УДК 517.9/62-50

З. М. ГАСАНОВ (ДИИТ)

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ФАЗОВОЙ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В ТРАНСПОРТНОМ ПОТОКЕ

Пропонується алгоритм розв'язання задачі синтезу оптимальної залежності фазової швидкості поширення збурювань від щільності транспортних засобів у транспортному потоці. Для цього використовуються методи теорії оптимального керування.

Предлагается алгоритм решения задачи синтеза оптимальной зависимости фазовой скорости распространения возмущений от плотности транспортных средств в транспортном потоке. Для этого используются методы теории оптимального управления.

The article proposes an algorithm of solving the task of synthesis of optimum dependence of the excitations distribution phase speed on the density of vehicles in a transport stream. The methods of the theory of optimal control are used for the purpose.

Волновые процессы, которые появляются в транспортном потоке, включаются в достаточно широкий класс так называемых гиперболических волн, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных гиперболического типа. Такие волны встречаются в акустике, теории упругости, в электромагнетизме, в газовой динамике и других областях классической и современной физики. Анализ таких волн имеет не только научное, но и практическое значение, например, при изучении таких природных явлений, как паводковые и ледниковые волны.

В фундаментальной монографии Дж. Уизема [1] приведен достаточно полный обзор литературы и результатов, посвященных математическому описанию и анализу гиперболических волн. Во всех известных работах, посвященных этой проблеме, используются известные математические модели волновых процессов. Числовые значения и функциональные свойства параметров этих моделей находятся или эмпирически, или постулируются исходя из физической сущности рассматриваемых процессов.

Для наглядности рассмотрим достаточно интенсивный и непрерывный поток транспорта с наблюдаемой плотностью $z(x,t)$, равной числу транспортных средств на единицу длины участка дороги без въездов и съездов. Обозначим через $q(x,t)$ расход, равный числу транспортных средств, пересекающих черту x за единицу времени. Тогда, в силу принципа непрерывности потока, скорость изменения количества транспортных средств в любом интервале $x_1 < x < x_2$ должна компенсироваться суммарным потоком через сечения x_1 и x_2, т. е.

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} z(x,t) + q(x_2,t) - q(x_1,t) = 0 .$$

Отсюда, при $x_2 \to x_1$ получим закон сохранения:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 , \qquad (1)$$

если функция $z(xt)$ имеет непрерывные производные.

При решении практически важных задач, связанных с распространением волн (не только в транспортном потоке), исходя из теоретических и эмпирических соображений, предполагается, что существует некоторая функциональная зависимость между параметрами z и q [1]:

$$q = F(z) .$$

Тогда уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{\partial z}{\partial t} + C(z)\frac{\partial z}{\partial x} = 0 , \qquad (2)$$

где параметр $C(z) = F'(z)$ − характеризует фазовую скорость распространения волн в потоке. Отсюда следует, что для полного анализа потока, прежде всего, требуется определить зависимость $C = C(z)$ или $q = F(z)$.

В монографии [1] приведен анализ транспортного потока и связанных с ним математических задач в случаях, например, когда:

$$F(z) = \frac{1}{\delta z_1}(z_1 - z)$$

или

$$F(z) = az\ln\frac{z_1}{z},$$

где z_1 – предельная плотность, при которой машины упираются бамперами одна в другую, δ – время для того, чтобы отреагировать водителю на изменение условий движения впереди, $0,5 \le \delta \le 1,5$ сек, a − относительная скорость распространения волн в потоке. Эти зависимости получены эмпирическим путем для конкретного участка дороги с конкретными характеристиками потока.

В данной статье предлагается достаточно общая методика определения зависимости $C = C(z)$. Для этого предлагается использовать методы теории оптимального управления.

Пусть фазовая скорость $C = C(x,t)$ – управляющий параметр, с помощью которого можно регулировать движение в потоке транспорта, например, рациональным распределением светофоров на всем рассматриваемом участке дороги. Процесс распространения возмущений в полосе $Q = \{(x,t) | -\infty < x < \infty, 0 \le t < T\}$ плоскости (x,t) описывается квазилинейным уравнением первого порядка:

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} + C(x,t)\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad (3)$$

с начальным условием

$$z(x,0) = z_0(x). \qquad (4)$$

Допустимыми управлениями $C = C(x,t)$ можно считать кусочно-непрерывные функции, удовлетворяющие ограничению

$$C_0 \le C(t,x) \le C_1 \qquad (5)$$

где C_0 и C_1 – заданные постоянные.

