2 – однотипні, якщо їх сигнатури однакові і їх аксіоматики співпадають з точністю до символів алфавітів, на яких вони визначені, тобто вони мають вигляд $\Phi_1 = \langle A_1, \Sigma, U_1 \rangle$ і $\Phi_2 = \langle A_2, \Sigma, U_2 \rangle$.

Однотипні структури Φ_1 і Φ_2 гомоморфні, якщо існує відображення φ алфавіту A_1 на алфавіт A_2 і аксіоматики U_1 на U_2 , таке що довільна k -місцинна операція $f \in \Sigma$ і довільний об'єкт аксіоматики U_1 (аксіома, правило, властивість) p задовольняють умови

$$\begin{aligned} \varphi[f(a_1, a_2, \dots, a_m)] &= \\ &= f[\varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_m)], \\ \varphi[p(a_1, a_2, \dots, a_m)] &= \\ &= p[\varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_m)], \end{aligned}$$

для будь-якого набору елементів

$$(a_1, a_2, \dots, a_m) \in A_1^m.$$

Якщо відображення $\varphi: \Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ і $\psi: \Phi_2 \rightarrow \Phi_3$ – гомоморфізми, тоді відображення $\varphi\psi$ є гомоморфізм структури Φ_1 в структуру Φ_3 . Взаємнооднозначний гомоморфізм зветь ізоморфізмом. Якщо φ – ізоморфізм, тоді нескладно переконатися у тому, що обернене відображення φ^{-1} є також ізоморфним відображенням.

Визначення 13. Структура $\Phi_1 = \langle A_1, \Sigma, U \rangle$ називається підструктурою системи формальної структури $\Phi \langle A, \Sigma, U \rangle$, якщо $A_1 \subseteq A$ і для будь-якої операції $f \in \Sigma$ за аксіоматикою U , $f(a_1, a_2, \dots, a_j) \in \mathbb{F}(A_1, \Sigma)$ для довільного набору $a_1, a_2, \dots, a_j \in A_1$.

Ствердження. На множині підструктур формальної структури Φ можливо задати структуру-решітку.

Дійсно, якщо під об'єднанням двох підструктур $\Phi_1 = \langle A_1, \Sigma, U \rangle$ і $\Phi_2 = \langle A_2, \Sigma, U \rangle$ розуміти підструктуру $\Phi_3 = \langle A_1 \cup A_2, \Sigma, U \rangle$, тоді множина всіх підструктур системи формальної структури $\Phi = \langle A, \Sigma, U \rangle$ утворює на операції об'єднання структуру-решітку [6].

Зрозуміло, що окремі операції сигнатури структури Φ на алфавіті цієї структури також мають певні алгебраїчні властивості, але вони визначаються у аксіоматиці структури Φ .

Наведемо тепер приклад застосування формально-структурного підходу до моделювання економічної системи бухгалтерського обліку. Оскільки, наведене у Законі про бухгалтерський облік [8], його визначення складне і розмите, то спочатку спростимо і формалізуємо визначення бухгалтерського обліку.

Визначення 14. Бухгалтерський облік (БО) – динамічний процес (в часі T) організації і проведення бухгалтерських операцій (O) на основі бухгалтерських рахунків (H), тобто

$$BO = \langle T, O, H \rangle. \quad (3)$$

У рамках введеного формального визначення 14 будемо в подальшому виконувати моделювання системи БО – (1).

Нехай деяке підприємство використовує в своїй діяльності бухгалтерські рахунки $\{r_0, r_1, \dots, r_m\} = H$ вибрані з плану рахунків і нехай N допоміжна множина символів $\{\sigma_0, \sigma, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \chi, \varphi, \mu, \nu, \eta, \rho, \tau, \psi, \xi\}$. Тоді алфавіт A системи формальної структури Φ (БО) подамо як $A = H \cup N$.

