УДК 517.95

Т. Ф. МИХАЙЛОВА (ДІІТ)

СУБОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ СИНГУЛЯРНО-ЗБУРЕНОЮ РОЗПОДІЛЕНОЮ СИСТЕМОЮ

Запропоновано методику наближеного розв'язку сингулярно-збуреної задачі оптимального керування інтенсивним процесом електролізу. Побудовано субоптимальне керування та критерій якості, які використовують асемптоматику нульового порядку і оцінена близькість одержаних наближених розв'язків до точних.

Предложен метод приближенного решения сингулярно-возмущенной задачи оптимального управления интенсивным процессом электролиза. Построены субоптимальное управление и критерий качества, использующие асимптотику нулевого порядка и оценена близость полученных приближенных решений к точным.

The article proposes a method of approximated solution of a singular/excited task of optimal control of the intensive electrolysis process. The suboptimum control and the quality criterion, using asymptotics of the zero order, have been constructed and the closeness of obtained approximated solutions to the exact ones has been assessed.

Однією з важливих проблем експлуатації є захист металевих конструкцій від корозії. Інтенсивний процес електролізу, який широко застосовується в гальванотехниці, описується релаксаційною моделлю переносу, а відповідна йому задача оптимального керування потребує застосування асимптотичних методів. Для того, щоб у момент закінчення процесу електроосадження досягти заданої концентрації іонів металу в об'ємі електролізера при мінімумі енергетичних затрат потрібно здійснювати керування процесом за допомогою зміни катодної густини струму. Асимптотичним методам розв'язання задач оптимального керування сингулярно-збуреними системами з розподіленими параметрами присвячені роботи М. Г. Дмітрієва та його учнів [3]. У роботі Ж. Л. Ліонса [4] досліджувались задачі керування для еліптичних та параболічних сингулярно збурених рівнянь. Авторами роботи [5] розглянуті задачі оптимального керування тепловим процесом з обмеженим керуванням. Для задачі оптимального граничного керування інтенсивним процесом електролізу в даній роботі запропоновано процес побудови та обґрунтування асимптотики програмного оптимального керування за методом пограничних функцій.

Процес електролізу в прикатодному шарі описується функцією $c(x,t)$, яка усередині області $Q=\{[0,\delta]\cdot[0,T]\}$ задовольняє рівняння

$$\tau_r c_{tt} + c_t = Dc_{xx} \tag{1}$$

з початковими умовами

$$c(x,0)=c_0(x), \quad c_t(x,0)=\varphi(x), \tag{2}$$

і крайовими умовами

$$c_x(0,t)=\frac{p(t)}{a}, \quad c(\delta,t)=\psi(t), \tag{3}$$

де τ_r – час релаксації; $p(t)$ – катодна густина струму розряду іонів металу; $\alpha = ZFD$ – електрохімічна змінна; $C(x,t)$ – концентрація іонів металу в об'ємі електролізера, δ – товщина прикатодного шару.

Потрібно визначити таке керування $p(t)$, що задовольняє умову

$$\int_0^T p^2(t)\,dt < \infty, \tag{4}$$

щоб по закінченню процесу електролізу виконувалась умова

$$c(x,T)=\theta(x),$$

а функціонал енергії

$$I\left[p(t)\right]=\int_0^T p^2(t)\,dt$$

набував найменшого значення.

Використовуючи [1] вдалося довести, що ця задача еквівалентна задачі з мінімальною енергією з функціоналом якості

$$I\left[p(t)\right]=\int_0^T p^2(t)\,dt+\frac{1}{\beta}\int_0^\delta \left[C(x,T)-\theta(x)\right]^2 dt,$$

$$\left\|p(t,\beta)-p(t)\right\|_{L_2(O,T)} \to 0 \quad \text{при} \quad \beta\to 0. \tag{5}$$

Застосовуючи принцип максимуму Понтрягіна для розв'язку задачі (1)–(3), (5), одержимо оптимальне керування в цій задачі $p(t)$ за формулою

$$p(t) = -\frac{D}{2a\beta} V(0,t), \qquad (6)$$

де $V(x,t)$ є єдиним розв'язком крайової задачі (7)–(9). Так як час релаксації τ_r є малим параметром, а задача (1)–(3), (5), (7), (9) – сингулярно-збуреною, то шукатимемо її розв'язок у вигляді суми регулярної складової і функції граничного шару, кожну з яких подамо як суму ряду за степенями τ_r :

$$\left.\begin{aligned} c(x,t) &= \bar{c}(x,t) + \Pi c(x,\tau), \\ V(x,t) &= \bar{V}(x,t) + QV(x,\bar{\tau}); \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{c}(x,t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \tau_r^i \bar{c}_i(x,t), \\ \Pi c(x,\tau) &= \sum_{i=0}^{\infty} \tau_r^i \Pi c_i(x,\tau); \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{V}(x,t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \tau_r^i \bar{V}_i(x,t), \\ QV(x,\bar{\tau}) &= \sum_{i=0}^{\infty} \tau_r^i QV_i(x,\bar{\tau}), \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

де $\tau = t/\tau_r$; $\bar{\tau} = (T-t)/\tau_r$ – швидкі змінні в околі точок $t=0$ і $t=T$ відповідно.