Задачу синтеза оптимального управления можно сформулировать так: найти такое допустимое управление, действующее по принципу обратной связи, чтобы соответствующее решение задачи (3), (4) минимизировало функционал

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} V(x) z(T,x)\,dx, \qquad (6)$$

где $V(x)$ – известная финитная функция. Для транспортного потока можно взять $V(x) \equiv 1$, $x \in [0;l]$ и $V(x) \equiv 0$, $x \notin [0;l]$, где l – длина участка дороги.

Данная задача является частным случаем более общей задачи управления фазовой скоростью распространения возмущений, в которой вместо уравнения (3) рассматривается более общее уравнение [2]:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = f_0(t,x,z,C) + f_1(t,x,z,C)\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad (7)$$

содержащее управляющее возмущение в коэффициенте f_1 и свободном члене f_0. Уравнение (7) эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} = f_0 + f_1 g, \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = g. \end{cases} \qquad (8)$$

Приведем решение задачи оптимального управления с помощью принципа максимума Понтрягина[2], [3]. Функция Гамильтона H в данном случае имеет вид

$$H = \xi(f_0 + f_1 g) + \eta g,$$

где ξ и η являются решением сопряженной системы:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial t} + \dfrac{\partial \eta}{\partial x} = -\xi\left(\dfrac{\partial f_0}{\partial z} + \dfrac{\partial f_1}{\partial z} g\right), \\ \xi f_1 + \eta = 0, \end{cases}$$

которая равносильна уравнению

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(\xi f_1) = -\xi\left[\frac{\partial f_0}{\partial z} + \frac{\partial f_1}{\partial z} g\right].$$

Это уравнение решается при краевом условии

$$\xi(T,x) = -V(x). \qquad (9)$$

Для потока транспорта $f_0 \equiv 0$, $f_1 \equiv -C$. Тогда систему (8) можем записать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} = -cg, \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = g. \end{cases}$$

Следовательно,

$$H = -\xi c g + \eta g. \qquad (10)$$

Согласно принципу максимума, с учетом (5), (8) и (10), имеем:

$$C_{\text{опт}}(t,x) = \begin{cases} C_0, \text{ при } \xi g > 0, \\ C_1, \text{ при } \xi g < 0, \end{cases}$$

где ξ − определяется из уравнения

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\xi C)=0$$

с краевым условием (9).

Так как, в любом случае, оптимальное управление $C_{\text{опт}}(t,x)$ получает предельные постоянные значения, то сопряженная функция $\xi=\xi(x,t)$ определяется из уравнения:

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}+C\frac{\partial\xi}{\partial x}=0\,.$$

Характеристики этого уравнения имеют вид

$$x=C(t-T)+S,\quad S\in(-\infty,+\infty).$$

Вдоль этих характеристик функция $\xi(x,t)$ получает постоянные значения

$$\xi(S,t)=-V(S)$$

для всех $-\infty<S<+\infty$, $0\le t<T$.

Так как для транспортного потока можно взять $V(x)\equiv 1$, то $\xi(S,t)=-1$ при $0\le t<T$, $0\le S\le l$. Следовательно, для транспортного потока получим следующую оптимальную зависимость $C=C_{\text{опт}}(z)$:

$$C_{\text{опт}}(z)=\begin{cases}C_0,\ \text{при}\ \dfrac{\partial z}{\partial x}<0,\\ C_1,\ \text{при}\ \dfrac{\partial z}{\partial x}>0.\end{cases}$$

Таким образом, получена зависимость оптимальной фазовой скорости распространения возмущений в транспортном потоке от изменения плотности $z(x,t)$ по всей длине участка дороги.

Отметим, что аналогичные результаты можно получить и для других функционалов, отличных от (6). Эти результаты могут быть использованы при анализе как транспортных потоков, так и других процессов, связанных с гиперболическими волнами.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 624 с.
2. Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики. – М.: Наука, 1975. – 480 с.
3. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М.: Наука, 1976. – 392 с.

Поступила в редколлегию 04.07.05.