Введемо тепер елементарні операції, які супроводжують організацію та проведення бухгалтерських операцій. До елементарних операцій віднесемо: операцію «приписування» P , призначення якої приписати рахунку r_i певний признак або характеристику (дебіт, активний та ін.); операцію кореспонденції двох рахунків K_o ; операцію проводки P_r і операцію O_p – для організації складних бухгалтерських операцій. Таким чином, сигнатуру формальної структури подамо у вигляді $\Sigma = \{P^2, K_o^6, P_r^3, O_p^k, \rightarrow^2\}$. У сигнатурі шоста місциність операції K_o обумовлена тим, що кореспонденція визначена на суперпозиції операції приписування: дебіту або кредиту, активності або пасивності, синтетичного або аналітичного обліку рахунків. Операція P_r також передбачає попереднє застосування операції приписування грошової суми c_j та часу $t_i \in T$ до кореспонденції, а операція O_p може об'єднувати k -проводок.

Перейдемо до опису аксіоматики U формальної структури. У нашому випадку аксіоматика сукупність аксіом, це аксіоми-початку $\sigma_0 = BO$ та аксіом

$$\sigma = r_0 | r_1 \dots | r_m,$$

$\eta =$ активний|пасивний|активно-пасивний,

$\chi =$ синтетичний|аналітичний;

правил виводу P та властивостей операцій V .

$$P = \begin{cases} \sigma_0 \rightarrow O_p \alpha \sigma_0; \gamma \rightarrow P \psi \delta; \\ \sigma_0 \rightarrow O_p \alpha; \quad \psi \rightarrow P \rho \eta; \\ \alpha \rightarrow P \nu \xi \tau; \quad \rho \rightarrow P \sigma \chi; \\ \xi \rightarrow P \nu \xi \tau; \quad \xi \rightarrow \sigma; \\ \tau \rightarrow P \mu P_r \beta; \delta \rightarrow \text{дебіт} | \text{кредіт}; \\ \beta \rightarrow K_o \varphi; \quad \mu \rightarrow c_j; \\ \varphi \rightarrow \gamma P \psi \delta; \quad \nu \rightarrow t_j. \end{cases}$$

Нескладно побачити, що побудована формальна структура на бухгалтерських рахунках та їх характеристиках утворює абелеву півгрупу відносно операції приписування, оскільки

$$V = \begin{cases} P \sigma \delta = P \delta \sigma; \\ P(P \sigma \delta) \mu = P \sigma(P \delta \mu). \end{cases}$$

Таким чином, модель системи формальної структури $\Phi(BO)$ дозволяє реалізувати операції над бухгалтерськими рахунками:

$$P \sigma \delta = r_i \text{дебіт}; \quad K_o \sigma \sigma \eta \chi \delta = \bar{r}_j \bar{r}_k,$$

де $\bar{r}_i = r_i \text{акт.} | \text{пас.} | \text{акт.пас.} | \text{синт.} | \text{анал.} | \text{деб.} | \text{кред.}$

$$P_r K_o \nu \mu = \bar{r}_j \bar{r}_k t_i c_i;$$

$$O_p \alpha = P_r P_r \dots P_r$$

і побудувати формальну мову

$$\mathbb{L}[\Phi(BO)] \subset \mathbb{F}(H \cup N \cup \Sigma \setminus \{\rightarrow\})$$

для будь-якого підприємства, за якою досліджувати його діяльність. Слід зауважити, що наведена методика моделювання дозволяє врахувати кількісний, валютний та інші обліки, крім того побудована модель може бути використана для керування фінансовими потоками економічної системи, для проектування автоматизованої системи ведення і аналізу бухгалтерського обліку підприємства тощо.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Макконнелл К. Р. Экономикс: принципы, проблемы и политика / К. Р. Макконнелл, С. Л. Брю. – К.: Хагар-Демос, 1993. – 785 с.
2. Баканов М. И. Теория экономического анализа / М. И. Баканов, А. Д. Шеремет. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 416 с.
3. Моисеев Н. Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 487 с.
4. Молчанов А. А. Моделирование и проектирование сложных систем. – К.: Выща школа, 1988. – 359 с.
5. Смальян Р. Теория формальных систем. – М.: Наука, 1981. – 209 с.
6. Скорняков Л. А. Элементы теории структур. – М.: Наука, 1982. – 160 с.
7. Харари Ф. Теория графов. – М.: Мир, 1973. – 300 с.
8. Закон України від 16.07.99 р. № 996 «Про бухгалтерський облік та фінансову звітність в Україні».

Надійшла до редколегії 23.06.2005.