Підставляючи ряди (11) і (12) в рівняння (1) і (7), граничні умови (3) і (9) та прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях τ_r окремо залежні від $t, \tau, \bar{\tau}$, одержимо задачі для регулярних складових порядку τ_n^0 і граничних функції:

$$\left.\begin{aligned} &\begin{cases} \bar{c}_{0t} = D\bar{c}_{0xx}, \\ \bar{c}_0(x,0) = \bar{c}_0(x); \end{cases} \\ &\begin{cases} -\bar{V}_{0t} = D\bar{V}_{0xx}, \\ \bar{V}_0(x,T) = -2\left[\bar{c}_0(x,T) - \theta(x)\right]; \end{cases} \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

$$\begin{cases} \Pi c_{0\tau\tau} + \Pi c_{0\tau} = 0, \quad i = 0, \\ \Pi c_{i\tau\tau} + \Pi c_{i\tau} = D\Pi c_{i-1xx}, \quad i \ge 1; \end{cases} \qquad (14)$$

$$\begin{cases} QV_{0\bar{\tau}\bar{\tau}} + QV_{0\bar{\tau}} = 0, \; i = 0, \\ QV_{i\bar{\tau}\bar{\tau}} + QV_{i\bar{\tau}} = DQV_{i-1xx}, \; i \ge 1. \end{cases} \qquad (15)$$

Щоб з одержаних рівнянь визначити члени розвинень (11) і (12), потрібно задати початкові умови. Їх одержимо, підставляючи (11) і (12) у вихідні початкові умови (2) і (8) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях τ_r.

$$\left.\begin{aligned} &\Pi c_0(x,0) = c_0 - \bar{c}_0(x,0); \; \Pi c_{0_\tau}(x,0) = 0 \\ &QV_0(x,0) = -2\bar{c}_t(x,T) - V_0(x,T); \\ &QV_{0_{\bar{\tau}}}(x,0) = 2\bar{c}_t(x,T) + \bar{V}_0(x,T) \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Співвідношення для визначення коефіцієнттів і-го порядку рядів (11), (12) можна виписати формально для $i \ge 1$. Оскільки маємо справу з розподіленою системою, то використання кожної наступної складової розвинень (11), (12) потребує дослідження на розв'язність і підвищення гладкості функцій, що входять до задачі.

Для побудови наближеного керування найбільш простого виду, обмежимось дослідженням систем (13), (14) і (15), (16).

Використовуючи [1], доведена

Теорема 1. Субоптимальне керування $p^0(t)$ є єдиним розв'язком інтегрального рівняння $\in L_2(O;T)$

$$\beta p^0(t) = f(t) - \int_0^T k(t,\tau) p^0(\tau) d\tau, \qquad (17)$$

де

$$f(t) = \frac{bD}{a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n^2 D(t-T)} \gamma_n, \quad b = \sqrt{\frac{2}{\delta}};$$

$$k(t,\tau) = \frac{D^2 b^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n^2 D(t+\tau-2T)},$$

де

$$\gamma_n = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{x}{\delta}\right) x_n(x) dx + \frac{bSI_0}{VzF} \frac{(-1)^{n+1}}{\lambda_n^3 D} \times$$
$$\times \left(1 - e^{-\lambda_n DT}\right).$$

Єдність розв'язку рівняння (17) витікає з того, що $f(t) \in L_2(O;T)$ і додатної визначеності ядра $k(t,\tau)$. За допомогою методів розв'язку рівнянь з виродженим ядром [2] знаходимо розв'язок (17). Субоптимальне керування буде мати вигляд

$$p_0(t) = \frac{b}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n - g_n) e^{\lambda_n D(t-T)} -$$
$$- \frac{D}{2a\beta} QV^0(0,t), \qquad (18)$$

в якому константи g_n визначаються із нескінченної системи лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь.

Оцінку близькості субоптимального керування задачі до оптимального дають такі теореми.

Теорема 2. Оптимальне керування задачі (1)–(5) $p(t)$ збігається до субоптимального $p^0(t)$ при $\tau_r \to 0$ і знайдуться такі сталі $\tau_r^0,\ c$, що при $0 \le \tau_r \le \tau_r^0$

$$\left| p(t) - p^0(t) \right| \le c\tau_r \quad \forall \quad 0 \le t \le T .$$

Теорема 3. Якщо початкові умови задачі (1)–(5) задовольняють умови

$$c_0(x) \in W_2^1(0,1), \quad \theta(x) \in L_2(0,1)$$

то існує таке $0 < \tau_n \le \tau_r^0$, що

$$\left| I[p] - I\left[p^0\right] \right| \le c\tau_r^2,$$

де

$$I\left[p^0\right] = \frac{1}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n - g_n)\gamma_n$$

відповідне субоптимальне значення функціонала задачі.

Запропонована методика дозволила побудувати асимптотику розв'язку задачі оптимального керування для сингулярно збуреного гіперболічного рівняння. Доцільно відмітити, що використання законів керування більш високого порядку, ніж нульовий, потребує додаткових досліджень на розв'язність відповідних самоспряжених задач і підвищення обмежень на гладкість функцій, що входять до задачі.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами – М.: Наука, 1978. – 365 с.
2. Михайлова Т. Ф. Сингулярные возмущения в задачах синтеза оптимального управления системами с распределенными параметрами // Препринт 89-10 ИК АН УССР, 1989. – С. 1–20.
3. Васильева А. Б. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления / А. Б. Васильева, М. Г. Дмитриев. – М.: ВИНИТИ, 1982. – 77 с. (Итоги науки и техники. Сер. мат. анализа, т. 20).
4. Lions J. L. Asimptotic Methods in the optimal control of distributed systems // Automatica / – 1978. – P. 199–211.
5. Єгоров О. І. Синтез оптимального керування тепловим процесом з обмеженим керуванням. // Автоматика. – 1990. – № 3. – С. 57–61.

Надійшла до редколегії 07.07.2005.